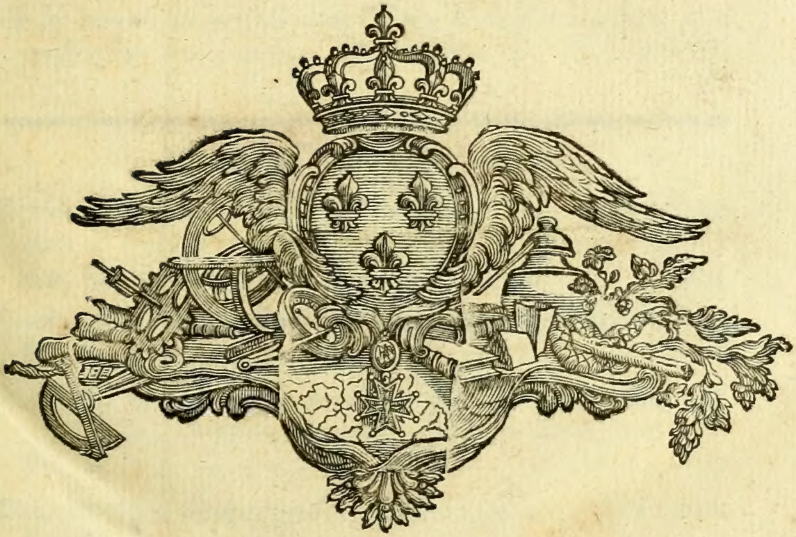
S. 804. D

MÉMOIRES
DE
MATHÉMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,

Présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans, & lûs dans ses Assemblées.

~~Année 1773.~~ tome septième



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXVI.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

TABLE
DES MÉMOIRES
Contenus dans ce Volume.

PRIX de l'Académie Royale des Sciences, pour l'année 1774.

Sur l'Équation séculaire de la Lune. Par M. DE LA GRANGE, Associé-Étranger de cette Académie. . Page 1

Sur les moyens de perfectionner l'espèce de Cristal nécessaire à la construction des Lunettes Achromatiques. Par M. LIBAUDE. 62

MÉMOIRES.

*Expériences Physico-chimiques, sur l'air qui se dégage des Corps dans le temps de leur décomposition, & qu'on connoît sous le nom vulgaire d'*Air fixé. Par M. BUCQUET 1

Premier Mémoire pour servir à l'Histoire anatomique des Poissons. Par M. VICQ-D'AZIR. 18

Recherches sur l'intégration des Équations différentielles aux différences finies, & sur leur usage dans la théorie des hasards, &c. Par M. DE LA PLACE. 37

Deuxième Mémoire pour servir à l'Histoire anatomique des Poissons. Par M. VICQ-D'AZIR. 233

Description du Coco de l'île Praslin, vulgairement appelé Coco de mer. 263

Mémoire sur la construction des Fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des Équations aux différences partielles. Par M. MONGE 267

Observation anatomique, Sur une extrémité inférieure dont les muscles ont été changés en tissu graisseux, sans aucune altération dans la forme extérieure. Par M. VICQ-D'AZIR . . 301

Mémoire sur la détermination des Fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des Équations aux différences partielles. Par M. MONGE. 305

Mémoire sur la structure des Os dans les Oiseaux, & de leurs diversités dans les différentes espèces. Par M. CAMPER. 328

Observation d'une tête exostosée. Par M. RIBELT, Chirurgien à Perpignan 336

Essai sur une application des règles de Maximis *&* Minimis *à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture.* Par M. COULOMB, Ingénieur du Roi. 343

Mémoire sur la Théorie du Jeaugeage. Par M. DEZ, Professeur à l'École royale Militaire 383

Réflexions sur un Tour de Cartes. Par M. MONGE . . . 390

Observation & Calcul de l'opposition de Jupiter, du 19 Août 1772, faite à Rouen. Par M. le Chevalier d'ANGOS. 413

Observation & Calcul des oppositions de Mars & de Saturne de 1773, faite à Genève. Par M. MALLET, Correspondant de l'Académie. 416

Observations de la Comète découverte par M. Messier le 1.er Avril 1771, faites à l'Observatoire de Saint-Lô, à Rouen. Par M. DULAGUE. 422

Mémoire sur la Météorologie, qui contient l'extrait des Observations Météorologiques, faites à Paris pendant dix ans, depuis le 1.er Janvier 1763, jusqu'au 31 Décembre 1772,

par M. Messier, de l'Académie royale des Sciences, avec une Méthode pour analyser ces sortes d'Observations. Par le P. COTTE, Prêtre de l'Oratoire & Correspondant de l'Académie........................ 427

Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des Comètes; sur la figure de la Terre, & sur les Fonctions. Par M. DE LA PLACE........................ 503

Extrait d'une Lettre écrite à M. l'Abbé Nollet, le 20 Juillet 1765, par M. DE CAIRE, Chevalier de l'Ordre de Saint-Louis, & Capitaine au Corps du Génie, sur la cause du Froid en Canada........................ 541

Mémoire sur les Nerfs de la dixième Paire. Par M. SABATIER. 553

Voyage souterrain ou *Description des Grottes de Lombrive & de Bedeilhac, dans le pays de Foix; du Minier des Indes près Arles en Roussillon; du Minier de Sournia en Languedoc, & de Saint-Dominique aux environs de Castres dans la même province; avec des Remarques sur les Priapolites qu'on trouve au voisinage de cette dernière Grotte.* Par M. MARCORELLE, Correspondant de l'Académie................ 565

Mémoire sur quelques particularités de la structure du cerveau & de ses enveloppes. Par M. SABATIER......... 593

Analyse de la Bile, avec des Réflexions sur les changemens qu'elle peut subir dans le corps humain. Par M. BORDENAVE, Professeur Royal de Chirurgie, Membre des Académies de Rouen, de Florence, &c................ 610

ERRATA pour la Pièce de M. DE LA GRANGE.

PAGE 15, lignes 7, 8 & 10, au lieu de α, *lisez* &c.
Page 23, lignes 4 & 16, même correction.

ERRATA pour les Mémoires de M. DE LA PLACE.

PAGE 41, ligne 23, au lieu de ${}^{n-1}H_x . y_{x+n}$, lisez ${}^{n-1}H_x . y_{x-n}$.
Page 63, ligne 8, au lieu de ${}^1X_x$, lisez X_x. & au lieu de X_x, lisez ${}^1X_x$.
Page 139, article 31 à la fin, ajoutez ce qui suit:

On peut résoudre le Problème précédent par la méthode des combinaisons d'une manière extrêmement simple que voici:

Les mêmes choses étant supposées que dans le Problème précédent; soit de plus i le nombre des corps qui manquent au joueur C, en sorte que l'on ait $x = m + n + i$; il est évident que le jeu doit finir au plus tard en $x - 2$ coups; donc le nombre de tous les cas possibles multipliés chacun par leur probabilité particulière, est .... $(p + q + r)^{m+n+i-2}$. Pour avoir le nombre de tous les cas dans lesquels le joueur A gagne, il faut développer le trinome $(p+q+r)^{m+n+i-2}$, & n'admettre que les termes dans lesquels p a un exposant égal ou plus grand que m; soit donc $H.p^{m+\mu}.q^{\nu}.r^{n+i-2-\mu-\nu}$ un de ces termes; si les exposans de q & de r sont l'un moindre que n, & l'autre moindre que i, il faut admettre ce terme en entier; mais si l'exposant de q, par exemple, est égal ou plus grand que n, il faut rejeter de ce terme toutes les combinaisons dans lesquelles q arrive n fois avant que p arrive m fois. Soit donc $\nu = n + \lambda$; j'observe, cela posé, que ces combinaisons sont 1.° celles dans lesquelles p étant arrivé $m - 1$ fois, q est arrivé précisément n fois; 2.° à celles dans lesquelles p étant arrivé $m - 2$ fois, q est arrivé $n + 1$ fois; 3.° à celles dans lesquelles p étant arrivé $m - 3$ fois, q est arrivé $n + 2$ fois, &c. & ainsi de suite jusqu'à la combinaison dans laquelle p étant arrivé $m - \lambda - 1$ fois, q est arrivé $n + \lambda$ fois, si cependant λ n'excède pas $m - 1$; car autrement, il faudroit

s'arrêter à la combinaison dans laquelle p n'arrive point du tout; présentement le nombre des cas dans lesquels sur $m+n-1$ coups, p arrivera $m-1$, & q, n fois est, comme l'on sait, $\frac{\Delta(m+n-1)}{\Delta(n).\Delta(m-1)}$; mais comme dans le terme $H.p^{m+\mu}.q^{n+\lambda}.r^{i-2-\mu-\lambda}$, p arrive $m+\mu$ fois, & q $n+\lambda$; il faut multiplier $\frac{\Delta(m+n-1)}{\Delta(n).\Delta(m-1)}$ par le nombre des combinaisons dans lesquelles p arrivant $\mu+1$ fois, q arrive λ fois; or le nombre de ces combinaisons est $\frac{\Delta.(\mu+\lambda+1)}{\Delta.(\mu+1).\Delta(\lambda)}$; donc on aura $\frac{\Delta(m+n-1).\Delta.(\mu+\lambda+1)}{\Delta(n).\Delta.(\lambda).\Delta(m-1)\Delta(\mu+1)}$, pour le nombre des combinaisons dans lesquelles q est arrivé n fois, lorsque p n'est encore arrivé que $m-1$ fois; on trouvera pareillement $\frac{\Delta(m+n-1).\Delta(\mu+\lambda+1)}{\Delta(n+1).\Delta(\lambda-1).\Delta(m-2).\Delta(\mu+2)}$ pour le nombre des cas dans lesquels q est arrivé $n+1$ fois, lorsque p n'est encore arrivé que $m-2$ fois, & ainsi de suite; soit donc

$$Q_{\mu+\lambda} = \left[1+\frac{\lambda.(m-1)}{(n-1).(\mu+2)}+\frac{\lambda.(\lambda-1).(m-1).(m-2)}{(n+1).(n+2).(\mu+2).(\mu+3)}+\&c.\right] \times \frac{\nabla(m+n-1).\nabla(\mu+\lambda)}{\nabla(n).\nabla(m-1)\nabla(\mu+1)\nabla(\lambda)} \times p^{m+\mu}.q^{n+\lambda}.r^{i-2-\mu-\lambda};$$

que l'on désigne par $(Q_{\mu+\lambda})$ la somme de tous les termes que l'on peut former, en donnant à μ & à λ, dans $Q_{\mu+\lambda}$, toutes les valeurs possibles en nombres entiers & positifs depuis zéro, de manière cependant que $\mu+\lambda$ n'excède jamais $i-2$; que l'on exprime ensuite par $(R_{\mu+\lambda})$ ce que devient $(Q_{\mu+\lambda})$, lorsqu'on y change q en r, n en i, & réciproquement; cela posé, la probabilité de A pour gagner, sera

$$\frac{1}{(p+q+r)^{m+n+i-2}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} p^{m+n+i-2} + \frac{m+n+i-2}{1}.p^{m+n+i-3}.(q+r) + \&c. \\ \quad + \frac{(m+n+i-2)\ldots(m-1)}{1.2.3\ldots(n-2)}.p^m.(q+r)^{n+i-2} \\ - (Q_{\mu+\lambda}) - (R_{\mu+\lambda}). \end{array} \right.$$

La même méthode a également lieu, quel que soit le nombre des joueurs.

Page 171, ligne 3, au lieu de $-\frac{bb - cc}{2aa}$. cof. 2ϖ; *lisez* $+\frac{bb - cc}{2aa}$. cof. 2ϖ.

Page 201, article 52 à la fin, ajoutez: On peut consulter aussi la seconde partie des Mémoires de l'Académie pour l'*année 1772*, on y trouvera toute la théorie du mouvement des Planètes, discutée par une Méthode d'approximation entièrement nouvelle.

PRÉFACE.

PRÉFACE.

Les Mémoires envoyés par les Savans qui ne ſont pas Membres de l'Académie, demeuroient dépoſés dans ſes Regiſtres, après avoir été examinés par elle: ſeulement lorſqu'ils contenoient ou des découvertes ou des vues nouvelles, le Secrétaire de l'Académie en faiſoit mention dans l'Hiſtoire.

M. de Fouchy a propoſé, il y a vingt-cinq ans, de faire imprimer la collection de ces Mémoires au nom de l'Académie. Le premier Volume a paru en 1750, & le ſixième, l'année dernière. Rien n'étoit plus propre à exciter l'émulation des Savans, que l'eſpérance de voir leurs Ouvrages publiés par l'ordre d'une Compagnie juſtement reſpectée pour la ſageſſe & l'équité de ſes jugemens. Auſſi le nombre des Mémoires envoyés à l'Académie eſt-il augmenté au point qu'elle peut eſpérer de publier un Volume chaque année; & par-là de faire jouir plus tôt, & les Auteurs de la gloire que méritent leurs travaux, & le Public des lumières ou de l'utilité qu'il peut en retirer. Le Volume qui paroît maintenant eſt pour l'année 1773.

L'Académie a décidé que le Volume de chaque année commenceroit par les Pièces à qui le Prix de l'année ſuivante auroit été donné. Ainſi ce Volume de 1773, contiendra la pièce couronnée en 1774 pour le Prix d'Aſtronomie-phyſique, & le Mémoire auquel a été donné un Prix extraordinaire ſur la meilleure manière de faire le *Flint-glaſſ.*

Comme ces Pièces traitent de queſtions ou très-importantes pour le progrès des Sciences, ou d'une

grande utilité : Comme ces queſtions excitent la curioſité des Savans de l'Europe entière, ou ſont même l'objet de leurs travaux, & que les Ouvrages couronnés ſoumis par les plus illuſtres Savans de l'Europe au jugement d'une Académie dont ils ambitionnent le ſuffrage, ſont preſque toujours d'excellens traités, & ont ſouvent été des chefs-d'œuvres; l'Académie ſe voyoit avec peine forcée d'en retarder la publication juſqu'au moment où elle pouvoit en former un Volume.

PRIX D'ASTRONOMIE-PHYSIQUE.

LE ſujet du Prix de l'année 1774, étoit d'*examiner ſi l'on pourroit expliquer l'équation ſéculaire de la Lune, ſoit par les perturbations qu'excite dans le mouvement de cette Planète l'attraction de tous les corps céleſtes, ſoit par l'effet qui peut réſulter de la non-ſphéricité de la Terre & de la Lune.*

Page 1. M. de la Grange, Auteur de la pièce couronnée, n'a pas cru qu'il y eût rien à ajouter aux recherches de M.rs d'Alembert & Euler, ſur l'altération que l'action du Soleil & des Planètes peut cauſer dans le mouvement de la Lune, & il ſe contente de conclure avec eux que cette action ne produit point d'accélération dans le moyen mouvement. Il examine enſuite l'effet qui peut réſulter de la non-ſphéricité des deux Planètes, & il trouve encore qu'il n'en peut réſulter d'accélération du moyen mouvement.

On ſait que cette accélération, ſi elle étoit réelle, produiroit, dans la formule qui exprime le moyen mouvement un terme proportionnel au quarré des temps, ou en général, à une puiſſance des temps; mais cette accélération peut n'être qu'apparente, & alors on doit

avoir dans cette même valeur un terme exprimé en ſinus, qui ne diffère d'un terme proportionnel au quarré des temps qu'après un très-grand nombre de révolutions.

M. de la Grange a donc examiné ſi dans les termes que la non-ſphéricité de la Lune & de la Terre introduit dans l'expreſſion des forces qui agiſſent ſur la Lune, il n'y en avoit point qui pût produire de ces formules en ſinus, & expliquer par-là une accélération apparente dans le moyen mouvement: il n'en a trouvé aucun.

Ces réſultats ont engagé M. de la Grange à examiner les obſervations d'après leſquelles on avoit établi cette accélération apparente, & il conclud de cet examen que l'on ne parvient point à accorder d'une manière ſatisfaiſante les obſervations anciennes & les modernes, en ſuppoſant dans les formules qui donnent le mouvement de la Lune, un terme qui donne, ſoit une accélération réelle, ſoit une accélération apparente dans le moyen mouvement.

Il réſulte donc des recherches de M. de la Grange; 1.° que l'hypothèſe d'une accélération réelle ou apparente dans le mouvement moyen de la Lune, n'eſt pas néceſſaire pour concilier les obſervations anciennes & modernes, qu'elle ne peut même y ſervir: 2.° Que la non-ſphéricité de la Terre & de la Lune ne donne dans les équations de l'orbite de cette dernière Planète aucun terme dont on puiſſe conclure l'exiſtence de cette accélération.

Si les Planètes ſe meuvent dans un fluide réſiſtant, il en doit naître une accélération réelle dans le moyen mouvement, ſi cette accélération eſt telle que les obſervations l'ont fait ſoupçonner dans le mouvement de la Lune, elle ſera cent trois fois plus petite, & par conſéquent preſque inſenſible pour la Terre. Des termes

produits par l'action de Jupiter dans les équations de l'orbite de Saturne suffisent pour expliquer comment cette Planète pourroit avoir une retardation apparente dans son moyen mouvement, malgré l'accélération réelle causée par la résistance de l'éther (voyez *la Dissertation de M. l'Abbé Bossut, qui a remporté le Prix en 1762).* Ainsi, dans le cas où les observations forceroient à supposer à la Lune une équation séculaire, la résistance de l'éther en donneroit une explication suffisante, & qui s'accorderoit avec la théorie des autres Planètes.

Page 163. M. de la Place a inséré dans ce Volume un Mémoire où il traite les mêmes questions. Il convient, avec M. de la Grange, que la théorie de la gravitation ne donne point d'équation du moyen mouvement aussi grande que les observations semblent le demander. Il en cherche donc une autre cause, & comme la résistance de l'éther lui paroît insuffisante, il imagine de faire un léger changement à la loi de la gravitation établie par Newton, en supposant que cette force n'agit pas également sur un corps en mouvement & sur un corps en repos, & qu'elle dépend non-seulement des distances des corps & de leurs masses, mais encore de leurs vîtesses.

M. de la Place prétend aussi que la supposition d'une équation du moyen mouvement peut concilier les anciennes observations de la Lune avec les modernes.

Ces questions si intéressantes par leur utilité, par leur difficulté & par l'honneur qu'elles font à l'esprit humain, ont souvent produit de telles discussions, qui bien loin d'avoir des Juges, trouvent à peine dans l'Europe entière, un petit nombre de spectateurs.

Finissons par une observation.

Si l'on s'en tient à la théorie seule, on n'a point dans les méthodes d'approximation connues jusqu'ici, de

moyen ſûr de connoître ſi une formule doit contenir une quantité toujours croiſſante, ou une quantité en ſinus qui le repréſente tant qu'elle n'excède pas certaines limites.

Ainſi, comme l'on n'a jamais d'obſervations que pour un temps fini, tout ce qui peut réſulter de la comparaiſon des obſervations avec la théorie, c'eſt de ſavoir laquelle des deux hypothèſes repréſente les obſervations le plus exactement, & avec un moindre nombre de termes.

PRIX EXTRAORDINAIRE.

NEWTON, à qui on doit la découverte de la différente réfrangibilité des rayons de la lumière, ſoupçonna que cette différence n'étoit pas la même dans les verres d'une denſité plus ou moins grande, & qu'il devoit en réſulter un moyen de corriger l'aberration de réfrangibilité; mais quelques expériences que Newton n'eut pas le temps de ſuivre, le trompèrent & lui firent abandonner cette vue. M. Euler a rectifié & perfectionné les idées de Newton ſur cet objet; il propoſa, dans les Mémoires de Berlin, *année 1743*, des moyens de détruire l'aberration de réfrangibilité, en formant des objectifs composés de matières différemment réfringentes. Page 62.

M. Dollond ſe propoſa de défendre Newton contre M. Euler, mais il ſe vit bientôt obligé d'adopter le ſentiment du Savant qu'il avoit voulu combattre; & ce fut en ſuivant ſes traces qu'il parvint à trouver ces objectifs formés de deux verres, qui ont tant contribué à la réputation de cet Opticien célèbre.

Les lunettes achromatiques ont tant d'avantages ſur les autres téleſcopes pour les obſervations aſtronomiques, que les Géomètres & les Aſtronomes ont tourné leurs

vues vers la perfection de ces Lunettes ; & même les Gouvernemens n'ont pu voir avec indifférence des instrumens qui promettoient à la Navigation de si grands avantages.

La perfection de ces lunettes dépend de deux causes étrangères l'une à l'autre, des dimensions du verre & de sa bonté intrinsèque. Deux illustres Géomètres, M.rs Euler & d'Alembert ont publié sur le premier objet des Ouvrages étendus. Plusieurs autres Mathématiciens s'en sont occupés ; & pour que cette partie de la construction des lunettes soit portée au plus haut point, il suffit du zèle des Savans pour le progrès des Sciences ; ils n'ont besoin d'aucun encouragement. Il n'en est pas de même des moyens de perfectionner le verre ; les essais en ce genre sont très-coûteux, il faut même les faire en grand, parce que c'est sur-tout de grands objectifs qu'on a besoin ; les Astronomes sont peu riches, & il n'y a en France qu'un petit nombre d'Amateurs de l'Astronomie ; par conséquent le débit de ces objectifs ne produiroit que des avantages très-peu considérables. Aussi quelqu'imparfait que soit le verre pesant d'Angleterre, qu'on nomme *flint-glass*, nous sommes encore obligés d'y avoir recours pour nos lunettes.

Le Gouvernement a cru devoir encourager en France la fabrication de cette espèce de verre, & en conséquence, il a proposé un Prix pour celui qui, au jugement de l'Académie des Sciences, auroit fait ou enseigneroit à faire le meilleur *flint-glass*, c'est-à-dire, le verre le plus pesant, le plus exempt de bulles ou de points, qui auroit le moins de fils, qui n'offriroit point ce coup-d'œil gélatineux qu'a souvent le verre d'Angleterre. L'Académie après avoir remis le Prix plusieurs fois, a enfin couronné l'Ouvrage inséré dans ce Volume.

L'Auteur n'y donne point une méthode raiſonnée de faire du *flint-glaſſ* exempt de défauts, ni une théorie ſur les cauſes de ces défauts, & ſur les moyens de les éviter. Il ſe borne à propoſer quelques mélanges de ſable, de minium & de fondans qui lui ont donné de bon *flint-glaſſ*, & à y joindre des remarques ſur la manière de fabriquer le verre, qu'il a puiſées dans une longue pratique de l'art de la Verrerie. L'Académie a cru que, vu l'utilité & la difficulté de la queſtion propoſée, elle devoit encourager des efforts & des eſſais qui donnent au moins des eſpérances.

CE Volume contient:

Un Mémoire de Minéralogie.
Un de Botanique.
Quatre d'Anatomie.
Trois ſur l'Hiſtoire naturelle des Animaux.
Deux d'Hiſtoire Météorologique.
Deux de Chimie.
Cinq d'Analyſe.
Un de Mécanique rationnelle.
Un d'Hydroſtatique.
Trois d'Obſervations aſtronomiques.
Deux d'Aſtronomie théorique.
Et un ſur les Arts.

MINÉRALOGIE.

Voyage ſouterrein. Par M. Marcorelle.

CE Mémoire contient la deſcription de quelques grottes du Rouſſillon, du pays de Foix & du Languedoc. Page 565.

Elles se trouvent dans des montagnes calcaires, & ne renferment en général que des stalactites ou des concrétions de la même nature.

BOTANIQUE.

Sur le Cocos de l'île Praslin.

Page 263. M. SONNERAT donne dans ce Mémoire la description de l'arbre qui produit le Cocos de mer. Comme on avoit ignoré jusqu'ici l'origine de ce fruit que la mer portoit aux îles Maldives, les habitans de ces îles lui supposoient une origine & des propriétés merveilleuses. M. Sonnerat a trouvé aux îles Praslin l'arbre à qui l'on doit ce Cocos qui perdra toute sa réputation, du moment où il sera connu ; & c'est un sort bien commun dans la Société, comme dans la Nature.

ANATOMIE.

Sur le Cerveau & les Nerfs de la dixième paire.

Pages 553 & 593. LES deux Mémoires de M. Sabatier ont pour objet de rectifier & de compléter sur quelques points les descriptions que les Anatomistes ont données, du cerveau & des nerfs.

Il prouve, par exemple, que les nerfs de la dixième paire naissent de la moelle épinière, & que dans la plupart des sujets, ils sont semblables aux autres nerfs qui ont la même origine, à quelques caractères près, qui les rapprochent des nerfs qui naissent du cerveau; mais cependant dans quelques sujets où ces nerfs conservent toujours

toujours leur même origine, ils ont avec ceux qui viennent du cerveau, une ressemblance beaucoup plus marquée.

Observations sur une extrémité dont les muscles ont été changés en tissu graisseux, sans aucune altération dans la forme extérieure.

Ce n'est ici qu'une simple observation d'un phénomène déja connu; mais celle-ci est précieuse en ce que M. Vicq-d'Azir a pu y observer par degrés la métamorphose des fibres musculaires en membranes cellulaires. Page 301.

Observation d'une Tête exostosée. Par M. Ripert.

Les os de cette tête pesoient quatre fois plus que ceux d'une tête ordinaire. Il suffit de jeter les yeux sur le dessin qui la représente, pour voir que la forme n'en étoit pas moins monstrueuse que la masse. Cependant le sujet de cette observation est mort à quarante-cinq ans, d'une fièvre putride, sans jamais s'être plaint d'aucune douleur dans la tête ou dans la mâchoire, & sans que cette maladie extraordinaire qui l'attaqua dès l'âge de douze ans, ait paru nuire aux progrès de son esprit. Page 336.

HISTOIRE NATURELLE DES ANIMAUX.

Sur les Os des Oiseaux.

M. Camper développe dans ce Mémoire un phénomène qu'il a découvert le premier; c'est que les os des oiseaux qu'on savoit déjà être vides de moelle, Page 328.

& même contenir de l'air, reçoivent cet air du poumon, de manière qu'il y a une circulation libre entre ce viſcère & les cavités des os. Dans les Oiſeaux de proie, tous les os du corps, des ailes & même des cuiſſes, ont de ces cavités. Dans les Oiſeaux qui volent moins haut, ceux des cuiſſes ont de la moelle. Une remarque qui ne nous paroît pas indigne d'être placée ici, c'eſt que le trou par lequel la cavité de l'os du bras du poulet ou du dindon communique avec l'intérieur du poumon, eſt très-ſenſible à la vue; que ces animaux étant une nourriture très-commune, il n'y avoit preſque perſonne qui n'eût remarqué ce trou, & que cependant juſqu'à M. Camper, perſonne n'avoit penſé qu'il pût ſervir à porter dans les os, l'air qu'on ſavoit y être depuis long-temps. C'eſt ainſi que le génie d'obſervation conſiſte à voir ce que la Nature expoſoit inutilement depuis long-temps aux yeux de tous les hommes.

Sur l'Anatomie des Poiſſons.

Pages 18 & 233.

Dans ces deux Mémoires, M. Vicq-d'Azir ſe propoſe principalement de donner une deſcription générale des organes communs à chacun des trois ordres dans leſquels il croit pouvoir comprendre toutes les eſpèces de poiſſons. Comme pluſieurs des parties de ces poiſſons ont déjà été bien décrites par d'autres Anatomiſtes, l'auteur ne s'arrête que ſur les parties qui ont été oubliées. M. Vicq-d'Azir entre dans des détails curieux ſur la ſtructure & les uſages de cette veſſie pleine d'air, que l'on trouve dans un grand nombre d'eſpèces de poiſſons. Il croit qu'elle ſe remplit de l'air qui ſe dégage des alimens, que cet air chargé de ce qu'ils ont de plus ſubtil, va de l'eſtomac dans cette veſſie, & qu'enſuite repompé par les pores

abſorbans, il paſſe dans les vaiſſeaux, & ſe combine avec les liqueurs qu'ils contiennent. Au reſte, cette explication n'eſt qu'une conjecture que l'auteur ſe propoſe de vérifier. M. Vicq-d'Azir a obſervé que l'eſtomac des poiſſons cartilagineux étoit ſouvent plein de cruſtacés; que ceux qui avoient été avalés les derniers, étoient tous entiers, tandis que ceux qui ſe trouvoient au fond de l'eſtomac, avoient été ramollis & changés en une eſpèce de pulpe. Cette obſervation paroît montrer qu'il exiſte dans l'eſtomac de ces poiſſons une liqueur propre à diſſoudre les alimens. On doit regretter qu'aucun Phyſicien n'ait tenté de répéter les expériences curieuſes que M. de Reaumur a faites ſur un fluide ſemblable, dont il a prouvé l'exiſtence dans les oiſeaux de proie, & de nous éclairer ſur un phénomène de l'économie animale, dont une connoiſſance plus approfondie pourroit perfectionner l'art de guérir, & peut-être nous dévoiler bien des myſtères.

MÉTÉOROLOGIE.

Mémoire ſur la Météorologie.

DANS ce Mémoire, le P. Cotte a réduit en Tables des Obſervations météorologiques faites depuis l'année 1763 juſqu'en 1772, par M. Meſſier, avec toute l'exactitude & la préciſion qu'on peut attendre de ce célèbre Obervateur. Page 427.

Sur la cauſe du Froid en Canada.

On a ſouvent demandé pourquoi le froid eſt plus grand en Canada qu'en Europe, à la même latitude. Après avoir combattu les anciennes ſolutions de ce Page 541.

problème, M. de Caire en propoſe une nouvelle; c'eſt le vent de nord-oueſt ſi conſtant dans ces contrées, qu'il regarde comme la cauſe de ce phénomène.

CHIMIE.

Sur l'Air fixe.

Page 1. Les expériences que M. Bucquet rapporte dans ce Mémoire, prouvent que le fluide élaſtique qui ſe dégage des diſſolutions de métaux dans les acides, n'eſt pas le même que celui que produiſent les combinaiſons des mêmes acides avec la craie & les ſubſtances alkalines. On trouve à peu-près ici les mêmes réſultats que dans M. Prieſlei, mais lorſque M. Bucquet a fait ſes expériences, il ne connoiſſoit pas celles du ſavant Anglois. Faut-il conclure que les fluides qui ſe dégagent de différens corps & par différentes opérations, ſont autant de fluides qui diffèrent eſſentiellement de celui de l'atmoſphère, ou dont celui-ci n'eſt qu'un mélange? ou plutôt n'eſt-ce qu'un ſeul & même fluide qui tient en diſſolution, dans chaque circonſtance, quelque ſubſtance que les corps dont il s'échappe, lui ont fournie? C'eſt aux Chimiſtes, ou plutôt c'eſt à l'expérience, & ſur-tout au temps, à prononcer.

Analyſe de la Bile.

Page 610. La bile, ſelon M. Bordenave, eſt une liqueur ſavonneuſe & ordinairement alkaline; ſa comparaiſon varie beaucoup dans les différens ſujets, à raiſon de leur ſanté & de leur régime.

ANALYSE

Sur les Différences finies & leur application au Calcul des Probabilités.

Les équations aux différences finies partielles, dont s'occupe particulièrement M. de la Place, font celles où les indéterminées font fuppofées avoir varié dans plufieurs hypothèfes différentes. On peut regarder cette matière comme abfolument neuve, du moins fous ce titre; car on doit compter pour rien un Effai très-court, inféré dans les Mémoires de l'Académie pour 1772. Page 37.

Les réflexions de M. de la Place, fur les probabilités, intéreffent les Philofophes, autant que fes profondes recherches d'Analyfe font dignes d'occuper les Géomètres.

Il y a encore un Mémoire de M. de la Place, qui appartient à l'Analyfe pure : il renferme de nouvelles démonftrations de quelques Théorèmes, inférés par M. de la Grange dans les Mémoires de Berlin, *année 1772*. Page 534.

Sur les Fonctions arbitraires des Équations aux Différences partielles, & fur un tour de Carte.

Des trois Mémoires de M. Monge, deux ont pour objet les fonctions arbitraires qui fe trouvent dans les intégrales des équations aux différences partielles. Dans le premier, il enfeigne à les conftruire. Dans le fecond, il les réduit à la folution des équations aux différences finies. L'idée de cette réduction fe trouve dans une lettre à M. d'Alembert, imprimée en 1768 ; & l'Auteur de cette lettre l'a développée depuis avec beaucoup de Pages 267, 305 & 390.

détail dans un Mémoire présenté à l'Académie en 1771, & imprimé dans le Volume de la même année. Mais ce Mémoire n'étoit pas encore public, quand M. Monge a présenté le sien où les Géomètres trouveront beaucoup d'élégance & une clarté à laquelle il est rare d'atteindre dans des matières si difficiles. Dans le troisième Mémoire, M. Monge donne la théorie d'un tour de cartes. On sait que ces sortes de tours dépendent du calcul des permutations : ce calcul conduit M. Monge à des résultats très-curieux sur l'ordre constant qu'observent toutes les cartes, ou quelques-unes d'entr'elles, après plusieurs changemens dont les loix sont données. Le temps viendra où l'Analyse plus perfectionnée, mettra les Géomètres à portée de résoudre des Problèmes utiles sur les rapports de position que les corps observent entr'eux. Jusqu'ici ils n'ont pu se proposer que des questions de pure curiosité, mais qu'on ne doit point regarder comme inutiles, si elles peuvent servir aux progrès de cette espèce d'Analyse.

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Sur quelques Problèmes de Statique relatifs à l'Architecture.

Page 343. LES questions que M. Coulomb traite dans ce Mémoire sont fort importantes : elles ont pour objet la pression des terres, la force qu'il convient de donner aux revêtemens, l'équilibre des voûtes en ayant égard à la cohésion & au frottement. Dans ces questions, les corps ne sont regardés ni comme solides, ni comme fluides, mais comme composés de particules qui ont entr'elles une adhérence finie.

HYDROSTATIQUE.

Sur la Figure de la Terre.

DANS ce Mémoire, M. de la Place examine par des méthodes analytiques cette queſtion : *Trouver quelle figure un fluide homogène, & dont les particules s'attirent en raiſon inverſe du quarré des diſtances, doit avoir pour ſe maintenir en équilibre, en ſuppoſant à cette maſſe fluide un mouvement quelconque de rotation.* Page 524.

ASTRONOMIE PRATIQUE.

OBSERVATIONS

D'une oppoſition de Jupiter à Rouen, le 19 Août 1772. Par M. le Chevalier d'Angos. Page 413.

Des oppoſitions de Mars & de Saturne, à Genève, en 1773. Par M. Mallet. Page 416.

De la Comète du 1.er Avril 1771, à Saint-Lo. Par M. Dulague. Page 422.

ASTRONOMIE THÉORIQUE.

EN rendant compte de la Pièce qui a remporté le Prix d'Aſtronomie, nous avons déjà parlé du Mémoire de M. de la Place *ſur les Équations ſéculaires.*

Sur la moyenne inclinaiſon des Comètes.

M. de la Place applique ici ſes méthodes, pour le Page 503.

calcul des probabilités, à une queſtion relative au Syſtème du Monde. Il s'agit de ſavoir, combien, dans un nombre quelconque de corps, ſe mouvant chacun dans un plan, il eſt probable que l'inclinaiſon moyenne de ces plans, & le rapport entre les nombres des corps mus dans chacun de deux ſens oppoſés, ſeront contenus entre de certaines limites.

ARTS.

Sur la Théorie du Jaugeage. Par M. Dez.

Page 383. L'OBJET de ce Mémoire eſt très-important : comme il ne peut y avoir de méthode exacte de jauger parfaitement, puiſque les vaiſſeaux ſont conſtruits ſans aucune règle certaine, on n'avoit imaginé juſqu'ici d'autre moyen que de prendre une meſure approchée ; & comme elle ne l'étoit pas aſſez, d'ajouter par eſtime à cette première meſure. Il eſt inutile de faire obſerver les inconvéniens d'une méthode que le tâtonnement rendoit arbitraire. M. Dez propoſe d'y ſubſtituer une méthode d'approximation aſſez exacte pour ſe paſſer d'y rien ajouter arbitrairement. Elle a encore l'avantage de pouvoir être vérifiée, dans les cas de conteſtations, par tout homme qui a quelques connoiſſances mathématiques : ainſi l'on n'aura plus beſoin, pour faire réformer les jauges mal faites, d'avoir recours au dépotement ; moyen incommode & ruineux, auquel on ne pourroit recourir que dans les cas où les léſions ſeroient énormes.

PRIX

PRIX
DE
L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
Pour l'Année 1774.

PRIX D'ASTRONOMIE PHYSIQUE SUR L'ÉQUATION SÉCULAIRE DE LA LUNE.

Nec cum fiduciâ inveniendi, nec ſine ſpe.
Senec. Nat. quæſt. VII, 29.

Par M. DE LA GRANGE, Directeur de l'Académie royale des Sciences de Berlin, & Aſſocié-Étranger de cette Académie.

AVERTISSEMENT.

LA queſtion propoſée par l'Académie royale des Sciences pour le ſujet du Prix de l'année 1774, eſt double & renferme, à proprement parler, deux queſtions différentes.

Dans la première on demande par quel moyen on peut s'assurer qu'il ne résultera aucune erreur sensible des quantités qu'on aura négligées dans le calcul des mouvemens de la Lune.

Et dans la seconde on demande si, en ayant égard non-seulement à l'action du Soleil & de la Terre sur la Lune, mais encore, s'il est nécessaire, à l'action des autres Planètes sur ce Satellite, & même à la figure non-sphérique de la Lune & de la Terre, on peut expliquer par la seule théorie de la gravitation, pourquoi la Lune paroît avoir une équation séculaire, sans que la Terre en ait une sensible.

Le Mémoire suivant est destiné uniquement à répondre à la seconde de ces deux questions. On y verra 1.° que l'équation séculaire de la Lune ne sauroit être expliquée par la seule théorie de la gravitation, du moins en prenant cette équation telle que les Astronomes l'ont adoptée d'après feu M. Mayer; 2.° que les preuves que l'on a de l'existence de cette même équation, ne sont pas à beaucoup près aussi solides & aussi convaincantes qu'on pourroit le desirer. Je serai suffisamment récompensé de mon travail, si l'illustre Compagnie à qui j'ai l'honneur de le présenter, daigne l'honorer de quelque attention, & sur-tout s'il peut exciter d'autres plus habiles que moi à le pousser plus loin & à décider irrévocablement l'importante question de l'équation séculaire de la Lune.

Quant à la première question, j'avoue qu'après y avoir médité long temps & avec toute l'attention dont je suis capable, je n'ai rien trouvé qui pût me satisfaire, ou qu'on pût du moins ajouter à ce que M. d'Alembert a déjà dit sur ce sujet dans les derniers volumes de ses Opuscules : j'ai donc cru pouvoir me dispenser de traiter cette question, & je me flatte que l'Académie voudra bien ne pas m'en savoir mauvais gré; en récompense j'ai taché de m'étendre d'autant plus sur l'autre question, & d'entrer dans des détails astronomiques que cette illustre Compagnie n'a pas demandés, mais que j'ai cru indispensables dans la matière dont il s'agit.

(1.) QUOIQUE la théorie de la gravitation univerſelle ait juſqu'ici parfaitement rendu raiſon des inégalités périodiques qu'on obſerve dans les mouvemens des Corps céleſtes, & ſur-tout de la Lune, elle n'a cependant pas encore fourni d'explication de l'équation ſéculaire de cette Planète. M. Halley eſt le premier qui ait ſoupçonné une accélération dans le moyen mouvement de la Lune, comme on le voit par ce paſſage de la ſeconde édition des *Principes mathématiques : Et collatis quidem obſervationibus Eclipſium Babilonicis cum iis Albategnii & cum hodiernis, Halleyus noſter motum medium Lunæ cum motu diurno Terræ collatum paulatim accelerari, primus omnium, quod ſciam, deprehendit* (page 481). Mais ſoit que ce grand Aſtronome n'ait pas cru pouvoir entièrement compter ſur l'exactitude des obſervations qui lui avoient donné l'accélération de la Lune, ſoit qu'il ait regardé cette accélération comme trop peu ſenſible pour qu'on dût en tenir compte dans le calcul du lieu de cette Planète, il eſt certain qu'il n'y a eu aucun égard dans les Tables qu'il en a publiées depuis. Cependant la remarque de M. Halley n'eſt pas demeurée infructueuſe : deux ſavans Aſtronomes, M.^rs^ Dunthorne & Mayer, ayant entrepris d'examiner de nouveau ce point important de la théorie de la Lune, ont non-ſeulement reconnu l'exiſtence de l'équation ſéculaire de cette Planète, ils en ont de plus déterminé la quantité ; le premier l'a fixée à 10 ſec. pour le premier ſiècle, & le ſecond à 7 ſecondes dans ſes premières Tables, & enſuite à 9 ſecondes dans les dernières ; & comme les Tables de la Lune de M. Mayer ont été généralement adoptées par les Aſtronomes, l'accélération du mouvement de la Lune eſt maintenant regardée comme un fait dont il ſemble qu'il ne ſoit preſque pas permis de douter.

M. de la Lande a néanmoins remarqué dans ſon Aſtronomie, qu'il reſtoit encore quelque incertitude ſur les obſervations qui ont ſervi à déterminer ce nouvel élément de la théorie de la Lune, & qui ſe réduiſent à deux éclipſes de Soleil obſervées en 977 & 978 près du Caire, par Ibn

Jonis, Astronome du Calife d'Égypte Aziz; comme ces observations sont les seules que nous ayons pour servir de terme de comparaison entre les anciennes observations des Babyloniens & celles de ces derniers temps, il faut avouer que si on étoit obligé de les rejeter, on perdroit les principales & même les uniques preuves décisives que l'on ait de l'accélération du moyen mouvement de la Lune: car je ne puis croire, avec M. Mayer, que cette question puisse se décider par la simple comparaison des observations du siècle passé avec celles de ce siècle; les variations qui peuvent se trouver dans le mouvement moyen de la Lune, dans le court espace d'un siècle, étant nécessairement trop petites pour pouvoir être attribuées à d'autres causes qu'aux erreurs des observations & à l'incertitude qui a encore lieu dans quelques-unes des équations de la Lune.

Quoi qu'il en soit, en attendant que le temps & les recherches des Astronomes nous apportent de nouvelles lumières, la théorie est, ce me semble, le seul moyen que nous ayons pour décider un point d'Astronomie si important. Il s'agit donc d'examiner le plus soigneusement qu'il est possible, si la gravitation universelle peut produire dans le mouvement moyen de la Lune une altération sensible & conforme aux observations; c'est la question que je me propose de traiter dans ces Recherches.

(2.) Pour que le moyen mouvement de la Lune soit assujetti à une altération croissante comme le carré du temps, ainsi qu'on le suppose dans les Tables, il faut que la formule générale du lieu vrai de cette Planète renferme, outre le terme Z qui représente le mouvement moyen, encore un terme de la forme iZ^2, i étant un coëfficient positif & très-petit; ce dernier terme représentera donc l'équation séculaire qui sera toujours additive au mouvement moyen avant & après l'époque qu'on aura fixée pour le commencement de cette équation, & qui dans les Tables de Mayer tombe au commencement de ce siècle. Donc nommant π le rapport de la circonférence au rayon, on aura $i\pi \times 360^d$ pour la

valeur de l'équation dont il s'agit au bout d'une révolution de la Lune; & nommant ensuite ν le rapport du mouvement moyen de la Lune à celui du Soleil, on aura $i\pi\nu^2 \times 360^d$ pour la quantité de la même équation au bout de la première année après l'époque; enfin multipliant cette quantité par 10000, on aura la quantité de l'équation pour le premier siècle, laquelle étant, suivant M. Mayer, de 9 secondes, on aura cette équation

$$10000\, i\pi\nu^2 \times 360^d = 9'',$$

c'est-à-dire, en réduisant aussi les degrés en secondes,

$$10000 \times 360 \times 3600 \times i\pi\nu^2 = 9;$$

d'où l'on tire

$$i = \frac{9}{10000 \times 360 \times 3600 \times \pi\nu^2};$$

or on a à très-peu-près $\pi = 6$ & $\nu^2 = 178$; donc on aura environ

$$i = \frac{1}{1537920000000}.$$

(3.) Telle doit donc être la valeur du coëfficient i de l'équation séculaire, dans l'hypothèse que cette équation soit réelle & croisse constamment comme le carré du temps; mais comme il peut se faire aussi qu'elle ne soit qu'apparente, & que ce ne soit dans le fond qu'une équation périodique, mais dont la période soit très-longue, il est bon de voir en particulier quelle devroit être sa valeur dans ce cas: car quoique l'effet de l'équation séculaire puisse être sensiblement le même dans l'un & dans l'autre cas, pendant un intervalle de temps peu considérable, il deviendra cependant fort différent au bout d'un grand espace de temps; de sorte que si cette équation au lieu d'être réelle, n'est qu'apparente, elle devra nécessairement avoir une toute autre valeur que celle que nous venons de trouver, pour pouvoir répondre à la fois aux observations Babyloniennes & Arabes qui ont servi de données dans la détermination de cet élément. Mais pour cela il est nécessaire de commencer par examiner en peu de mots comment on

peut accorder ces obſervations par l'introduction d'une équation ſéculaire réelle; enſuite nous verrons ce qui doit en réſulter dans l'hypothèſe que l'équation ſéculaire ne ſoit qu'apparente.

(4.) Comme les obſervations les plus diſtantes entr'elles ſont celles qui peuvent fournir les déterminations les plus exactes des mouvemens moyens des Planètes, on a employé dans la détermination de celui de la Lune, la plus ancienne Éclipſe dont la mémoire nous ait été conſervée, & qui eſt celle que Ptolémée rapporte avoir été obſervée à Babylone le 19 Mars 720 avant J. C. *(Almageſte, liv. IV, ch. VI).* M. Caſſini ayant comparé cette obſervation avec celle d'une Éclipſe de l'année 1717, où la Lune s'eſt trouvée à-peu-près dans les mêmes circonſtances, a trouvé le mouvement ſéculaire de la Lune de $10^s\ 7^d\ 49'\ 52''$: or ſi le mouvement moyen de la Lune étoit tout-à-fait uniforme, il eſt clair qu'on devroit toujours trouver le même réſultat, en comparant enſemble d'autres obſervations; mais on a reconnu dans ces derniers temps que les obſervations Arabes dont on a parlé ci-deſſus, comparées avec les obſervations de ce ſiècle, donnent environ $2'\ 36''\frac{1}{2}$ de plus pour le mouvement ſéculaire de la Lune. M. de la Lande, dans les Mémoires de l'Académie, *ann. 1757,* trouve qu'en employant le mouvement moyen qui réſulte des obſervations Arabes, la longitude de la Lune dans l'Éclipſe de 720 avant J. C. eſt moindre de $1^d\ 27'$ que l'obſervation ne l'a donnée: or comme M. de la Lande ſuppoſe le milieu de cette Éclipſe 47 minutes plus tôt que M. Caſſini, il s'enſuit qu'il faut ôter de $1^d\ 27'$ le mouvement relatif de la Lune au Soleil pendant 47 minutes, lequel eſt de $23'\ 52''$; ainſi on aura $1^d\ 3'\ 8''$, qui étant partagés en $24\frac{1}{5}$, nombre des ſiècles écoulés entre l'obſervation dont il s'agit & 1700, donne $2'\ 36''\frac{1}{2}$ dont le mouvement moyen ſéculaire eſt plus grand, parce que, comme en remontant on avance contre l'ordre des ſignes, une longitude moindre indique un plus grand eſpace parcouru. C'eſt ce qui a engagé les Aſtronomes à appliquer au mouvement moyen une équation ſéculaire propre à ſauver cette différence.

(5.) En effet, ſoit x le mouvement ſéculaire moyen dont la marche eſt uniforme, & y l'équation ſéculaire que nous ſuppoſerons d'abord proportionnelle au carré du temps; & prenant le commencement de ce ſiècle pour époque, on aura après m ſiècles, le mouvement moyen $= mx + m^2y$; par conſéquent, en faiſant m négatif, on aura pour m ſiècles comptés en arrière, le mouvement moyen $= - mx + m^2y$. Soit maintenant α le mouvement ſéculaire moyen trouvé par M. Caſſini d'après l'Éclipſe de 720 avant J. C. & $\alpha + \beta$ le mouvement ſéculaire moyen trouvé d'après les obſervations Arabes de 977 & 978; & comme entre les années 720 avant J. C. & 1700, il s'eſt écoulé $24\frac{1}{5}$ ſiècles, & entre les années 978 & 1700 il s'eſt écoulé environ $7\frac{1}{5}$ ſiècles, on aura $-(24\frac{1}{5})\alpha$ & $-(7\frac{1}{5})(\alpha + \beta)$ pour les mouvemens moyens qui ſe rapportent aux années 720 avant J. C. & 978: donc ſi on veut que la formule $- mx + m^2y$, ſatisfaſſe à la fois aux obſervations de ces années, il n'y aura qu'à ſuppoſer ſucceſſivement $m = 24\frac{1}{5}$, $= 7\frac{1}{5}$, & former enſuite les équations

$$- (24\tfrac{1}{5})x + (24\tfrac{1}{5}y)^2 = - (24\tfrac{1}{5})\alpha,$$

$$- (7\tfrac{1}{5})x + (7\tfrac{1}{5}y)^2 = - (7\tfrac{1}{5})(\alpha + \beta),$$

c'eſt-à-dire,

$$x - (24\tfrac{1}{5})y = \alpha, \quad x - (7\tfrac{1}{5})y = \alpha + \beta;$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{\beta}{17}, \quad x = \alpha + (24\tfrac{1}{5})y = \alpha + (24\tfrac{1}{5})\frac{\beta}{17}.$$

Or on a trouvé $\alpha = 10^f\, 7^d\, 49'\, 52''$ & $\beta = 2'\, 36''\frac{1}{2}$; donc on aura $y = 9'',2$; & de-là $x = 10^f 7^d\, 53'\, 34'',64$; ce qui s'accorde à très-peu-près avec les élémens que M. Mayer a employés dans ſes dernières Tables, où il fait le mouvement ſéculaire moyen de $10^f\, 7^d\, 53'\, 35''$, & l'équation ſéculaire de 9 ſecondes pour le premier ſiècle, à compter depuis 1700.

(6.) Suppoſons maintenant que l'équation ſéculaire ne ſoit pas conſtamment proportionnelle au carré du temps, mais

qu'elle dépende du finus d'un angle qui varie peu, en forte qu'elle ne fuive la loi du carré que pendant un certain efpace de temps, foit $A + \mu Z$ cet angle, Z étant comme ci-deffus, le mouvement moyen de la Lune, & μ étant un coëfficient très-petit, de manière que l'angle μZ demeure encore très-petit vis-à-vis de l'angle fini; & comptant A au bout d'un grand nombre de révolutions de la Lune, on aura pendant cet intervalle de temps $\text{fin.}\,(A + \mu Z) = \text{fin.}\,A + \mu Z \,\text{cof.}\, A - \frac{\mu^2 Z^2}{2} \text{fin.}\, A$ à très-peu près; d'où l'on tire $Z^2 = \frac{2\, Z \,\text{cof.}\, A}{\mu \,\text{fin.}\, A} + \frac{2\, [\text{fin.}\, A - \text{fin.}\,(A + \mu Z)]}{\mu^2 \,\text{fin.}\, A}$; de forte que l'équation féculaire apparente $i Z^2$, fera véritablement repréfentée par la formule

$$\frac{2\, i}{\mu \,\text{fin.}\, A} \left[Z \,\text{cof.}\, A + \frac{\text{fin.}\, A - \text{fin.}\,(A + \mu Z)}{\mu}\right]$$

& par conféquent s'éloignera à la longue, de la loi du carré du temps.

(7.) Voyons donc quelle doit être dans cette hypothèfe, la valeur du coëfficient i, pour fatisfaire aux mêmes données de *l'article 4.* Soit θ la quantité de l'angle μZ au bout d'un fiècle, on aura au bout de m fiècles $\mu = m\theta$; donc $Z = \frac{m\theta}{\mu}$; ainfi l'équation féculaire fera, pour m fiècles, $\frac{2\, i}{\mu^2 \,\text{fin.}\, A} [m\theta \,\text{cof.}\, A + \text{fin.}\, A - \text{fin.}\,(A + m\theta)]$; lorfque $m = 1$, cette quantité devient (à caufe de θ très-petit) $\frac{i\theta^2}{\mu^2}$, qui fera donc la quantité de l'équation féculaire pour le premier fiècle. Nommons donc comme ci-deffus, y cette valeur de l'équation féculaire, & x le mouvement féculaire moyen, on aura après m fiècles, le mouvement moyen $= m x + \frac{2\, y}{\theta^2 \,\text{fin.}\, A} [m\theta \,\text{cof.}\, A + \text{fin.}\, A - \text{fin.}\,(A + m\theta)]$.

Faifant donc fucceffivement $m = -24\frac{1}{5}$ & $= -7\frac{1}{5}$, pour avoir les mouvemens moyens qui répondent aux années

720

720 avant J. C. & 978, on formera ces deux équations

$$-(24\tfrac{1}{5})x + \frac{2y}{\theta^2\,\text{fin.}\,A}\left[-(24\tfrac{1}{5})\,\theta\,\text{cof.}\,A + \text{fin.}\,A - \text{fin.}\,(A - 24\tfrac{1}{5}\theta)\right]$$
$$= -24\tfrac{1}{5}\,\alpha,$$
$$-(7\tfrac{1}{5})x + \frac{2y}{\theta^2\,\text{fin.}\,A}\left[-(7\tfrac{1}{5})\,\theta\,\text{cof.}\,A + \text{fin.}\,A - \text{fin.}\,(A - 7\tfrac{1}{5}\theta)\right]$$
$$= -(7\tfrac{1}{5})\,(\alpha + \beta);$$

c'eſt-à-dire, en changeant les ſignes,

$$x - \frac{2y}{\theta}\left(-\text{cot.}\,A + \frac{1}{24\frac{1}{5}\theta}\left(1 - \frac{\text{fin.}\,(A - 24\frac{1}{5}\theta)}{\text{fin.}\,A}\right)\right] = \alpha,$$
$$x - \frac{2y}{\theta}\left(-\text{cot.}\,A + \frac{1}{7\frac{1}{5}\theta}\left(1 - \frac{\text{fin.}\,(A - 7\frac{1}{5}\theta)}{\text{fin.}\,A}\right)\right] = \alpha + \beta;$$

d'où l'on tirera aiſément x & y quand on connoîtra A & θ; enſuite on aura comme dans l'*art. 2*, $10000\,i\,\pi r^2 \times 360^d = y$; d'où l'on tirera $i = \frac{y}{10000\,\pi r^2 \times 360^d}$.

(8.) Suppoſons, par exemple, que l'angle $A + \mu Z$ ſoit égal au double de la longitude de l'apogée du Soleil (on verra plus bas aux *articles 30 & ſuiv.* pourquoi nous choiſiſſons cette hypothèſe): on aura donc, en prenant toujours le commencement de ce ſiècle pour époque, $A =$ au double de la longitude de l'apogée du Soleil en 1700, & θ au double du mouvement ſéculaire de cette apogée; ainſi on aura par les nouvelles Tables de Mayer, $A = 6^f\ 15^d\ 25'\ 12''$, & $\theta = 3^d\ 40' =$ (en parties du rayon) 0,063994. Subſtituant ces valeurs dans les équations précédentes, on aura

$$x - \frac{2y}{3^d\ 40'}\left[-\text{cot.}\,15^d\ 25' + \frac{1}{88^d\ 44'}\left(1 + \frac{\text{fin.}\,73^d\ 19'}{\text{fin.}\,15^d\ 25'}\right)\right] = \alpha,$$
$$x - \frac{2y}{3^d\ 40'}\left[-\text{cot.}\,15^d\ 25' + \frac{1}{26^d\ 24'}\left(1 + \frac{\text{fin.}\,10^d\ 59'}{\text{fin.}\,15^d\ 25'}\right)\right] = \alpha + \beta,$$

c'eſt-à-dire,

$$x - \frac{2y}{0{,}06399}\left(-3{,}62636 + \frac{4{,}60336}{1{,}54869}\right) = \alpha,$$
$$x - \frac{2y}{0{,}06399}\left(-3{,}62636 + \frac{1{,}71669}{0{,}46077}\right) = \alpha + \beta;$$

ou bien en réduisant,

$$x + \frac{1,30788}{0,06399} y = \alpha, \quad x - \frac{0,19868}{0,06399} y = \alpha + \beta; \text{ d'où}$$

$$y = - \frac{0,06399}{1,50656} \beta, \quad x = \alpha + \frac{1,30788}{1,50656} \beta;$$

& à cause de $\alpha = 10^s 7^d 49' 52''$ & $\beta = 2' 32''$ *(art. 5)*,

$$x = 10^s 7^d 52' 4'', \quad y = - 6'',456.$$

D'où l'on voit que la valeur de y doit être négative & égale à environ deux tiers de la valeur qu'elle doit avoir dans le cas de l'équation constamment proportionnelle au carré du temps; quant au mouvement séculaire moyen, il ne diffère que de 1′ 24″ de celui qu'on a trouvé dans le cas dont nous venons de parler.

Dans l'hypothèse présente, on auroit donc pour l'équation séculaire qui devra être ajoutée au mouvement moyen au bout de m siècles comptés depuis 1700,

$$-3'21'',775 \left[m \cot. 15^d 25' + 15,627 \left(1 - \frac{\sin.(15^d 25' + m \times 3^d 40')}{\sin. 15^d 25'}\right)\right],$$

& pour les siècles qui précèdent 1700, il n'y aura qu'à prendre m négatif.

Et la valeur du coëfficient i sera

$$= - \frac{6}{10000 \times 360 \times 3600 \times \pi r^2}$$

$$= - \frac{1}{2306880000000} \text{ environ.}$$

(9.) On trouveroit des résultats différens si l'on adoptoit d'autres hypothèses à l'égard de l'angle $A + \mu Z$, & il est clair que tant qu'il ne s'agira que de satisfaire aux données de l'*article 4*, on sera le maître de donner telles valeurs qu'on voudra à A & à μ; de sorte que le Problème de l'équation séculaire de la Lune, envisagé sous ce point de vue, est entièrement indéterminé & ne peut être résolu par le secours des observations seules. Il est vrai que les Astronomes supposent communément que les équations séculaires des Planètes ne peuvent être que proportionnelles aux carrés des

temps; mais il paroît que la simplicité & la facilité de cette hypothèse sont les seuls motifs qu'ils aient de l'embrasser.

Ce n'est donc que par la théorie qu'on peut se flatter de déterminer la forme de l'équation séculaire des Planètes, & de la Lune en particulier; & la question est de savoir si parmi les inégalités qui résultent de l'attraction mutuelle des Corps célestes, il doit y en avoir de l'espèce de celles que nous avons supposées ci-dessus dans le mouvement de la Lune, & dont l'effet ne doit être sensible qu'au bout de plusieurs siècles: or, pour ce qui regarde la Lune, quoiqu'il soit démontré que ses inégalités périodiques sont entièrement & uniquement dûes à l'action du Soleil combinée avec celle de la Terre, cependant il paroît très-difficile & presque impossible de déduire de la même cause l'inégalité séculaire de cette Planète; du moins aucun de ceux qui ont travaillé jusqu'à présent à la solution du Problème des trois-corps n'a pu trouver dans la formule du lieu de la Lune des termes propres à produire une altération vraie ou même seulement apparente dans son mouvement moyen; sur quoi on peut voir sur-tout les judicieuses & fines remarques de M. d'Alembert dans les *volumes V & VI de ses Opuscules.*

Mais il y a une circonstance à laquelle on n'a point encore fait attention jusqu'ici dans les calculs des mouvemens de la Lune, c'est la non-sphéricité de la Terre, laquelle produit une petite altération dans la force qui pousse la Lune vers la Terre, en sorte qu'il en résulte une nouvelle force perturbatrice de l'orbite de la Lune, laquelle étant combinée avec celle qui vient de l'action du Soleil, pourroit peut-être produire des termes qui donneroient l'équation séculaire de la Lune. Ce point mérite donc d'être discuté soigneusement; c'est ce que nous allons faire avec tout le détail que la difficulté & l'importance de la matière exigent.

(10.) Soit x le rayon vecteur de l'orbite qu'un corps décrit dans un plan fixe en vertu de deux forces, l'une Υ dirigée vers le centre des rayons vecteurs, & l'autre Π toujours perpendiculaire à ces rayons; nommant φ l'angle parcouru

pendant le temps t, on aura, comme l'on sait, les deux équations

$$\text{I.}\quad \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{x\,d\varphi^2}{dt^2} + \Psi = 0.$$

$$\text{II.}\quad \frac{d.(x^2\,d\varphi)}{dt^2} - x\Pi = 0.$$

La seconde étant multipliée par $2\,x^2\,d\varphi$, & ensuite intégrée, donne

$$\left(\frac{x^2\,d\varphi}{dt}\right)^2 - 2\int x^3\Pi\,d\varphi = k^2,$$

k étant la valeur de $\frac{x^2\,d\varphi}{dt}$, lorsque $\int x^3\,\Pi\,d\varphi$ est nul; & de-là on tire d'abord

$$\text{III.}\quad dt = \frac{x^2\,d\varphi}{\sqrt{(k^2 + 2\int x^3\,\Pi\,d\varphi)}}.$$

Ensuite substituant cette valeur dans la première équation & prenant $d\varphi$ constant, on aura

$$\text{IV.}\quad \frac{d^2.\frac{1}{x}}{d\varphi^2} + \frac{1}{x} - \frac{\Psi x^2 + \frac{\Pi x\,dx}{d\varphi}}{k^2 + 2\int\Pi\,x^3\,d\varphi} = 0.$$

Donc si la force Ψ est composée d'une force $\frac{M}{x^2}$ & d'une force perturbatrice Φ, on aura en faisant $\frac{1}{x} = u$.

$$\text{V.}\quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{M}{k^2} - \Omega = 0,$$

$$\text{où } \Omega = \frac{\Phi x^2 + \frac{\Pi x\,dx}{d\varphi} - \frac{2M}{k^2}\int\Pi x^3\,d\varphi}{k^2 + 2\int\Pi\,x^3\,d\varphi}.$$

Et si les forces perturbatrices Π & Φ sont très-petites par rapport à la force principale $\frac{M}{x^2}$, on aura à-très-peu-près

$$\text{VI.}\quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{1}{k^2}\left(M + \frac{\Phi}{x^2} - \frac{2M}{k^2}\int\frac{\Pi\,d\varphi}{u^3} - \frac{\Pi\,du}{u^3\,d\varphi}\right) = 0.$$

$$\text{VII.}\quad dt = \frac{d\varphi}{k u^2}\left(1 - \int\frac{\Pi\,d\varphi}{k^2\,u^3}\right).$$

Ces formules sont assez connues, mais nous avons cru

devoir les rappeler ici pour épargner à nos lecteurs la peine de les aller chercher ailleurs.

(11.) Pour appliquer maintenant ces formules au mouvement de la Lune, nous supposerons d'abord que cette Planète se meuve dans l'écliptique, c'est-à-dire que nous ferons abstraction de l'inclinaison de son orbite, qu'on sait toujours être fort petite ; il sera ensuite aisé d'y avoir égard si on le juge à propos : dans cette supposition donc si on nomme σ le rayon vecteur de l'orbite du Soleil, S sa masse & η la distance ou l'élongation de la Lune au Soleil, on trouve que l'action du Soleil sur la Lune produit deux forces perturbatrices, l'une dans la direction du rayon vecteur x de l'orbite de la Lune autour de la Terre, laquelle est

$$S\left[\frac{x}{\delta^3} + \sigma\left(\frac{1}{\sigma^3} - \frac{1}{\delta^3}\right)\text{cos. }\eta\right],$$

l'autre perpendiculaire au même rayon vecteur, & qui est

$$S\sigma\left(\frac{1}{\sigma^3} - \frac{1}{\delta^3}\right)\text{sin. }\eta,$$

δ étant la distance rectiligne entre la Lune & le Soleil, en sorte que

$$\delta = \sqrt{(\sigma^2 - 2\sigma x\text{ cos. }\eta + x^2)}.$$

Or comme σ est environ deux cents fois plus grand que x, on aura avec une approximation suffisante

$$\frac{1}{\delta^3} = \frac{1}{\sigma^3} + \frac{3x\text{ cos. }\eta}{\sigma^4} + \frac{(3 - 15\text{ cos. }\eta^2)x^2}{2\sigma^5};$$

donc substituant cette valeur, & faisant attention que $\text{cos. }\eta^2 = \frac{1 + \text{cos. }2\eta}{2}$, $\text{cos. }\eta^3 = \frac{3\text{ cos. }\eta + \text{cos. }3\eta}{4}$, $\text{cos. }\eta\text{ sin. }\eta = \frac{\text{sin. }2\eta}{2}$, $\text{cos. }\eta^2\text{ sin. }\eta = \frac{\text{sin. }\eta + \text{sin. }3\eta}{4}$, on aura par l'action du Soleil sur la Lune,

Force perturbatrice dans la direction du rayon,

$$-\frac{S}{2\sigma^3}(1 + 3\text{ cos. }2\eta)x - \frac{S}{4\sigma^4}\left(\frac{9\text{ cos. }\eta}{2} + 15\text{ cos. }3\eta\right)x^2.$$

Force perturbatrice perpendiculaire au rayon.

$$- \frac{3S}{2\sigma^3} \text{ſin. } 2\eta \times x - \frac{S}{8\sigma^4} (3 \text{ ſin. } \eta + 15 \text{ ſin. } 3\eta)\, x^2.$$

(12.) A ces forces provenantes de l'attraction du Soleil, il faut maintenant ajouter celles qui viennent de l'attraction de la Terre; & comme on veut avoir égard à la non-ſphéricité de ſa figure, il eſt néceſſaire de conſidérer en particulier l'attraction de chaque particule de la Terre ſur la Lune, & d'en chercher les forces réſultantes.

Pour faciliter cette recherche, nous commencerons par établir cette propoſition préliminaire, qui eſt aſſez facile à démontrer & qui peut être auſſi utile dans d'autres occaſions.

« Si un point A attire un autre point B avec une force » quelconque F, & qu'on propoſe de décompoſer cette force » ſuivant trois directions données perpendiculaires entr'elles; » ſoit Δ la diſtance entre les deux corps, & ſoit $d\Delta$ l'accroiſ- » ſement de cette diſtance en ſuppoſant que le corps attiré B » parcoure, ſuivant l'une des directions dont il s'agit, l'eſpace » infiniment petit $d\alpha$, on aura $- F \frac{d\Delta}{d\alpha}$ pour la partie de la force F qui agit ſuivant cette même direction. »

De-là, il s'enſuit que ſi on détermine la poſition du point B, par rapport au point A, par trois variables α, β, γ dont les différentielles $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ ſoient dans les directions ſuivant leſquelles il s'agit de décompoſer la force F; en ſorte que la diſtance Δ ſoit une fonction de α, β, γ, & qu'on dénote, comme à l'ordinaire, par $\frac{d\Delta}{d\alpha}$, $\frac{d\Delta}{d\beta}$, $\frac{d\Delta}{d\gamma}$ les coëfficiens de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ dans la différentielle de Δ, on aura $- F \frac{d\Delta}{d\alpha}$, $- F \frac{d\Delta}{d\beta}$, $- F \frac{d\Delta}{d\gamma}$ pour les trois forces réſultantes de la force F.

Si F eſt proportionnelle à $\frac{1}{\Delta^2}$, ce qui eſt le cas de

l'attraction céleste, on aura $F d\Delta = \frac{d\Delta}{\Delta^2} = - d. \frac{1}{\Delta}$; par conséquent, les trois forces dont il s'agit, pourront se représenter par les coëfficiens de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, dans la différentielle de $\frac{1}{\Delta}$; en sorte qu'il suffira de trouver la valeur de $\frac{1}{\Delta}$ & de la différentier par les méthodes ordinaires.

Si le point B est attiré en même temps vers différens points A, A', A'' &c. dont les distances à B soient Δ, Δ', Δ'' &c. & dont les attractions soient $\frac{M}{\Delta^2}$, $\frac{M'}{\Delta'^2}$, $\frac{M''}{\Delta''^2}$ &c: il est visible qu'il n'y aura qu'à chercher la valeur de la quantité $\frac{M}{\Delta} + \frac{M'}{\Delta'} + \frac{M''}{\Delta''} +$ &c, & la différentier suivant α, β, γ; les coëfficiens de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ dans cette différentielle, donneront immédiatement les forces cherchées. Donc en général, si le point B est attiré par un corps de figure quelconque, & dont la masse soit M, en considérant chaque élément dM de ce corps, comme un point attirant, il faudra prendre d'abord la somme de tous les $\frac{dM}{\Delta}$ en faisant varier uniquement les quantités qui se rapportent aux élémens dM, & regardant les α, β, γ comme constantes; dénotant cette somme par Σ, on y fera varier ensuite les quantités α, β, γ relatives à la position du point B, & l'on aura $\frac{d\Sigma}{d\alpha}$, $\frac{d\Sigma}{d\beta}$, $\frac{d\Sigma}{d\gamma}$ pour les trois forces suivant $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, auxquelles se réduira l'effet de l'attraction totale du corps M sur le point B.

(13.) Cela posé, pour pouvoir appliquer avec facilité, cette méthode à la recherche des forces qui résultent de l'attraction de toutes les parties de la Terre sur la Lune, nous considérerons le centre de la Terre, ainsi que le plan de son équateur, comme fixes; & nous y rapporterons, tant la position de chaque particule dM de la Terre, que celle du

centre de la Lune, en ayant attention d'employer, pour déterminer la poſition de ce centre des lignes variables, dont les différentielles aient les mêmes directions qu'on veut donner aux forces réſultantes de l'attraction totale de la Terre ſur la Lune.

Nous ſuppoſerons de plus que l'axe de la Terre ſoit un de ſes trois axes naturels de rotation, & que par conſéquent, les deux autres ſe trouvent dans le plan de l'Équateur; car quelle que ſoit la figure de la Terre & la diſpoſition intérieure de ſes parties, la rotation conſtante & uniforme qu'elle a autour de ſon axe, ſuffit pour nous convaincre que cet axe eſt néceſſairement un de ſes axes naturels de rotation; de ſorte que, comme les deux autres doivent être perpendiculaires à celui-là, ils ne peuvent être placés que dans le plan de l'Équateur.

Donc, ſi on nomme l la diſtance d'une particule quelconque dM de la Terre au plan de l'Équateur, & m, n les diſtances de cette même particule aux plans des méridiens qui paſſent par le ſecond & par le troiſième axe naturel de rotation de la Terre, on aura d'abord par les propriétés du centre de gravité,

$$\int l\,dm = 0, \quad \int m\,dM = 0, \quad \int n\,dM = 0,$$

& par les propriétés des axes naturels de rotation, on aura en même temps

$$\int lm\,dM = 0, \quad \int ln\,dM = 0, \quad \int mn\,dM = 0.$$

(14.) Dans le cas où les deux hémiſphères de la Terre ſont ſuppoſés ſemblables & de denſité uniforme, il eſt facile de voir qu'on aura de plus en général $\int l^\rho P\,dM = 0$, ρ étant un nombre quelconque impair, & P une fonction quelconque de m & de n. Et ſi la Terre eſt un ſphéroïde de révolution, on aura $\int n^\rho Q\,dM = 0$, $\int m^\rho R\,dM = 0$, Q étant une fonction quelconque de l & n, & R une fonction quelconque de l & m; mais ces quantités ne ſeront plus nulles dès qu'on voudra abandonner ces hypothèſes & regarder la Terre comme ayant une figure quelconque.

(15).

(15.) Soit maintenant ω l'obliquité de l'Écliptique, z la longitude de la Lune comptée depuis l'équinoxe du printemps, & y sa latitude; nommant q son ascension droite & p sa déclinaison, on aura par la Trigonométrie ces deux équations

$$\text{cos}.\, p \;\; \text{cos}.\, q = \text{cos}.\, y \;\; \text{cos}.\, z,$$

$$\text{sin}.\, p = \text{cos}.\, \omega \;\; \text{sin}.\, y + \text{sin}.\, \omega \;\; \text{cos}.\, y \;\; \text{sin}.\, z;$$

d'où il est facile de tirer

$$\text{cos}.\, p \;\; \text{sin}.\, q = - \text{sin}.\, \omega \;\; \text{sin}.\, y + \text{cos}.\, \omega \;\; \text{cos}.\, y \;\; \text{sin}.\, z.$$

De plus, il est aisé de voir que si on nomme ϱ le rayon de l'orbite lunaire, & que λ soit la distance de la Lune au plan de l'Équateur, μ sa distance au plan passant par le colure des équinoxes, & ν celle au plan qui passe par le colure des solstices, il est aisé de voir, dis-je, que l'on aura

$$\lambda = \varrho \;\text{sin}.\, p, \quad \mu = \varrho \;\text{cos}.\, p \;\text{sin}.\, q, \quad \nu = \varrho \;\text{cos}.\, p \;\text{cos}.\, q;$$

& par conséquent

$$\lambda = \varrho \;(\text{cos}.\, \omega \;\; \text{sin}.\, y + \text{sin}.\, \omega \;\; \text{cos}.\, y \;\; \text{sin}.\, z),$$

$$\mu = - \varrho \;(\text{sin}.\, \omega \;\; \text{sin}.\, y - \text{cos}.\, \omega \;\; \text{cos}.\, y \;\; \text{sin}.\, z),$$

$$\nu = \varrho \;\; \text{cos}.\, y \;\; \text{cos}.\, z.$$

Ainsi on connoîtra les coordonnées rectangles λ, μ, ν de la Lune, rapportées au plan de l'Équateur.

(16.) Or il est clair que l'ordonnée λ est toujours parallèle à l'ordonnée l, mais les autres ordonnées μ & ν ne peuvent être parallèles aux ordonnées m & n, que dans le cas où le second axe de rotation de la Terre passeroit par les équinoxes; ainsi il faudra encore changer les coordonnées μ & ν en deux autres qui soient toujours parallèles aux coordonnées m & n, ou bien on changera ces dernières en deux autres parallèles à celles-là; ce qui est d'ailleurs plus convenable, à cause que la ligne des équinoxes est à peu-près fixe, au lieu que le second & le troisième axe de rotation naturelle de la Terre changent continuellement de position à cause de sa révolution diurne autour du premier axe.

Soit donc ψ l'angle que le second axe de rotation de la Terre fait avec la ligne des équinoxes, c'est-à-dire la distance

du premier méridien à l'équinoxe, en nommant, ce qui est permis, premier méridien celui qui passe par ce même axe, & qui est par conséquent fixe sur la surface de la Terre; on verra aisément que si on désigne par m' & n' les nouvelles coordonnées dont l'une seroit perpendiculaire & l'autre parallèle à la ligne des équinoxes dans le plan de l'équateur, on aura $m' = m \cos.\psi + n \sin.\psi$, $n' = n \cos.\psi - m \sin.\psi$. Et comme les coordonnées l, m', n' qui répondent à la particule dM de la Terre sont respectivement parallèles aux coordonnées λ, μ, ν qui répondent au centre de la Lune, il est clair que la distance Δ de cette particule à la Lune sera exprimée par la formule

$$\sqrt{[(\lambda - l)^2 + (\mu - m')^2 + (\nu - n')^2]}.$$

(17.) Soit pour abréger, $l^2 + m^2 + n^2 = r^2$ (r étant la distance de la particule dM au centre de la Terre) on aura aussi $l^2 + m'^2 + n'^2 = r^2$; & comme on a déjà $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \varrho^2$, on aura en substituant les valeurs de λ, μ, ν & développant les termes,

$$\begin{aligned}\Delta^2 = \varrho^2 &- 2\varrho l\,(\cos.\omega \sin.y + \sin.\omega \cos.y \sin.z)\\ &+ 2\varrho m'\,(\sin.\omega \sin.y - \cos.\omega \cos.y \sin.z)\\ &- 2\varrho n' \cos.y \cos.z + r^2;\end{aligned}$$

où l'on remarquera que le rayon ϱ de l'orbite de la Lune est infiniment plus grand que les quantités l, m, n, r; en sorte qu'on pourra exprimer commodément la valeur de $\frac{1}{\Delta}$ une série fort convergente.

Pour cela je suppose

$$\begin{aligned}p = l\,&(\cos.\omega \sin.y + \sin.\omega \cos.y \sin.z)\\ &- m'\,(\sin.\omega \sin.y - \cos.\omega \cos.y \sin.z)\\ &+ n' \cos.y \cos.z;\end{aligned}$$

ou bien, en substituant les valeurs de m' & n',

$$\begin{aligned}p = l\,&(\cos.\omega \sin.y + \sin.\omega \cos.y \sin.z)\\ &- m\,[(\sin.\omega \sin.y - \cos.\omega \cos.y \sin.z)\cos.\psi + \cos.y \cos.z \sin.\psi]\\ &- n\,[(\sin.\omega \sin.y - \cos.\omega \cos.y \sin.z)\sin.\psi - \cos.y \cos.z \cos.\psi]\end{aligned}$$

en sorte que l'on ait

$$\Delta = \sqrt{(\rho^2 - 2\rho p + r^2)};$$

& regardant les quantités p & r comme très-petites du même ordre vis-à-vis de ρ, on aura

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2\rho^3}(-2\rho p + r^2) + \frac{1.3}{2.4\rho^5}(-2\rho p + r^2)^2$$

$$- \frac{1.3.5}{2.4.6\rho^7}(-2\rho p + r^2)^3 + \&c.$$

c'est-à-dire en ordonnant les termes par rapport aux puissances de ρ, & ne poussant la précision que jusqu'aux infiniment petits du troisième ordre

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho} + \frac{p}{\rho^2} + \frac{3p^2 - r^2}{2\rho^3} + \frac{5p^3 - 3pr^2}{2\rho^4} + \&c.$$

(18.) Faisons encore pour abréger,

$P = \text{cos.}\,\omega\ \text{sin.}\,y + \text{sin.}\,\omega\ \text{cos.}\,y\ \text{sin.}\,z,$

$Q = -(\text{sin.}\omega\ \text{sin.}y - \text{cos.}\omega\ \text{cos.}y\ \text{sin.}z)\ \text{cos.}\psi - \text{cos.}y\ \text{cos.}z\ \text{sin.}\psi,$

$R = -(\text{sin.}\omega\ \text{sin.}y - \text{cos.}\omega\ \text{cos.}y\ \text{sin.}z)\ \text{sin.}\psi + \text{cos.}y\ \text{cos.}z\ \text{cos.}\psi,$

de manière que la valeur de p soit représentée par $lP + mQ + nR$, & substituant cette quantité à la place de p dans l'expression précédente de $\frac{1}{\Delta}$, on aura, à cause de $r^2 = l^2 + m^2 + n^2$,

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho} + \frac{lP + mQ + nR}{\rho^2},$$

$$+ \frac{l^2(3P^2 - 1) + m^2(3Q^2 - 1) + n^2(3R^2 - 1) + 6(lmPQ + lnPR + mnQR)}{2\rho^3},$$

$$+ \frac{l^3(5p^3 - 3P) + m^3(5Q^3 - 3Q) + n^3(5R^3 - 3R)}{2\rho^4},$$

$$+ \frac{3(l^2mQ + l^2nR)(5p^2 - 1) + 3(m^2lP + m^2nR)(5Q^2 - 1) + 3(n^2lP + n^2mQ)(5R - 1)}{2\rho^4}.$$

Donc multipliant cette quantité par dM, & intégrant en ne faisant varier que les quantités l, m, n, on aura la valeur de $\int \frac{dM}{\Delta}$ ou de Σ *(art. 12)*; ainsi en faisant attention que $\int l\,dM = 0$, $\int m\,dM = 0$, $\int n\,dM = 0$, $\int lm\,dM = 0$,

$\int l n\, dM = 0$, $\int m n\, dM = 0$ *(art. 13)*, & ſuppoſant pour plus de ſimplicité

$\int l^2 dM = a^2 M$, $\int m^2 dM = b^2 M$, $\int n^2 dM = c^2 M$,
$\int l^3 dM = f^3 M$, $\int l m^2 dM = f'^3 M$, $\int l n^2 dM = f''^3 dM$,
$\int m^3 dM = g^3 M$, $\int m l^2 dM = g'^3 M$, $\int m n^2 dM = g''^3 M$,
$\int n^3 dM = h^3 M$, $\int n l^2 dM = h'^3 M$, $\int n m^2 dM = h''^3 M$;

on aura

$$\Sigma = \frac{M}{\rho} + \frac{a^2 (3P^2 - 1) + b^2 (3Q^2 - 1) + c^2 (3R^2 - 1)}{2\rho^3} M$$
$$+ \frac{f^3 (5P^3 - 3P) + 3f'^3 P (5Q^2 - 1) + 3f''^3 P (5R^2 - 1)}{2\rho^4} M$$
$$+ \frac{g^3 (5Q^3 - 3Q) + 3g'^3 Q (5P^2 - 1) + 3g''^3 Q (5R^2 - 1).}{2\rho^4} M$$
$$+ \frac{h^3 (5R^3 - 3R) + 3h'^3 R (5P^2 - 1) + 3h''^3 R (5Q^2 - 1)}{2\rho^4} M$$

(19.) Or comme ρ eſt la diſtance du centre de la Lune au centre de la Terre, & que z, y ſont deux angles dont l'un repréſente la Longitude de la Lune ſur l'écliptique & l'autre ſa Latitude, il eſt clair qu'en faiſant varier ces trois quantités à la fois, on aura $- d\rho$, $\rho\, \text{coſ.} y\, dz$, & $\rho\, dy$ pour les trois petits eſpaces que le centre de la Lune parcourra ſuivant la direction du rayon ρ & ſuivant deux autres directions perpendiculaires à celle-ci, dont l'une parallèle au plan de l'écliptique & l'autre dans un plan perpendiculaire à l'écliptique. Ainſi prenant ces trois quantités pour les différences $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ *(art. 12)*, on aura $\frac{d\Sigma}{-d\rho}$, $\frac{d\Sigma}{\rho\, \text{coſ.} y\, dz}$, $\frac{d\Sigma}{\rho\, dy}$ pour les expreſſions des forces réſultantes de l'attraction de toutes les parties de la Terre ſur la Lune, & dont les directions ſeront les mêmes que celles des petits eſpaces $- d\rho$, $p\, \text{coſ.} y\, dz$, $\rho\, dy$.

Si au lieu du rayon ρ de l'orbite réelle de la Lune, on introduiſoit le rayon x de ſon orbite projetée ſur l'écliptique, & qu'au lieu de la latitude y, on introduiſît la diſtance perpendiculaire de la Lune au plan de l'écliptique q, ce qui ne demande que de mettre par-tout dans l'expreſſion de Σ,

$\sqrt{(x^2 + q^2)}$ à la place de ϱ, & $\frac{q}{\sqrt{(x^2+q^2)}}$, $\frac{x}{\sqrt{(x^2+q^2)}}$ à la place de $\text{ſin.}\, y$ & $\text{coſ.}\, y$; alors en faiſant varier les trois quantités x, z, q, & prenant $-dx$, xdz & dq pour $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, on auroit les trois forces $\frac{d\Sigma}{-dx}$, $\frac{d\Sigma}{xdz}$, $\frac{d\Sigma}{dq}$, qui ſeroient équivalentes aux précédentes, mais dont la première agiroit ſuivant la direction du rayon x, la ſeconde perpendiculairement à ce rayon & parallèlement à l'écliptique, la troiſième perpendiculairement à ces deux-là.

Comme cette dernière manière d'enviſager les forces qui proviennent de l'action de la Terre ſur la Lune eſt beaucoup plus convenable, lorſqu'on ne veut pas conſidérer l'orbite réelle de la Lune, mais ſon orbite projetée ſur l'écliptique, ainſi que nous l'avons fait plus haut, nous nous y tiendrons dans la recherche préſente, & nous remarquerons d'abord qu'on peut faire abſtraction de la latitude de la Lune y, qui étant toujours aſſez petite, & étant d'ailleurs tantôt poſitive, tantôt négative, ne ſauroit influer que très-peu ſur ſon mouvement moyen; c'eſt pourquoi on pourra ſimplifier nos formules en y ſuppoſant d'avance $y = 0$ & $\varrho = x$, ce qui donnera

$$P = \text{ſin.}\,\omega\ \text{ſin.}\,z,$$
$$Q = \text{coſ.}\,\omega\ \text{ſin.}\,z\ \text{coſ.}\,\psi - \text{coſ.}\,z\ \text{ſin.}\,\psi,$$
$$R = \text{coſ.}\,\omega\ \text{ſin.}\,z\ \text{ſin.}\,\psi + \text{coſ.}\,z\ \text{coſ.}\,\psi;$$

& l'on n'aura plus qu'à conſidérer les deux forces $\frac{d\Sigma}{-dx}$, $\frac{d\Sigma}{xdz}$ parallèles à l'écliptique & dirigées, la première ſuivant le rayon x, & la ſeconde perpendiculairement à ce rayon; de ſorte que ſi on fait pour abréger

$$P' = \text{ſin.}\,\omega\ \text{coſ.}\,z = \frac{dP}{dz},$$
$$Q' = \text{coſ.}\,\omega\ \text{coſ.}\,z\ \text{coſ.}\,\psi + \text{ſin.}\,z\ \text{ſin.}\,\psi = \frac{dQ}{dz},$$
$$R' = \text{coſ.}\,\omega\ \text{coſ.}\,z\ \text{ſin.}\,\psi - \text{ſin.}\,z\ \text{coſ.}\,\psi = \frac{dR}{dz};$$

on aura pour la force qui agit ſuivant la direction du rayon x, cette expreſſion

$$\frac{M}{x^2} + 3\,\frac{a^2(3P^2-1)+b^2(3Q^2-1)+c^2(3R^2-1)}{2x^4}\,M$$

$$+\;2\,\frac{f^3(5P^3-3P)+3f'^3P(5Q^2-1)+3f''^3P(5R^2-1)}{x^5}\,M$$

$$+\;2\,\frac{g^3(5Q^3-3Q)+3g'^3Q(5P^2-1)+3g''^3Q(5R^2-1)}{x^5}\,M$$

$$+\;2\,\frac{h^3(5R^3-3R)+3h'^3R(5P^2-1)+3h''^3R(5Q^2-1)}{x^5}\,M,$$

& pour celle qui agit perpendiculairement au rayon, celle-ci

$$3\,\frac{a^2PP'+b^2QQ'+c^2RR'}{x^4}\,M$$

$$+\;3\,\frac{f^3(5P^2-1)P'+f'^3[(5Q^2-1)P'+10PQQ']+f''^3[(5R^2-1)P'+10PRR']}{2x^5}\,M$$

$$+\;3\,\frac{g^3(5Q^2-1)Q'+g'^3[(5P^2-1)Q'+10QPP']+g''^3[(5R^2-1)Q'+10QRR']}{2x^5}\,M$$

$$+\;3\,\frac{h^3(5R^2-1)R'+h'^3[(5P^2-1)R'+10RPP']+h''^3[(5Q^2-1)R'+10RQQ']}{2x^5}\,M.$$

La première de ces deux forces ſera donc celle qui pouſſe la Lune vers le centre de la Terre, en vertu de l'attraction de toutes les parties de la Terre; & il eſt viſible que le premier terme $\frac{M}{x^2}$ de l'expreſſion de cette force, repréſentera l'attraction de la Terre ſur la Lune, lorſqu'on n'a point d'égard à ſa figure, & qu'on la ſuppoſe toute concentrée dans un point; de ſorte que les autres termes de la même formule, exprimeront la force perturbatrice de la Lune, dans la direction du rayon vecteur, provenante de la non-ſphéricité de la Terre; ainſi joignant cette force à celle qu'on a trouvée plus haut *(article 2)* ſuivant la même direction, on aura la valeur de la force totale perturbatrice Φ *(art. 10)*.

La ſeconde des forces trouvées ci-deſſus, agiſſant perpendiculairement au rayon vecteur de l'orbite de la Lune, devra être pareillement ajoutée à celle qu'on a trouvée ſuivant la même direction, en vertu de l'action du Soleil; & l'on aura la valeur de l'autre force perturbatrice Π *(articles cités.)*

(20.) Si la Terre étoit ſphérique & compoſée de couches concentriques de denſité uniforme, il eſt facile de voir qu'on auroit néceſſairement $a^2 = b^2 = c^2$, & $f^3 = 0$, $f'^3 = 0$, $f''^3 = 0$, $g^3 = \alpha$ *(art. 18)*; par conſéquent les deux forces ci-deſſus ſe réduiroient à

$$\frac{M}{x^2} + \frac{g a^2 (P^2 + Q^2 + R^2 - 1)}{2 x^4} M, \ \& \ \frac{3 a^2 (PP' + QQ' + RR')}{x^4} M;$$

mais on a $P^2 + Q^2 + R^2 = 1$, & $PP' + QQ' + RR' = 0$, comme on peut s'en convaincre par les valeurs de P, Q, R, P', α: donc, la première des deux forces précédentes, celle qui agit dans la direction du rayon vecteur, ſe réduira à $\frac{M}{x^2}$, c'eſt-à-dire, à ce qu'elle ſeroit ſi la Terre étoit concentrée dans un point; & la ſeconde deviendra entièrement nulle, ce qui s'accorde avec ce que l'on ſait d'ailleurs.

Au reſte, les conditions de $a^2 = b^2 = c^2$, & de $f^3 = 0$, $f'^3 = 0 \ \alpha$, peuvent avoir lieu d'une infinité de manières différentes, & ſans que le corps ſoit ſphérique, & de denſité uniforme dans chaque couche; mais quoique ces conditions ſuffiſent pour rendre nulles les forces perturbatrices que nous venons de trouver, cependant comme les expreſſions précédentes ne ſont qu'approchées, il eſt clair que les forces perturbatrices ne ſeront réellement nulles que lorſque tous les autres termes qu'on a négligés, s'évanouiront auſſi en même temps. Il n'y a peut-être que le ſeul cas où le corps eſt ſphérique, & de denſité uniforme dans chaque couche, dans lequel les forces perturbatrices ſoient exactement & rigoureuſement nulles; mais c'eſt ce qui paroît aſſez difficile à démontrer.

Si on ſuppoſe que la Terre ſoit un ſolide quelconque de révolution, en ſorte que tous ſes méridiens aient la même figure, & que de plus toutes les parties de même denſité y ſoient diſtribuées de manière qu'elles forment des couches ſemblables: ſuppoſition qui paroît la plus naturelle & la plus générale qu'on puiſſe faire, du moins, en tant qu'on regarde

la Terre comme ayant été originairement fluide; on aura dans cette hypothèſe $b^2 = c^2$, $f'^3 = f''^3$, & $g^3 = 0$, $g'^3 = 0$, $g''^3 = 0$, $h^3 = 0$, $h'^3 = 0$, $h''^3 = 0$, comme il eſt facile de s'en convaincre avec un peu de réflexion; ainſi, à cauſe de $P^2 + Q^2 + R^2 = I$, & $PP' + QQ' + RR' = 0$, les deux forces perturbatrices provenantes de la non-ſphéricité de la Terre, deviendront

$$\frac{3(a^2 - b^2)(3P^2 - 1)}{2x^4} M + \frac{2(f^3 - 3f'^3)(5P^3 - 3P)}{x^5} M,$$

$$\frac{3(a^2 - b^2)PP'}{x^4} M + \frac{3(f^3 - 3f'^3)(5P^2 - 1)P'}{2x^5} M;$$

dont la première agira ſuivant le rayon vecteur x, & l'autre perpendiculairement à ce rayon.

En ſuppoſant que la Terre ſoit un ſphéroïde elliptique & homogène, on aura, en nommant α le demi-axe, & β le demi-diamètre de l'Équateur, $a^2 = \frac{\alpha^2}{5}$, $b^2 = \frac{\beta^2}{5}$; & le rapport de β à α eſt, par la théorie de la Figure de la Terre $= 1 + \frac{1}{230}$, & par les obſervations $= 1 + \frac{1}{178}$.

En général, quelle que ſoit la figure de la Terre & l'arrangement intérieur de ſes parties, pourvu que $b^2 = c^2$, on trouve par la théorie de la préceſſion des équinoxes, que la préceſſion moyenne annuelle des équinoxes, en vertu de l'action combinée du Soleil & de la Lune, eſt exprimée par

$$\frac{3(b^2 - a^2)}{4b^2}(1 + \sigma\nu^2) \text{ coſ. } \omega \times \text{ mouv. diur. } \odot,$$

σ étant le rapport de la maſſe de la Lune à celle de la Terre, ν le rapport du mouvement de la Lune à celui du Soleil, & ω l'obliquité de l'écliptique. Or, par les obſervations, on ſait que la préceſſion moyenne eſt de 50 ſecondes; donc, exprimant auſſi en ſecondes le mouvement diurne du Soleil, qui eſt de $59' 8'' = 3548''$, on aura, à cauſe de coſ. ω = coſ. $23^d 29' = \frac{917}{1000}$, & $\nu^2 = 178$,

$\frac{b^2 - a^2}{b^2}$

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2} = \frac{200000}{9760548\,(1+1786)} = \frac{1}{48,80274\,(1+1786)};$$

donc, si $\mathfrak{C}$ est $\frac{1}{70}$ suivant M. Daniel Bernoulli, on aura

$$\frac{b^2-a^2}{b^2} = \frac{7}{4,880274 \times 248} = \frac{1}{173}$$ à peu près.

(21.) Ayant donc trouvé les valeurs des forces perturbatrices Φ & Π, tant en vertu de l'action du Soleil que de celle de la Terre regardée comme non-sphérique, il ne faudra plus que les substituer dans les *équations VI & VII* de l'*article 10*, pour pouvoir déterminer les inégalités de la Lune, qui résultent de ces deux causes; mais comme les effets de la première ont déjà été suffisamment examinés par les Géomètres qui ont travaillé sur la théorie de la Lune, & que notre objet n'est que de rechercher, si la non-sphéricité de la Terre peut servir à expliquer l'équation séculaire de la Lune, il suffira d'avoir égard, dans les équations dont nous venons de parler, aux termes provenans de l'action de la Terre, soit seule, soit combinée avec celle du Soleil, & même parmi ces termes, à ceux-là seuls qui paroîtront pouvoir produire une altération dans le mouvement moyen. Nous ferons, pour cet effet, les remarques suivantes.

(22.) Nous avons déjà vu que pour que la Lune ait une équation séculaire réelle, il faut que l'angle du mouvement vrai φ, renferme, outre l'angle du mouvement moyen Z, qui est proportionnel au temps t, encore le terme $i z^2$ *(art. 2)* & si l'équation séculaire n'est qu'apparente, alors au lieu du terme $i z^2$, il faudra qu'il y en ait un de cette forme

$$\frac{2i}{\mu \text{ sin. } A}\left(Z \text{ cos. } A + \frac{\text{sin. } A - \text{sin. } (A + \mu Z)}{\mu}\right),$$

μ étant un coëfficient très-petit *(article 6)*; donc, on aura dans le premier cas, abstraction faite des autres inégalités, $\varphi = Z + i\,Z^2$; d'où l'on tire à très-peu près $Z = \varphi - i\,\varphi^2$, & supposant $dt = n\,dZ$, $\frac{dt}{d\varphi} = n\,(1 - 2i\varphi)$.

Dans le second cas, on aura

$$\varphi = Z + \frac{2i}{\mu \sin. B}\left(Z \cos. A + \frac{\sin. A - \sin.(A + \mu Z)}{\mu}\right);$$

d'où l'on tire de même,

$$Z = \varphi - \frac{2i}{\mu \sin. B}\left(\varphi \cos. A + \frac{\sin. A - \sin.(A + \mu \varphi)}{\mu}\right)$$

& de-là,

$$\frac{dt}{d\varphi} = n\left(1 - \frac{2i}{\sin. A} \times \frac{\cos. A - \cos.(A + \mu \varphi)}{\mu}\right).$$

Or l'*équation VII*, donne $\frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{ku^2}\left(1 - \int \frac{\Pi d\varphi}{k^2 u^3}\right)$;

donc, on aura dans le premier cas $nu^2(1 - 2i\varphi) = \frac{1}{k} - \int \frac{\Pi d\varphi}{k^3 u^3}$, & différentiant, on trouvera $\frac{\Pi}{k^3 u^3} = - \frac{2nudu}{d\varphi}(1 - 2i\varphi) + 2inu^2$;

or, comme $\frac{1}{u}$, rayon vecteur de l'orbite de la Lune, est une quantité à très-peu-près constante, il s'ensuit que la valeur de $\frac{\Pi}{u^3}$ contiendra nécessairement un terme tout constant qui sera exprimé par $2ink^3\gamma^2$, γ^2 étant le terme tout constant de la valeur de u^2.

Dans l'autre cas, on aura l'équation

$$nu^2\left[1 - \frac{2i}{\sin. A} \times \frac{\cos. A - \cos.(A + \mu \varphi)}{\mu}\right] = \frac{1}{k} - \int \frac{\Pi d\varphi}{k^3 u^3};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Pi}{k^3 u^3} = - \frac{2nudu}{d\varphi}\left[1 - \frac{2i}{\sin. A} \times \frac{\cos. A - \cos.(A + \mu\varphi)}{\mu}\right] + 2inu^2 \times \frac{\sin.(A + \mu\varphi)}{\sin. A};$$

de sorte que dans ce cas il faudra que la valeur de $\frac{\Pi}{u^3}$ contienne un terme de la forme $2ink^3\gamma^2 \frac{\sin.(A + \mu\varphi)}{\sin. A}$, μ étant un coëfficient extrêmement petit.

On peut conclure de-là en général que l'équation séculaire

de la Lune ne peut avoir lieu à moins que la quantité $\frac{\Pi}{u^3}$ ne contienne ou un terme tout constant, ou un terme qui renferme le sinus d'un angle qui varie infiniment peu, & qui soit par conséquent à très-peu-près constant, au moins pendant un grand nombre de révolutions; dans le premier cas l'équation séculaire de la Lune sera réelle & ira en augmentant, comme les carrés des temps; dans le second elle ne sera qu'apparente & ne différera des autres équations du mouvement de la Lune que par la longueur de sa période.

(23.) Tout se réduit donc à examiner si la quantité $\frac{\Pi}{u^3}$ peut contenir des termes de l'espèce de ceux dont nous venons de parler, & pour cela il n'y aura qu'à considérer les différens angles dont les sinus ou cosinus entreront dans la valeur de $\frac{\Pi}{u^3}$, & voir s'il y a quelque combinaison de ces angles qui puisse donner un angle constant ou à-peu-près constant; alors on n'aura d'égard qu'aux termes qui pourront donner de telles combinaisons dans les équations VI & VII, & il sera facile d'en déduire l'équation séculaire cherchée.

Je remarque donc d'abord que les forces perturbatrices de la Lune, qui dépendent de l'action du Soleil, ne renferment que les sinus ou cosinus de l'angle n & de ses multiples, avec les deux variables x ou $\frac{1}{u}$ & σ; & que celles qui viennent de la non-sphéricité de la Terre ne contiennent que les sinus ou cosinus des angles ζ & ψ avec la variable x; car pour ce qui regarde l'angle ω, qui exprime l'obliquité de l'écliptique, on doit le considérer comme une quantité constante.

Je remarque en second lieu que σ étant le rayon vecteur de l'orbite du Soleil, on aura, comme l'on sait, $\frac{1}{\sigma} = \frac{1 + \varepsilon \cos. \xi}{\lambda}$, λ étant la distance moyenne, ε l'excentricité & ξ l'anomalie vraie; de même x étant le rayon vecteur de

l'orbite de la Lune, on auroit ſans les forces perturbatrices, $\frac{1}{x} = n = \frac{1 + e \operatorname{cof.} s}{l}$, l étant la diſtance moyenne de la Lune, e l'excentricité de ſon orbite, & s l'anomalie vraie; mais à cauſe des forces perturbatrices, on aura $\frac{1}{x} = u = \frac{1 + e \operatorname{cof.} s + v}{b}$, v étant une variable très-petite & dépendant uniquement de ces forces. De-là il eſt facile de conclure que les inégalités du mouvement de la Lune, abſtraction faite de l'inclinaiſon de l'orbite, mais en ayant égard à la non-ſphéricité de la Terre, ne pourront dépendre que de ces cinq angles ξ, s, n, z & ψ; & il eſt facile de ſe convaincre en particulier que la valeur de $\frac{\Pi}{u^3}$ ſe réduira à une ſuite de termes de la forme

$$A \operatorname{fin.} (m\xi + ns + pn + qz + r\psi),$$

m, n, p, q, r étant des coëfficiens indéterminés exprimés par des nombres entiers poſitifs, ou négatifs en y comprenant zéro & l'unité: or ſi on ſe rappelle que l'on a

$\xi =$ à l'anomalie du Soleil,

$s =$ à l'anomalie de la Lune,

$n =$ à la diſtance de la Lune au Soleil,

$z =$ à la longitude de la Lune comptée depuis l'équinoxe.

$\psi =$ à la diſtance du premier méridien de la Terre au colure des équinoxes,

& qu'on examine les rapports de ces angles entr'eux, leſquels ſont à très-peu-près connus par les obſervations, on verra aiſément qu'il n'y a que cette combinaiſon $z - \xi - n$ & ſes multiples qui puiſſent former des angles preſque conſtans; en effet, il eſt clair que $z - \xi$ ſera égale à la longitude de la Lune moins celle du Soleil, plus la longitude de l'apogée du Soleil; c'eſt-à-dire, égale à la diſtance de la Lune au Soleil plus la longitude de l'apogée du Soleil: par conſéquent nommant α la longitude de l'apogée du Soleil, on aura $z - \xi = n + \alpha$; donc $z - \xi - n = \alpha$.

Or on ſait que α eſt une quantité preſque conſtante, qui ne varie que de $1^d\ 50'$ par ſiècle, ſuivant les Tables de Mayer, de ſorte que l'angle $\zeta - \xi - \nu$ & ſes multiples, ſeront dans le cas dont il s'agit; ainſi dans la recherche de l'équation ſéculaire de la Lune, il ſuffira de tenir compte des termes qui renfermeront les trois angles ζ, ξ, ν; d'où je conclus d'abord que dans les expreſſions des forces perturbatrices, provenantes de la non-ſphéricité de la Terre, on pourra rejeter les termes qui contiendront les ſinus ou coſinus de l'angle ψ; ce qui ſervira beaucoup à ſimplifier ces expreſſions.

(24.) De cette manière on aura donc, d'après les formules de l'*article* 19,

$$P^2 = \frac{\text{ſin.}\,\omega^2\,(1 - \text{coſ.}\,2\zeta)}{2},$$

$$Q^2 = R^2 = \frac{2 - \text{ſin.}\,\omega^2\,(1 - \text{coſ.}\,2\zeta)}{4},$$

$$P^3 = \frac{\text{ſin.}\,\omega^3\,(3\,\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,3\zeta)}{4},$$

$$PQ^2 = PR^2 = \frac{(4 - 3\,\text{ſin.}\,\omega^2)\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{ſin.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\omega^3\,\text{ſin.}\,3\zeta}{8},$$

& toutes les autres quantités Q^3, QP^2, &c. ſeront nulles.

Et comme $P' = \frac{dP}{d\zeta}$, $Q' = \frac{dQ}{d\zeta}$, $R' = \frac{dR}{d\zeta}$, on aura par la différenciation,

$$PP' = \frac{\text{ſin.}\,\omega^2\,\text{ſin.}\,2\zeta}{2},$$

$$QQ' = RR' = -\frac{\text{ſin.}\,\omega^2\,\text{ſin.}\,2\zeta}{2},$$

$$P^2P' = \frac{\text{ſin.}\,\omega^3\,(\text{coſ.}\,\zeta - \text{coſ.}\,3\zeta)}{4},$$

$$\left.\begin{array}{l} Q^2P' + 2PQQ' \\ = R^2P' + 2PRR' \end{array}\right\} = \frac{(4 - 3\,\text{ſin.}\,\omega^2)\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\zeta + 3\,\text{ſin.}\,\omega^3\,\text{coſ.}\,3\zeta}{8},$$

toutes les autres quantités Q^2Q', R^2R', &c. étant nulles.

Faiſant donc ces ſubſtitutions dans les formules de l'*art.* 19, & ſuppoſant pour abréger,

$$B = M\left(a^2 - \frac{b^2 + c^2}{2}\right)\left(1 - \frac{3\,\text{fin.}\,\omega^2}{2}\right),$$

$$C = \frac{3M}{2}\left(a^2 - \frac{b^2 + c^2}{2}\right)\text{fin.}\,\omega^2,$$

$$D = \frac{3M}{2}\left(2f^3 - 3f'^3 - 3f''^3\right)\left(\text{fin.}\,\omega - \frac{5}{4}\,\text{fin.}\,\omega^3\right),$$

$$E = \frac{5M}{8}\left(2f^3 - 2f'^3 - 3f''^3\right)\text{fin.}\,\omega^3,$$

on aura à caufe de la non-fphéricité de la Terre,

Force perturbatrice dans la direction du rayon.

$$-\frac{3}{2}\cdot\frac{B + C\,\text{cof.}\,2z}{x^4} - 2\,\frac{D\,\text{fin.}\,z + E\,\text{fin.}\,3z}{x^5}.$$

Force perturbatrice perpendiculaire au rayon.

$$\frac{C\,\text{fin.}\,2z}{x^4} - \frac{D\,\text{cof.}\,z + 3E\,\text{cof.}\,3z}{2x^5}.$$

(25.) Il faut maintenant reprendre les expreffions des forces perturbatrices réfultantes de l'action du Soleil *(art. 11)* & y fubftituer à la place de σ fa valeur $\frac{\lambda}{1 + \varepsilon\,\text{cof.}\,\xi}$; mais il ne fera pas néceffaire de faire cette fubftitution en entier: car par ce que nous venons de remarquer dans l'*art. précéd.* il eft vifible qu'il fuffira d'avoir égard aux termes qui contiendront des finus ou des cofinus de l'angle $\xi + n$ ou de fes multiples. Or la valeur précédente de σ donne celles-ci:

$$\frac{1}{\sigma^3} = \frac{1 + \frac{3\varepsilon^2}{2}}{\lambda^3} + \frac{3\varepsilon + \frac{3\varepsilon^3}{4}}{\lambda^3}\,\text{cof.}\,\xi + \frac{3\varepsilon^2}{2\lambda^3}\,\text{cof.}\,2\xi + \frac{\varepsilon^3}{4\lambda^3}\,\text{cof.}\,3\xi,$$

$$\frac{1}{\sigma^4} = \frac{1 + 3\varepsilon^2 + \frac{3\varepsilon^4}{8}}{\lambda^4} + \frac{4\varepsilon + 3\varepsilon^3}{\lambda^4}\,\text{cof.}\,\xi + \frac{3\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^4}{2}}{\lambda^4}\,\text{cof.}\,2\xi$$
$$+ \frac{\varepsilon^3}{\lambda^4}\,\text{cof.}\,3\xi + \frac{\varepsilon^4}{8\lambda^4}\,\text{cof.}\,4\xi;$$

donc fubftituant ces valeurs & rejetant tous les termes qui contiendroient d'autres angles que $\xi + n$, on aura par l'action du Soleil,

Force perturbatrice dans la direction du rayon.

$$- \frac{S}{2\lambda^3}\left[1 + \frac{3\varepsilon^2}{2} + \frac{9\varepsilon^2}{4}\,\text{coſ.}\,2\,(\xi + \eta)\right]x,$$

$$- \frac{S}{4\lambda^4}\left[\tfrac{9}{4}\,(4\varepsilon + 3\varepsilon^3)\,\text{coſ.}\,(\xi + \eta) + \frac{15\varepsilon^3}{2}\,\text{coſ.}\,3\,(\xi + \eta)\right]x^2.$$

Force perturbatrice perpendiculaire au rayon.

$$- \frac{3S}{2\lambda^3} \times \frac{3\varepsilon^2}{4}\,\text{ſin.}\,2\,(\xi + \eta)\,.\,x,$$

$$- \frac{S}{8\lambda^4}\left[\tfrac{3}{2}\,(4\varepsilon + 3\varepsilon^3)\,\text{ſin.}\,(\xi + \eta) + \frac{15\varepsilon^3}{2}\,\text{ſin.}\,3\,(\xi + \eta)\right]x^2.$$

Joignant donc ces forces à celles de l'*article précédent*, on aura les valeurs des quantités Φ & Π; leſquelles, en mettant pour plus de ſimplicité $\frac{1}{\nu^2}$ à la place de $\frac{S}{\lambda^3}$, ſe trouveront exprimées de la manière ſuivante,

$$\Phi = - \frac{1}{2\nu^2}\,(1 + \frac{3\varepsilon^2}{2} + \frac{9\varepsilon^2}{4}\,\text{coſ.}\,2\,(\xi + \eta)]$$

$$- \frac{3\varepsilon}{4\nu^2\lambda}\left[(3 + \frac{9\varepsilon^2}{4})\,\text{coſ.}\,(\xi + \eta) + \frac{5\varepsilon^2}{2}\,\text{coſ.}\,3\,(\xi + \eta)\right]x^2$$

$$- \tfrac{3}{2}\cdot\frac{B + C\,\text{coſ.}\,2\,\zeta}{x^4} - 2\,\frac{D\,\text{ſin.}\,\zeta + E\,\text{ſin.}\,3\,\zeta}{x^5},$$

$$\Pi = - \frac{9\varepsilon^2}{8\nu^2}\,\text{ſin.}\,2\,(\xi + \eta)\,.\,x$$

$$- \frac{3\varepsilon}{4\nu^2\lambda}\left[(1 + \frac{3\varepsilon^2}{4})\,\text{ſin.}\,(\xi + \eta) + \frac{5\varepsilon^2}{4}\,\text{ſin.}\,3\,(\xi + \eta)\,x^2\right.$$

$$+ \frac{C\,\text{ſin.}\,2\,\zeta}{x^4} - \frac{D\,\text{coſ.}\,3\;E\,\text{coſ.}\,3\,\zeta}{2\,x^5}.$$

(26.) On ſubſtituera maintenant ces valeurs de Φ & de Π dans l'*équation VI* de l'orbite de la Lune, laquelle deviendra par-là, à cauſe de $x = \frac{1}{u}$,

$$\text{VIII.}\quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + \eta + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2\nu^2k^2u^3}\left[(1 + \frac{3\varepsilon^2}{2} + \frac{9\varepsilon^2}{4}\,\text{coſ.}\,2\,(\xi + \eta)\right]$$

$$+ \frac{3\varepsilon}{4\nu^2k^2\lambda u^4}\left[(3 + \frac{9\varepsilon^2}{4})\,\text{coſ.}\,(\xi + \eta) + \frac{5\varepsilon^2}{2}\,\text{coſ.}\,3\,(\xi + \eta)\right]$$

$$+ \frac{3u^2}{2k^2}(B + C\,\text{cof.}\,2\,z) + \frac{2u^3}{k^2}(D\,\text{fin.}\,z + E\,\text{fin.}\,3\,z)$$
$$- \frac{9\varepsilon^2}{4k^4\nu^2}\int\frac{\text{fin.}\,2(\xi+n)}{u^4}\,d\varphi - \frac{9\varepsilon^2}{8\nu^2}\cdot\frac{\text{fin.}\,2(\xi+n)\,d\omega}{u^4\,d\varphi}$$
$$- \frac{3\varepsilon}{2k^4\nu^2\lambda}\left[\left(1+\frac{3\varepsilon^2}{4}\right)\int\frac{\text{fin.}(\xi+n)\,d\varphi}{u^5} - \frac{5\varepsilon^2}{4}\int\frac{\text{fin.}\,3(\xi+n)\,d\varphi}{u^5}\right)$$
$$- \frac{3\varepsilon}{2k^4\nu^2\lambda}\left[\left(1+\frac{3\varepsilon^2}{4}\right)\frac{\text{fin.}(\xi+n)\,du}{u^5\,d\varphi} - \frac{5\varepsilon^2}{4}\cdot\frac{\text{fin.}\,3(\xi+n)\,du}{u^5\,d\varphi}\right)$$
$$+ \frac{2}{k^4}\left(C\int u\,\text{fin.}\,2\,z\,d\varphi - \frac{D}{2}\int u^2\,\text{cof.}\,z\,d\varphi - \frac{3E}{2}\int u^2\,\text{cof.}\,3\,z\,d\varphi\right)$$
$$+ \frac{1}{k^2}\left(C\frac{\text{fin.}\,2\,z\,.\,u\,du}{d\varphi} - \frac{D}{2}\,\frac{\text{cof.}\,z\,.\,u^2\,du}{d\varphi} - \frac{3E}{2}\,\frac{\text{cof.}\,3\,z\,.\,u^2\,du}{d\varphi}\right)$$
$$= 0.$$

J'ai ſuppoſé dans cette équation la maſſe M de la Terre égale à l'unité; de ſorte que, ſi on ſuppoſe auſſi (ce qui eſt également permis) que la diſtance moyenne l de la Lune à la Terre ſoit $= 1$, on aura $\frac{M}{l^3} = 1$; par conſéquent, comme on a par les théorèmes de Hughens, $\sqrt{\frac{S}{\lambda^3}} : \sqrt{\frac{M}{l^3}}$ égal au rapport du temps périodique de la Lune au temps périodique de la Terre, ou (ce qui eſt la même choſe) au rapport du mouvement moyen de la Terre à celui de la Lune; la quantité $\frac{1}{\sqrt{\frac{S}{\lambda^3}}}$, ou bien ν exprimera le rapport du mouvement moyen de la Lune à celui du Soleil, lequel eſt environ de $13 : 1$; ou plus exactement $\sqrt{178\frac{29}{40}} : 1$.

(27.) De plus, on aura, à cauſe de $l = 1$, $u = 1 + e\,\text{cof.}\,s + v$ (*art. 23*), & il faudra que la quantité v ne contienne, ni aucun terme tout conſtant, ni aucun terme affecté de cof. s; ainſi, après avoir ſubſtitué cette valeur dans l'équation précédente, on y fera diſparoître tous les termes qui renfermeront cof. s, ainſi que ceux qui ne contiendront aucun ſinus ou coſinus; ce qui donnera deux équations dont l'une ſervira

ſervira à déterminer le rapport $\frac{ds}{d\varphi}$ qui eſt ſuppoſé conſtant, & l'autre ſervira à déterminer la conſtante k; mais comme *l'équation VII* n'eſt pas exacte à cauſe des différens termes qu'on y a négligés comme inutiles dans la recherche de l'équation ſéculaire, on ne pourra déterminer de cette manière les deux quantités dont il s'agit; ainſi on ſe contentera de rejeter les termes en queſtion ſans faire attention aux conditions néceſſaires pour la deſtruction rigoureuſe de ces termes, & on pourra prendre, ſans erreur ſenſible, pour k ſa valeur approchée 1, & pour $\frac{ds}{d\varphi}$ ſa valeur donnée par les obſervations.

Suppoſons donc $\frac{ds}{d\varphi} = p$, & ſoit de plus $\frac{d\xi + d\eta}{d\varphi} = \pi$, $\frac{dz}{d\varphi} = q$, en ſorte que $p - 1$ déſigne le rapport du mouvement de l'apogée de la Lune à ſon mouvement moyen en longitude, $\pi - 1$ le rapport du mouvement de l'apogée du Soleil au mouvement moyen de la Lune, & $q - 1$ le rapport du mouvement des points équinoxiaux à ce même mouvement moyen *(article 23)*, il eſt facile de voir que *l'équation VII* deviendra de cette forme,

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + n^2 v + \Omega = 0,$$

où $n^2 = 1 - 3\,\frac{1 + \frac{3\,\epsilon^2}{2}}{2\,\nu^2 k^2} + \frac{6\,B}{k^2}$ & Ω ſera compoſée de différens termes de la forme A coſ. $(a + \alpha\varphi)$; & on ſait que chacun de ces termes donnera dans la valeur de v le terme correſpondant $\frac{A}{\alpha^2 - n^2}$ coſ. $(a + \alpha\varphi)$; de ſorte qu'on aura facilement par ce moyen la valeur complète de v.

(28.) Pour avoir les termes qui doivent compoſer la valeur de Ω, il n'y aura qu'à ſubſtituer dans les termes de l'*équation VII*, qui ſont affectés de quelques ſinus ou coſinus, $1 + e$ coſ. s à la place de u, parce qu'on peut négliger dans

la première approximation la quantité très-petite v; on pourroit même négliger aussi le terme e cos. s qui est fort petit vis-à-vis de 1, la valeur de e étant environ $= \frac{1}{20}$; mais comme on sait que dans la théorie de la Lune, il se rencontre des termes qui augmentent beaucoup par l'intégration, il faut voir si de pareils termes ne peuvent pas venir du terme e cos. s; or comme les coëfficiens p, π, q & n diffèrent peu de l'unité, il est d'abord clair que les deux termes qui contiennent sin. $(\xi + \eta)$ & sin. ζ sous le signe $\int$, étant multipliés par cos. s, en donneront deux autres qui contiendront sin. $(\xi + \eta - s)$ & sin. $(\zeta - s)$, & qui étant multipliés par $d\varphi$ & intégrés ensuite, se trouveront augmentés dans les raisons de 1 à $\frac{1}{\pi - n}$ & de 1 à $\frac{1}{q - n}$; ainsi il sera bon de conserver ces termes.

De plus, les termes qui contiennent des sinus ou cosinus de $2(\xi + \eta)$ & de 2ζ, étant multipliés par cos. s, en donneront d'autres qui contiendront des sinus ou cosinus de $2(\xi + \eta) - s$ & de $2\zeta - s$; & ces sortes de termes augmenteront beaucoup dans la valeur de v, puisqu'ils devront être divisés par les quantités très-petites $(2\pi - p)^2 - n^2$ & $(2q - p)^2 - n^2$; il faudra donc aussi avoir recours aux termes de cette espèce.

A l'exception des termes dont nous venons de parler, on pourra mettre par-tout ailleurs 1 à la place de u, & on trouvera, toutes réductions faites,

$$\Omega = L \text{ cos. } 2(\xi + \eta) + M \text{ cos. } (\xi + \eta) + N \text{ cos. } 3(\xi + \eta) + P \text{ cos. } 2\zeta + Q \text{ sin. } \zeta + R \text{ sin. } 3\zeta + S \text{ cos. } [2(\xi + \eta) - s] + T \text{ cos. } (\xi + \eta - s) + V \text{ cos. } (2\zeta - s) + X \text{ sin. } (\zeta - s);$$

où les coëfficiens L. M, &c. auront les valeurs suivantes.

$$L = \frac{9\varepsilon^2}{8\gamma^2 k^2} + \frac{9\varepsilon^2}{8\gamma^2 k^4 \pi},$$

$$M = \frac{9\varepsilon\left(1 + \frac{3\varepsilon^2}{4}\right)}{4\gamma^2 k^2 \lambda} + \frac{3\varepsilon\left(1 + \frac{3\varepsilon^2}{4}\right)}{2\gamma^2 k^4 \lambda \pi},$$

$$N = \frac{15\,\varepsilon^3}{8\,\gamma^2\,k^2\,\lambda} + \frac{5\,\varepsilon^3}{8\,\gamma^2\,k^4\,\lambda\,\pi},$$

$$P = \frac{3\,C}{2\,k^2} - \frac{C}{k^4 q},$$

$$Q = \frac{2\,D}{k^2} - \frac{D}{k^4 q},$$

$$R = \frac{2\,E}{k^2} - \frac{E}{k^4\,q},$$

$$S = -\frac{27\,\varepsilon^2\,e}{16\,\gamma^2\,k^2} - \frac{9\,\varepsilon^2\,e}{2\,\gamma^2\,k^4\,(2\pi - p)} + \frac{9\,\varepsilon^2\,e\,p}{16\,\gamma^2},$$

$$T = -\frac{15\,\varepsilon\,(1 + \frac{3\,\varepsilon^2}{4})\,e}{4\,\gamma^2\,k^4\,\lambda\,(\pi - p)},$$

$$V = \frac{3\,C e}{2\,k^2} - \frac{C e}{k^4\,(2\,q - p)} - \frac{C p e}{2\,k^2},$$

$$X = -\frac{2\,D e}{k^4\,(q - p)}.$$

Et de-là on trouvera

$$v = \frac{L\ \text{cos.}\ 2\,(\xi + \eta)}{4\,\pi^2 - n^2} + \frac{M\ \text{cos.}\,(\xi + \eta)}{\pi^2 - n^2} + \frac{N\ \text{cos.}\ 3\,(\xi + \eta)}{9\,\pi^2 - n^2}$$
$$+ \frac{P\ \text{cos.}\ 2\,z}{4q^2 - n^2} + \frac{Q\ \text{sin.}\,z}{q^2 - n^2} + \frac{R\ \text{sin.}\ 3\,z}{9q^2 - n^2} + \frac{S\,\text{cos.}\,[2\,(\xi + \eta) - s]}{(2\,\pi - p)^2 - n^2}$$
$$+ \frac{T\ \text{cos.}\,(\xi + \eta - s)}{(\pi - p)^2 - n^2} + \frac{V\ \text{cos.}\,(2\,z - s)}{(2\,q - p^2 - n^2} + \frac{X\ \text{sin.}\,(z - s)}{(q - p)^2 - n^2}.$$

(29.) Il ne s'agit plus maintenant que de ſubſtituer dans la quantité $\frac{\Pi}{u^3}$, c'eſt-à-dire *(art. 25)* dans celle-ci (x étant $= \frac{1}{u}$)

$$-\frac{9\,\varepsilon^2}{8\,\gamma^2\,u^4}\ \text{sin.}\ 2\,(\xi + \eta) - \frac{3\,\varepsilon\,(1 + \frac{3\,\varepsilon^2}{4})}{4\,\gamma^2\,\lambda\,u^5}\ \text{sin.}\,(\xi + \eta)$$
$$- \frac{15\,\varepsilon^3}{16\,\gamma^2\,\lambda\,u^5}\ \text{sin.}\ 3\,(\xi + \eta) + C u\ \text{sin.}\ 2\,z - \frac{D\,u^2}{2}\ \text{cos.}\ z$$
$$- \frac{3\,E}{2}\,u^2\ \text{cos.}\ 3\,z,$$ à la place de u ſa valeur $1 + e\ \text{cos.}\,s + v$,

& de tenir compte uniquement des termes qui contiendront des ſinus ou coſinus de l'angle $\xi + \eta - z$ ou de ſes multiples quelconques *(art. 23)*; nous allons pour cela examiner ſéparément chacun des termes de la quantité dont il

s'agit, & nous supposerons, pour abréger, l'angle $\xi + \eta - \zeta$ égal à α, ainsi qu'on l'a déjà fait plus haut.

Et 1.° il est clair que le terme $- \frac{9\varepsilon^2}{8r^2u^4}$ sin. $2(\xi + \eta)$ pourra donner un terme de la forme sin. 2α, pourvu que la quantité $\frac{1}{u^4}$ en contienne un de la forme cos. 2ζ; or $\frac{1}{u^4} = 1 - 4(e\,\text{cos}.\,s + v) + 10(e\,\text{cos}.\,s + v)^2 - \alpha$; ainsi on aura d'abord dans la valeur de $\frac{1}{u^4}$, en vertu du terme $-4v$, celui-ci $-\frac{4P}{4q^2 - n^2}$ cos. 2ζ; ensuite on trouvera, en vertu du terme $10 \cdot 2$ cos. $s \cdot v$ cet autre-ci $\frac{10eV}{(2q - p)^2 - n^2}$ cos. 2ζ; de sorte que le terme dont il s'agit donnera le suivant $\frac{9\varepsilon^2}{8r^2}\left(-\frac{2P}{4q^2 - n^2} + \frac{5eV}{(2q - p)^2 - n^2}\right)$ sin. 2α.

2.° Le terme $-\frac{3\varepsilon\left(1 + \frac{3\varepsilon^2}{4}\right)}{4r^2\lambda u^5}$ sin. $(\xi + \eta)$ donnera un terme de cette forme sin. α ou cos. α, pourvu que la quantité $\frac{1}{u^5}$ en contienne de la forme cos. ζ ou sin. ζ; or $\frac{1}{u^5} = 1 - 5(e\,\text{cos}.\,s + v) + 15(e\,\text{cos}.\,s + v)^2 - \alpha$; & il est visible que le terme $-5v$ donnera d'abord celui-ci $\frac{5Q\,\text{sin}.\,\zeta}{q^2 - n^2}$, & que le terme $15 \cdot 2e$ cos. $s \cdot v$ donnera celui-ci $\frac{15eX}{(q - p)^2 - n^2}$ sin. ζ; ainsi le terme en question donnera le suivant $-\frac{3\varepsilon\left(1 + \frac{3\varepsilon^2}{4}\right)}{4r^2\lambda}\left(-\frac{5Q}{2(q^2 - n^2)} + \frac{15eX}{2[(q - p)^2 - n^2]}\right)$ cos. α.

3.° Le terme $-\frac{15\varepsilon^3}{16r^2\lambda u^5}$ sin. $3(\xi + \eta)$ donnera un terme de la forme sin. 3α ou cos. 3α, pourvu que la quantité

$\frac{1}{u^5}$ en contienne de la forme cos. 3ζ ou sin. 3ζ; mais $\frac{1}{u^5} = 1 - 5(e \cos. s + v) + 15(e \cos. s + v)^2 \alpha$, & l'on trouvera que le terme $-5v$, produira celui-ci $-\frac{5R}{9q^2 - n^2}$ sin. 3ζ, & que les autres termes n'en produiront aucun de cette espèce; donc le terme dont il s'agit donnera simplement celui-ci $\frac{15\varepsilon^3}{16\gamma^2\lambda} \times \frac{-5R}{2(9q^2 - n^2)}$ cos. 3α.

4.° Le terme Cu sin. 2ζ, en donnera un de la forme sin. 2α, si u ou v en contient un de la forme cos. $2(\xi + \eta)$; or le terme de cette forme qui est contenu dans v, est $\frac{L \cos. 2(\xi + \eta)}{4\pi^2 - n^2}$; ainsi on aura pour le terme dont il s'agit, celui-ci $\frac{CL}{2(4\pi^2 - n^2)}$ sin. 2α.

5.° Le terme $-\frac{D}{2}u^2$ cos. ζ en donnera de la forme cos. α, si u^2 en contient de la forme cos. $(\xi + \eta)$; mais $u^2 = 1 + 2e \cos. s + 2v + (e \cos. s + v)^2$, & l'on trouve que $2v$ contient d'abord le terme $\frac{2M \cos. (\xi + \eta)}{\pi^2 - n^2}$, & que $2e \cos. s \cdot v$ contiendra le terme $\frac{eT}{(\pi - p)^2 - n^2}$ cos. $(\xi + \eta)$; donc on aura par le terme en question, celui-ci $-\frac{D}{2}\left(\frac{M}{\pi^2 - n^2} + \frac{eT}{2[(\pi - p)^2 - n^2]}\right)$ cos. α.

Enfin le terme $-\frac{3E}{2}u^2$ cos. 3ζ, donnera un terme de la forme cos. 3α, si u^2 en contient de la forme cos. $3(\xi + \eta)$; or on trouve que $2v$ contient celui-ci $\frac{2N \cos. 3(\xi + \eta)}{9\pi^2 - n^2}$, & que les autres termes de la valeur de u^2 n'en contiennent aucun de cette espèce; ainsi on aura simplement le terme $-\frac{3E}{2} \times \frac{N}{9\pi^2 - n^2}$ cos. 3α.

Raſſemblant donc tous les termes qu'on vient de trouver, on aura les trois ſuivans

$$\left[\frac{9\varepsilon^2}{8v^2}\left(-\frac{2P}{4q^2-n^2}+\frac{5eV}{(2q-p)^2-n^2}\right)+\frac{CL}{2(4\pi^2-n^2)}\right]\text{ſin. }2\alpha,$$

$$\left.\begin{array}{l}+\left[\dfrac{3\varepsilon\left(1+\dfrac{3\varepsilon^2}{4}\right)}{8v^2\lambda}\left(\dfrac{5Q}{q^2-n^2}-\dfrac{15eX}{(q-p)^2-n^2}\right)\right. \\ \left.\quad-\dfrac{D}{2}\left(\dfrac{M}{\pi^2-n^2}+\dfrac{eT}{2[(\pi-p)^2-n^2]}\right)\right]\end{array}\right\}\text{coſ. }\alpha,$$

$$+\left(\frac{15\varepsilon^3}{16v^2\lambda}\times\frac{5R}{2(9q^2-n^2)}-\frac{3E}{2}\times\frac{N}{9\pi^2-n^2}\right)\text{coſ. }3\alpha,$$

qui ſeront contenus dans la valeur de $\frac{\Pi}{u^3}$, & qui pourront par conſéquent donner une équation ſéculaire; & il eſt facile de ſe convaincre, avec un peu de réflexion, que ces termes ſeront effectivement les ſeuls de cette eſpèce qui pourront entrer dans la valeur de $\frac{\Pi}{u^3}$, du moins dans la première approximation; ainſi il n'y aura qu'à voir ſi l'équation ſéculaire qui en réſulte eſt conforme ou non aux obſervations.

(30.) J'obſerve d'abord que ſi on ſuppoſe que les deux hémiſphères de la Terre ſoient ſemblables, ſuppoſition à laquelle il n'eſt preſque pas permis de renoncer, du moins ſans les raiſons les plus fortes & les plus déciſives, on aura *(art. 14 & 18)* $f=0$, $f'=0$, $f''=0$; $g=0$, $g'=0$, $g''=0$; $h=0$, $h'=0$, $h''=0$; donc *(art. 24)* $D=0$ & $E=0$; & de-là *(article 28)* $Q=0$, $R=0$, $X=0$; d'où il s'enſuit que dans ce cas les trois termes ci-deſſus ſe réduiront à celui-ci unique

$$\left[\frac{9\varepsilon^2}{8v^2}\left(-\frac{2P}{4q^2-n^2}+\frac{5eV}{(2q-p)^2-n^2}\right)+\frac{CL}{2(4\pi^2-n^2)}\right]\text{ſin. }2\alpha;$$

de ſorte que comme α exprime la longitude de l'apogée du Soleil *(art. 23)*, on aura une équation ſéculaire apparente & analogue à celle que nous avons examinée dans l'*art. 8;* ainſi il n'y aura plus qu'à voir ſi le coëfficient de cette équation eſt tel qu'il faut pour répondre aux obſervations.

Pour cela, je remarque que suivant les observations on a $p - 1 = - \frac{6' \, 41''}{13^d \, 10' 35''} = \frac{-1}{108\frac{1}{3}}$; ce qui, à cause de $\nu^2 = 178$, ne diffère pas beaucoup de $\frac{-3}{2\nu^2}$; ensuite on a aussi par les observations $\pi - 1 = - \frac{16''}{365\frac{1}{4}(13^d \, 10' 35'')}$ & $q - 1 = - \frac{50''}{365\frac{1}{4}(13^d \, 10' \, 35'')}$; d'où l'on voit que les quantités π & q sont presque égales à l'unité; du moins la différence en est si petite, qu'il seroit inutile d'en tenir compte dans les coëfficiens.

De plus, on a déjà observé que la constante k est aussi à très-peu-près égale à l'unité; du moins la différence ne peut être que de l'ordre de ε^2 & de $\frac{1}{\nu^2}$; c'est pourquoi on aura, sans erreur sensible *(art. 27)* $L = \frac{9\varepsilon^2}{4\nu^2}$, $P = \frac{C}{2}$, $V = 0$; & faisant ces substitutions dans le coëfficient du terme sin. 2α trouvé ci-dessus, on verra que tout se détruira, en sorte que ce coëfficient deviendra nul de lui-même.

(31.) Si les deux termes $\frac{9\varepsilon^2}{8\nu^2} \times \frac{-2P}{4q^2 - n^2} + \frac{CL}{2(4\pi^2 - n^2)}$ ne se détruisoient pas, on auroit une quantité de l'ordre de $\frac{\varepsilon^2 C}{\nu^2}$; de même si les différens termes de la valeur de V ne se détruisoient pas entr'eux, cette quantité seroit de l'ordre de Ce, & par conséquent, à cause de $(2p - q)^2 - n^2 = (1 - \frac{3}{\nu^2})^2 - 1 + \frac{3}{2\nu^2} - 6B = - \frac{9}{2\nu^2} - 6B$, le terme $\frac{9\varepsilon^2}{8\nu^2} \times \frac{5eV}{(2q - p)^2 - n^2}$ seroit de l'ordre $\varepsilon^2 e^2 C$, c'est-à-dire du même ordre que les autres termes, à cause que $\frac{1}{\nu^2}$ & e^2 sont à-peu-près des quantités du même ordre.

Ainsi le coëfficient de sin. 2α dans la quantité $\frac{\Pi}{n^3}$, seroit

de l'ordre de $\frac{\varepsilon^2 C}{v^2}$, c'eſt-à-dire de l'ordre $\frac{C}{(60)^2 . 180}$, à cauſe de $\varepsilon =$ environ $\frac{1}{60}$ & de $v^2 =$ environ 180.

Dénotons, pour plus de ſimplicité, ce coëfficient par β, en ſorte que la quantité $\frac{\Pi}{u^3}$ renferme le terme β ſin. 2α; & ſi on regarde l'angle α comme conſtant, on aura $\int \frac{\Pi d\varphi}{u^3} = \beta$ ſin. $2\alpha \times \varphi$; donc (*équat. VII*) $dt = \frac{d\varphi}{k u^2} - \frac{\beta \text{ ſin.} 2\alpha}{k u^2} \varphi d\varphi$, & à cauſe que le terme tout conſtant de u^2 eſt à très-peu-près $= 1$, & que k eſt auſſi preſque $= 1$, on aura en intégrant, t ou $Z = \varphi - \frac{\beta \text{ ſin.} 2\alpha}{2} \varphi^2$ (Z étant l'angle du mouvement moyen répondant à l'angle du mouvement vrai φ); d'où $\varphi = Z + \frac{\beta \text{ ſin.} 2\alpha}{2} Z^2$; donc (*art. 2*) $\frac{\beta \text{ ſin.} 2\alpha}{2} = i = \frac{9}{10000 \times 360 \times 3600 \times \pi v^2}$, & de-là $\beta = \frac{18}{10000 \times 360 \times 3600 \times \pi v^2 \text{ ſin.} 2\alpha}$; c'eſt la valeur que doit avoir le coëfficient β pour pouvoir répondre aux obſervations. Or nous avons vu ci-deſſus que ſi les termes qui compoſent la valeur de ce coëfficient ne ſe détruiſoient pas entr'eux, du moins à très-peu-près, ce coëfficient ſeroit de l'ordre de $\frac{C}{(60)^2 . 180}$; d'où il s'enſuit que l'on devroit avoir alors pour la valeur de C, une quantité de l'ordre $\frac{18}{(100)^2 \times 360 \times \pi \text{ ſin.} 2\alpha}$, ou bien (à cauſe de $\pi =$ environ 3) de l'ordre $\frac{1}{(100)^2 \times 60 \times \text{ ſin.} 2\alpha}$; mais on a (*art. 24*) $C = \frac{3}{2}(a^2 - \frac{b^2 + c^2}{2})$ ſin. ω^2; donc il faudroit que la quantité $a^2 - \frac{b^2 + c^2}{2}$ fût de l'ordre de $\frac{1}{(100)^2 \times 90 \times \text{ ſin.} 2\alpha \text{ ſin.} \omega^2}$.

Si on ſuppoſe la Terre elliptique & homogène, on a (*art. 20*)

(art. 20), à cauſe que la diſtance de la Lune à la Terre ayant été ſuppoſée $= 1$, le rayon de la Terre eſt environ $= \frac{1}{60}$, on a, dis-je, $a^2 = \frac{1}{5(60)^2}$, $b^2 = c^2 = \frac{1}{5} \frac{1}{(60)^2} \times (1 + \frac{1}{230})^2$; donc, on aura à très-peu près dans cette hypothèſe, $a^2 - \frac{b^2 + c^2}{2} = - \frac{1}{5(60)^2} \times \frac{1}{115} = - \frac{1}{(60)^2\, 575}$; or, il eſt viſible que cette quantité eſt à peu près du même ordre que la précédente, à cauſe de $(100)^2\, 90 = 900000$, & de $(60)^2\, 575 = 2070000$; d'où l'on peut d'abord conclure que ſi les principaux termes du coëfficient de ſin. $2\,\alpha$ ne ſe détruiſoient pas, ce coëfficient ſeroit à peine ſuffiſant pour donner une équation ſéculaire conforme aux obſervations.

En général, quelle que ſoit la figure de la Terre, pourvu qu'elle ſoit un ſolide de révolution, on a, par la théorie de la préceſſion des équinoxes, $\frac{b^2 - a^2}{b^2} = \frac{1}{173}$ à peu près; or, il eſt bien aiſé de ſe convaincre que la quantité b^2 eſt néceſſairement moindre que le carré du rayon de l'équateur, c'eſt-à-dire $< \frac{1}{(60)^2}$ (la diſtance de la Lune à la Terre étant priſe pour l'unité); de ſorte qu'on aura (b^2 étant $= c^2$) $\frac{b^2 + c^2}{2} - a^2 < \frac{1}{173\,(60)^2} < \frac{1}{622800}$.

D'un autre côté, on a trouvé que, pour que le coëfficient de ſin. $2\,\alpha$, répondît aux obſervations dans l'hypothèſe où les principaux termes de ce coëfficient ne ſe détruiroient pas, il faudroit que la même quantité $\frac{b^2 + c^2}{2} - a^2$ fût de l'ordre de $\frac{1}{(100)^2\, 90\ \text{ſin.}\ 2\,\alpha\,.\ \text{ſin.}\,\omega^2}$, c'eſt-à-dire (à cauſe que ω eſt l'obliquité de l'écliptique, & α la longitude de l'apogée

du Soleil) de l'ordre $\frac{1}{(100)^2 . 90 . \text{ſin.} 15^d \frac{1}{2} . (\text{ſin.} 23^d \frac{1}{2}{}^2)} = \frac{1}{38242}$; quantité qui eſt de beaucoup plus grande que la précédente; d'où il s'enſuit que même dans cette hypothèſe on auroit peine à expliquer l'équation ſéculaire de la Lune, par le moyen du terme dont il s'agit.

Mais, puiſque nous avons trouvé que le coëfficient de ce terme eſt à peu-près nul, du moins aux quantités de l'ordre de $\frac{1}{r^2}$ près (car les valeurs de p & de k que nous avons priſes égales à l'unité, n'en diffèrent réellement que par des quantités de ce même ordre); il eſt clair que la vraie valeur de ce coëfficient ſera néceſſairement de l'ordre de $\frac{\varepsilon^2 c}{r^4}$; par conſéquent le terme dont nous parlons, ſera tout-à-fait inſuffiſant pour produire l'équation ſéculaire de la Lune, telle que les Tables de Mayer la donnent.

On trouvera à peu-près le même réſultat, ſi l'on a égard à la variabilité de l'angle α, auquel cas l'équation ſéculaire ne ſera qu'apparente, & devra avoir la valeur déterminée dans l'*article 8*.

On conclura donc de-là, que l'équation ſéculaire dont il s'agit, ne ſauroit venir de la non-ſphéricité de la Terre, tant qu'on y ſuppoſe les deux hémiſphères ſemblables; mais avant de prononcer ſur l'impoſſibilité d'expliquer cette équation par l'attraction de la Terre ſuppoſée non-ſphérique, il eſt à propos de voir ce que la diſſimilitude des hémiſphères peut donner ſur ce point.

(32.) Pour cela, il ne s'agit que d'examiner l'effet des autres termes de la formule de l'*art. 29*, c'eſt-à-dire, de ceux qui contiennent coſ. α & coſ. $3\,\alpha$, & que nous avons vu devoir diſparoître lorſque les deux hémiſphères de la Terre ſont ſemblables. Or, on a *(art. 27)* aux infiniment petits de l'ordre ε^2 près,

$$M = \frac{15\,\varepsilon}{4\,r^2\,\lambda},\ N = \frac{5\,\varepsilon^3}{2\,r^2\,\lambda},\ Q = D,\ R = E,$$

$$T = -\frac{15\varepsilon e}{4r^2\lambda(1-p)},\ x = -\frac{2De}{1-p},$$

où l'on remarquera que $1-p$, est une quantité très-petite, $= \frac{3}{2r^2}$ environ *(art. 30)*. Substituant donc ces valeurs dans les deux termes dont nous venons de parler, ils se réduiront (en y négligeant ce qu'on doit y négliger) à celui-ci;

$$\left(\frac{3\varepsilon}{8r^2\lambda} \times \frac{5D}{1-n^2} - \frac{D}{2} \times \frac{15\varepsilon}{4r^2\lambda(1-n^2)}\right) \text{cos. } \alpha,$$

lequel, comme l'on voit, disparoît de lui-même.

Il arrive donc de nouveau, par une fatalité singulière, que les deux principaux termes du coëfficient de cos. α, se détruisent. Si cela n'étoit pas, il est clair que ce coëfficient seroit de l'ordre de $\frac{\varepsilon D}{r^2\lambda(1-n^2)}$, c'est-à-dire, à cause de $n^2 = 1 - \frac{3}{2r^2}$ à très-peu-près *(art. 27)* de l'ordre de $\frac{\varepsilon D}{\lambda}$; or, λ distance du Soleil à la Terre est environ $= 200$, puisque celle de la Lune à la Terre est supposée $= 1$; donc, $\frac{1}{\lambda}$ sera de l'ordre de $\frac{1}{r^2}$; de plus, il est facile de voir que les quantités D & E *(art. 24)*, doivent être généralement parlant, plus petites que la quantité C dans la raison du rayon de la Terre à la distance de la Lune, c'est-à-dire, dans la raison de $1 : 60$, parce que les quantités a^2, b^2, c^2, ne sont que de deux dimensions, au lieu que les quantités f^3, f'^3, f''^3, sont de trois *(art. 18)*; ainsi, on peut regarder les quantités de l'ordre de $\frac{\varepsilon D}{\lambda}$ comme du même ordre que celles de l'ordre $\frac{\varepsilon^2 C}{r^2}$; d'où il s'ensuit que si les principaux termes du coëfficient de cos. α ne se détruisoient pas, ce coëfficient seroit du même ordre que celui de sin. 2α, dans le cas où les termes de celui-ci ne se détruiroient pas *(art. 31)*; ainsi, on pourra faire ici le même raisonnement que nous avons fait dans l'article précédent, & en tirer des

conclusions semblables. Il est vrai que, comme les quantités f^3, f'^3, f''^3, sont indéterminées, on pourroit les prendre telles que les coëfficiens de *cos.* α & de *cos.* $3\,\alpha$, eussent la valeur requise pour donner l'équation séculaire de Mayer; mais il est facile de se convaincre qu'il faudroit, pour cela, supposer aux deux hémisphères de la Terre, des figures trop dissemblables, pour qu'on pût les accorder avec les mesures des degrés & la théorie de la précession des équinoxes, & de la nutation de l'axe de la Terre.

(33.) Comme dans les calculs précédens, nous avons toujours fait abstraction de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'égard de l'écliptique, on pourroit peut-être douter au premier aspect, si cette circonstance ne doit pas apporter quelque changement à nos résultats; mais pour lever ce doute, il suffit de remarquer que l'inclinaison de l'orbite ne peut avoir d'autre influence dans nos calculs, que d'introduire un sixième angle ζ égal à la distance de la Lune au nœud, lequel se combineroit avec les cinq autres que nous avons considérés dans l'*art. 23;* or, comme le mouvement des nœuds est assez prompt, étant à celui du Soleil dans la raison de 1 : 18; il est facile de se convaincre que cet angle ζ, ne sauroit donner aucune nouvelle combinaison qui puisse servir à expliquer l'équation séculaire; de sorte qu'on est, ce me semble, bien en droit de conclure que cette équation, si elle est réelle, ne peut être l'effet de la figure non-sphérique de la Terre.

(34.) Après avoir examiné l'effet de l'action de la Terre sur la Lune, eu égard à la non-sphéricité de la Terre, il conviendroit aussi d'entrer dans un pareil examen, relativement à la figure non-sphérique de la Lune; car il est clair qu'il doit résulter aussi de cette circonstance, de nouvelles forces perturbatrices de l'orbite de la Lune; & il pourroit arriver que ces forces combinées avec celles qui viennent de l'action du Soleil, pussent servir à expliquer l'équation séculaire. Aussi, l'Académie demande-t-elle expressément dans son programme, qu'on ait égard à la figure non-sphérique tant

de la Terre que de la Lune. D'ailleurs, l'examen dont il s'agit ne peut avoir de difficultés après ce que nous avons démontré jusqu'ici, puisqu'il doit être aisé d'appliquer à la Lune les formules que nous avons trouvées pour la Terre; mais il ne sera pas même nécessaire d'entreprendre un nouveau calcul sur cet objet, pour décider la question de l'équation séculaire, & on pourra s'en dispenser par les considérations suivantes.

Il est clair que pour avoir les forces perturbatrices de l'orbite de la Lune, provenantes de la non-sphéricité de cette Planète, il n'y aura qu'à prendre les formules des *art. 19 & suiv.* en sens contraire, en appliquant à la Lune les quantités qui, dans ces formules, se rapportent à la Terre.

Ainsi, ω sera l'inclinaison de l'équation lunaire sur l'écliptique, laquelle est d'environ 2^d; z sera la longitude de la Terre vue de la Lune, & comptée depuis le nœud de son équateur; de sorte que, comme on sait par les observations que les nœuds de l'équateur lunaire coïncident toujours, du moins à très-peu-près, avec ceux de l'orbite de la Lune, l'angle z sera égal à la distance de la Lune au nœud de son orbite, angle que nous avons déjà nommé ζ ci-dessus *(art. 33)*; ψ sera la distance du premier méridien de la Lune au nœud de son équateur; & puisque la Lune présente toujours à la Terre la même face, à la libration près qui est très-petite & périodique, si on prend, ce qui est permis, pour premier méridien, celui qui est dirigé vers le centre de la Terre, lorsque la libration est nulle, & qu'on nomme Λ l'angle de la libration, on aura $\psi = \zeta + \Lambda$. Enfin, la quantité y exprimera la latitude de la Terre vue de la Lune, & aura par conséquent la même valeur que dans les formules citées, où elle dénote la latitude de la Lune vue de la Terre; de sorte qu'on aura, en nommant χ l'inclinaison de l'orbite lunaire, $\text{tang.}\, y = \text{tang.}\, \chi \,\text{sin.}\, \zeta$, ou à très-peu-près, à cause de χ très-petit, $y = \chi \,\text{sin.}\, \zeta$. Quant à la quantité Λ qui exprime la libration de la Lune, elle doit être proportionnelle à l'équation du centre de la Lune, ou

plus exactement, à la somme de toutes les équations qui affectent le mouvement moyen de cette Planète; il pourroit à la vérité s'y joindre encore une équation provenante de la libration physique, supposé qu'elle ait véritablement lieu; mais comme il n'y a encore rien de bien constaté sur ce point, ni par la théorie, ni par les observations, on pourra se dispenser d'y avoir égard; & d'ailleurs quand on en voudroit tenir compte, on trouveroit aisément qu'il n'en pourroit rien résulter pour l'équation séculaire de la Lune, à moins de faire des suppositions trop forcées & trop peu admissibles sur la figure de cette Planète.

On voit donc par-là, que l'expression des forces perturbatrices de la Lune, provenantes de la non-sphéricité de sa figure, ne pourront renfermer que les mêmes angles qui composent les argumens des inégalités de la Lune, produites par l'action du Soleil, c'est-à-dire, les angles ξ, s, $\varkappa$, ζ *(art. 23 & 33)*; or, il n'y a aucune combinaison de ces angles ni de leurs multiples qui puisse donner un angle constant, ou à très-peu-près constant, à moins d'admettre des multiples fort grands, auquel cas le coëfficient qui affecteroit le sinus ou le cosinus d'un tel angle, seroit d'autant plus petit, & par conséquent insuffisant pour l'explication de l'équation séculaire (sur quoi *voyez le VI.^e Vol. des Opuscules de M. d'Alembert)*; ainsi on peut être assuré d'avance, que la non-sphéricité de la Lune ne peut être d'aucune utilité dans la recherche de cette équation.

(35.) Je n'entreprendrai pas maintenant d'examiner si l'équation séculaire de la Lune, peut être l'effet de l'action des autres Planètes: cette discussion nous mèneroit trop loin & demanderoit même un ouvrage particulier, auquel le défaut de temps & mes occupations actuelles, m'empêchent de me livrer; mais il ne paroît pas impossible de pouvoir décider la question *à priori*, par des considérations analogues à celles de l'*art. précéd.* En effet, il est facile de voir que les expressions des forces perturbatrices de la Lune, produites par l'action d'une Planète quelconque, ne peuvent dépendre que

des angles s, ν, ζ relatifs à la Lune, & des angles analogues s', ν', ζ' relatifs à la Planète (s' étant l'anomalie de la Planète, ν' ſon élongation à la Terre, & ζ' ſa diſtance au nœud); de ſorte que ces expreſſions ne renfermeront que des ſinus ou coſinus d'angles formés par la combinaiſon de ceux-ci & de leurs multiples; & on prouvera aiſément que la quantité $\frac{\Pi}{u^3}$ ne pourra être formée que de pareils ſinus ou coſinus; & ſi on veut avoir égard, en même temps, à l'action du Soleil, il ſe joindra encore à ces ſix angles, celui de l'anomalie du Soleil qu'on a nommé ci-deſſus ξ. Tout ſe réduira donc à examiner ſi l'on peut trouver une combinaiſon des ſept angles s, ν, ζ, s', ν', ζ', ξ & de leurs multiples, laquelle donne un angle tout-à-fait, ou du moins à très-peu-près conſtant; or, d'après les valeurs connues des rapports de ces angles, on pourra s'aſſurer aiſément, qu'il n'eſt guère poſſible de former de telles combinaiſons, ſans employer des multiples aſſez grands; d'où l'on peut conclure que les termes qui pourront produire une équation ſéculaire, ne ſe préſenteront qu'après pluſieurs corrections de l'orbite, & ſeront par conſéquent d'un ordre beaucoup trop petit, pour pouvoir donner une équation ſenſible & conforme aux obſervations.

(36.) Puis donc que l'équation ſéculaire de la Lune, telle que les Tables de Mayer la donnent, ne peut être l'effet de la non-ſphéricité de la Terre, ni de celle de la Lune, ni de l'action des autres Planètes ſur la Lune, & par conſéquent ne ſauroit être expliquée par le ſecours de la gravitation ſeule; il faut que, ſi cette équation eſt réelle, elle provienne de quelqu'autre cauſe, comme de la réſiſtance que la Lune éprouveroit de la part de quelque fluide très-rare, dans lequel elle ſeroit mue; mais comme, d'un autre côté, l'hypothèſe d'un fluide très-ſubtil, dont la réſiſtance altèreroit ſenſiblement le mouvement des corps céleſtes, n'eſt pas encore bien confirmée par les obſervations des autres Planètes, que même elle paroit être contredite par celles de Saturne, dont le mouvement va en ſe ralentiſſant, au lieu de s'accélérer comme

cela devroit être, en vertu de la résistance de l'éther; il me semble qu'on ne doit pas admettre cette hypothèse uniquement dans la vue d'expliquer par son moyen, l'équation séculaire dont il s'agit.

Je dis *si cette équation est réelle ;* car il me paroît que les preuves que l'on en a jusqu'à présent, ne sont pas bien décisives, puisqu'elles sont fondées uniquement sur quelques observations faites dans des siècles fort éloignés, & sur l'exactitude desquelles on ne sauroit guère compter.

(37.) M. Dunthorn, le premier après M. Halley qui ait adopté l'hypothèse de l'accélération de la Lune, & le seul, ce me semble, qui soit entré là-dessus dans quelques détails, ne s'en est pas tenu à la simple comparaison des observations des années 720 avant J. C. & 977, 978 après J. C. avec les modernes, pour prouver la nécessité de cette accélération; il a aussi discuté dans le même objet, quelques autres observations faites dans les siècles intermédiaires *(voyez le Vol. 46 des Transact. Philosoph.);* mais quoique ces observations paroissent confirmer en gros, l'accélération du mouvement moyen de la Lune, elles ne s'accordent cependant pas entre elles, à beaucoup près, ni sur la quantité de l'accélération séculaire, ni même sur la loi de cette accélération; c'est ce que je vais faire voir en empruntant les résultats des calculs de ce savant Astronome.

Les observations qu'il a examinées sont, en les rangeant par ordre chronologique, 1.° une éclipse de Lune observée à Babilone le 9 Mars 720 avant J. C. & rapportée par Ptolémée *dans le IV.^e Liv. de son Almageste, chap. VI.* On ne sait d'autres circonstances de cette éclipse, sinon qu'elle a commencé plus d'une heure après le lever de la Lune, & qu'elle a été totale. M. Dunthorne ayant fait à cette observation les réductions convenables, a trouvé que le commencement a dû être à $6^h\ 46'$; ensuite, l'ayant calculée par ses propres Tables, qui n'ont jamais été publiées, que je sache, a trouvé que le commencement auroit dû être à $8^h\ 32'$; ce qui donne une anticipation de $1^h\ 46'$ de l'observation sur

les Tables, & par conſéquent une erreur de 54′ ſur la Longitude calculée.

2.° Une éclipſe de Lune obſervée à Babylone le 23 Décembre 382 avant J. C. (il faut remarquer que M. Dunthorn rapporte fauſſement cette éclipſe à l'année 312). Le commencement en a été obſervé, au rapport de Ptolémée, une demi-heure avant la fin de la nuit; d'où M. Dunthorn dit que ce commencement a été à 6^h 42′ du matin, tandis que les Tables ne le lui donnent qu'à 8^h 15′; ce qui fait une anticipation de 1^h 33′, & par conſéquent une erreur de 43′ 15″ ſur la Longitude calculée.

3.° Une éclipſe de Lune obſervée à Alexandrie le 22 Septembre 200 avant J. C. & rapportée par Ptolémée d'après Hipparque. Cette éclipſe a dû commencer une demi-heure avant le lever de la Lune, ce qui revient, ſuivant M. Dunthorn, à 5^h 32′, tandis que les Tables ne lui donnent que 6^h 12′; ce qui fait une anticipation de 40′, & par conſéquent une erreur de 20′ 20″ ſur la Longitude calculée.

4.° Une éclipſe de Soleil obſervée par Théon à Alexandrie le 16 Juin 364 après J. C. & rapportée dans ſon commentaire ſur l'Almageſte. Le commencement en a été à 3^h 18′; d'où M. Dunthorn conclut la diſtance de la Lune au Soleil de 39′ 41″, tandis que les Tables ne la lui donnent que de 35′ 25″; ce qui fait une différence de 4′ 16″, qui eſt l'erreur des Tables au temps de l'obſervation.

5.° Une éclipſe de Soleil obſervée au Caire le 13 Décembre 977, & dont le commencement eſt arrivé lorſque le Soleil étoit haut de 15^d 43′, & la fin, lorſque la hauteur du Soleil étoit de $33^d \frac{1}{2}$. M. Dunthorn conclut de-là que le commencement de cette éclipſe a dû être à 8^h 25′, & la fin à 10^h 45′ du matin; & il trouve que l'erreur de ſes Tables ſur la longitude de la Lune, eſt de 7′ 36″ dont la Lune s'eſt trouvée plus avancée.

6.° Une éclipſe de Soleil obſervée dans le même endroit le 8 Juin 978, & qui a commencé lorſque le Soleil étoit haut de 56 degrés, & finie lorſqu'il étoit haut de 26 degrés.

M. Dunthorn trouve que le commencement de cette éclipſe a dû être à $2^h\ 31'$, & la fin à $4^h\ 50'$; d'où il conclut l'erreur de ſes Tables ſur la longitude de $8'\ 45''$ dont la Lune étoit plus avancée.

Ces deux obſervations ſe trouvent dans l'Hiſtoire céleſte de Tycho, & ſont tirées d'un manuſcrit Arabe qui renferme les obſervations de Ibn Jonis, & qui ſe trouve dans la Bibliothèque de Leyde; ce ſont celles dont nous avons parlé au commencement de ces Recherches.

Enfin, une éclipſe de Soleil obſervée à Nuremberg par Walter le 29 Juillet 1478, laquelle donne une erreur de 10′ ſur la longitude calculée ; mais comme il en réſulte auſſi une erreur en latitude de $9'\ 12''$, M. Dunthorn croit cette obſervation trop inexacte pour qu'on puiſſe s'y fixer.

Raſſemblant maintenant ces réſultats, on aura les élémens ſuivans.

ANNÉES des OBSERVATIONS.	ERREURS des TABLES DE DUNTHORN.
720 avant J. C.	$-\ 54'\ 0''$
382.	$-\ 47.\ 15.$
200.	$-\ 20.\ 20.$
364 après J. C.	$-\ 4.\ 16.$
977.	$+\ 7.\ 36.$
978.	$+\ 8.\ 45.$
1478.	$+\ 10.\ 29.$

(38.) Il paroît en général par cette Table, que le mouvement de la Lune a dû s'accélérer continuellement depuis l'année 720 avant J. C. juſqu'à préſent ; voyons donc quelle doit être la quantité & la loi de cette accélération, pour répondre aux obſervations que nous venons de rapporter.

Pour cela, je remarque qu'entre la première & la troiſième

obſervation il y a un intervalle de cinq cents vingt ans; qu'entre celle-ci & la quatrième il y a un intervalle de cinq cents ſoixante-trois ans; qu'entre la quatrième & la cinquième il y a un intervalle de ſix cents trente-trois ans; qu'enfin entre la cinquième & la ſeptième il y a un intervalle de cinq cents ans; d'où l'on voit que ces intervalles ne ſont pas fort différens entr'eux, en ſorte qu'on pourra, ſans craindre de grandes erreurs, les prendre & les traiter comme égaux.

De cette manière donc, les erreurs des Tables de Dunthorn ſeront à-peu-près dans des intervalles de temps égaux, — 55′, — 20′, — 4′, + 8′, + 10′; & ſi on ſuppoſe que ces erreurs ſoient dûes à une équation qui augmente comme les carrés des temps, & qu'il faille de plus changer l'époque & le mouvement moyen des Tables; il eſt clair que les différences ſecondes ſeront conſtantes, & que la moitié de la valeur de cette différence conſtante priſe négativement, ſera l'équation ſéculaire pour un eſpace de temps égal à l'intervalle d'une obſervation à l'autre : or je trouve en prenant ſucceſſivement les différences

— 54	— 20	— 4	+ 8	+ 10	Erreurs des Tables.
— 34	— 16	— 12	— 2		Premières differ.
— 18	— 4	— 10			Secondes differ.

& comme les différences ſecondes ſont trop inégales entre elles, je crois pouvoir en conclure qu'on ne ſauroit ſauver les erreurs des Tables par un ſimple changement de l'époque & du mouvement moyen combiné avec une équation ſéculaire qui augmente comme les carrés des temps.

(39.) Mais voyons encore ſi on pourroit concilier les obſervations avec les Tables, en introduiſant dans celles-ci

une équation séculaire apparente, qui dépende du sinus d'un certain angle qui croisse ou décroisse uniformément.

Soit p le changement qu'il faudroit faire à l'époque des Tables pour l'observation de 720 avant J. C. q le changement qu'il faudroit faire au mouvement moyen pour cinq cents cinquante ans environ, ce qui est l'intervalle moyen entre les observations, α l'argument de l'équation séculaire pour l'observation de 720 avant J. C. φ le mouvement ou la variation de cet argument pour cinq cents cinquante ans, & f le coëfficient ou la plus grande valeur de l'équation; on aura donc pour les erreurs des Tables dans les cinq observations dont il s'agit, supposées équidistantes les quantités

$p + f \sin. \alpha,\ p + q + f \sin. (\alpha + \varphi),$
$p + 2q + f \sin. (\alpha + 2\varphi),\ p + 3q + f \sin. (\alpha + 3\varphi),$
$p + 4q + f \sin. (\alpha + 4\varphi)$; donc

$$p + f \sin. \alpha = -54,$$
$$p + q + f \sin. (\alpha + \varphi) = -20,$$
$$p + 2q + f \sin. (\alpha + 2\varphi) = -4,$$
$$p + 3q + f \sin. (\alpha + 3\varphi) = 8,$$
$$p + 4q + f \sin. (\alpha + 4\varphi) = 10,$$

équations par lesquelles on pourra déterminer les cinq inconnues p, q, f, α, φ. Pour cela, j'ajoute la première & la troisième, j'ai

$$3(p + q) + f [\sin. \alpha + \sin. (\alpha + 2\varphi)] = -58,$$

mais $\sin. \alpha + \sin. (\alpha + 2\varphi) = 2 \cos. \varphi \times \sin. (\alpha + \varphi)$; donc, on aura en divisant par deux,

$$p + q + f \cos. \varphi \times \sin. (\alpha + \varphi) = -29;$$

& de-là,

$$f \sin. (\alpha + \varphi) = -\frac{29 + p + q}{\cos. \varphi};$$

or, la seconde équation donne

$$f \sin. (\alpha + \varphi) = -20 - p - q;$$

donc, comparant ces deux valeurs, on aura

$\frac{29 + p + q}{\text{cof.}\,\varphi} = 20 + p + q$; d'où

$p + q = \frac{20\ \text{cof.}\,\varphi - 29}{1 - \text{cof.}\,\varphi}$.

De même, en ajoutant la feconde & la quatrième équation, on aura

$2(p + 2q) + f[\text{fin.}(\alpha + \varphi) + \text{fin.}(\alpha + 3\varphi)] = -12$,

favoir, à caufe de fin. $(\alpha + \varphi)$ + fin. $(\alpha + 3\varphi) = 2$ cof. φ fin. $(\alpha + 2\varphi)$, $p + 2q + f\,\text{cof.}\,\varphi \times \text{fin.}(\alpha + 2\varphi) = -6$;

d'où l'on tire f fin. $(\alpha + 2\varphi) = -\frac{6 + p + 2q}{\text{cof.}\,\varphi}$;

& comme la troifième équation donne f fin. $(\alpha + 2\varphi) = -4 - p - 2q$,

on aura par la comparaifon de ces valeurs,

$\frac{6 + p + 2q}{\text{cof.}\,\varphi} = 4 + p + 2q$; & de-là,

$p + 2q = \frac{4\ \text{cof.}\,\varphi - 6}{1 - \text{cof.}\,\varphi}$.

On comparera de même entr'elles les trois dernières équations; & comme M. Dunthorn regarde l'obfervation de Walter qui a donné 10′ d'erreur, comme un peu fufpecte, nous prendrons en général 2 m pour l'erreur de cette obfervation; ainfi, on aura d'abord en ajoutant la troifième & la cinquième équation,

$2(p + 3q) + f(\text{fin.}(\alpha + 2\varphi) + \text{fin.}(\alpha + 4\varphi)] = 2m - 4$,

& à caufe de fin. $(\alpha + 2\varphi)$ + fin. $(\alpha + 4\varphi) = 2$ cof. $\varphi \times$ fin. $(\alpha + 3\varphi)$,

$p + 3q + f\,\text{cof.}\,\varphi \times \text{fin.}\,(\alpha + 3\varphi) = m - 2$; d'où

f fin. $(\alpha + 3\varphi) = \frac{m - 2 - p - 3q}{\text{cof.}\,\varphi}$;

mais la quatrième équation donne f fin. $(\alpha + 3\varphi) = 8 - p - 3q$; donc $8 - p - 3q = \frac{m - 2 - p - 3q}{\text{cof.}\,\varphi}$;

d'où $p + 3q = \frac{m - 2 - 8\ \text{cof.}\,\varphi}{1 - \text{cof.}\,\varphi}$.

On a donc maintenant les trois équations

$$p + q = \frac{20 \text{ cof. } \varphi - 29}{1 - \text{cof. } \varphi},$$

$$p + 2q = \frac{4 \text{ cof. } \varphi - 6}{1 - \text{cof. } \varphi},$$

$$p + 3q = \frac{m - 2 - 8 \text{ cof. } \varphi}{1 - \text{cof. } \varphi};$$

d'où l'on tire d'abord celles-ci,

$$q = \frac{-16 \text{ cof. } \varphi + 23}{1 - \text{cof. } \varphi} = \frac{m + 4 - 12 \text{ cof. } \varphi}{1 - \text{cof. } \varphi};$$

& par conféquent,

$-16 \text{ cof. } \varphi + 23 = m + 4 - 12 \text{ cof. } \varphi$; d'où cof. $\varphi = \frac{19 - m}{4}$.

On voit donc que cette équation ne fauroit fubfifter, en adoptant $10'$ pour l'erreur des Tables fur l'obfervation de Walter; car on auroit alors $2m = 10$, & $m = 5$, ce qui donneroit cof. $\varphi = \frac{14}{4} = 3\frac{1}{2}$.

En général, comme cof. φ doit être néceffairement < 1, il faudra que l'on ait $\frac{19 - m}{4} < 1$;

Donc $19 - m < 4$, & $m > 15$; donc $2m > 30$; en forte que l'erreur des Tables au temps de l'obfervation dont il s'agit, loin d'être moindre que celle que M. Dunthorn a trouvée, devroit être au contraire trois fois plus grande; ce qui ne fauroit être admis, puifqu'il faudroit que Walter fe fût trompé d'environ une heure fur le temps de l'éclipfe qu'il a obfervée.

(40.) Si on défigne $-2a$, $-2b$, $-2c$, $-2d$, $-2e$ les erreurs -54, $-20\ \alpha$, en forte que l'on ait les équations

$$p + f \text{ fin. } \alpha = -2a,$$

$$p + q + f \text{ fin. } (\alpha + \varphi) = -2b,$$

$$p + 2q + f \text{ fin. } (\alpha + 2\varphi) = -2c,$$

$$p + 3q + f \sin. (\alpha + 3\varphi) = -2d,$$
$$p + 4q + f \sin. (\alpha + 4\varphi) = -2e,$$

on trouvera ces trois-ci,

$$p + q = \frac{2b \cos. \varphi - a - c}{1 - \cos. \varphi},$$
$$p + 2q = \frac{2c \cos. \varphi - b - d}{1 - \cos. \varphi},$$
$$p + 3q = \frac{2d \cos. \varphi - c - e}{1 - \cos. \varphi};$$

d'où l'on tire ſur le champ

$$q = \frac{2(c - b) \cos. \varphi + a - b + c - d}{1 - \cos. \varphi}$$
$$= \frac{2(d - c) \cos. \varphi + b - c + d - e}{1 - \cos. \varphi},$$

& de-là,

$$2(c - b) \cos. \varphi + a - b + c - d = 2(d - c) \cos. \varphi + b - c + d - e,$$

ſavoir,

$$\cos. \varphi = \frac{a - 2b + 2c - 2d + e}{2(b - 2c + d)};$$

connoiſſant l'angle φ, on connoîtra p & q, & enſuite f & α par les équations ci-deſſus; cette ſolution peut être utile dans d'autres occaſions, & c'eſt ce qui nous a engagé à la rapporter ici.

(41.) Au reſte, comme M. Dunthorn n'a point publié ſes Tables de la Lune, & que par conſéquent on ne peut ſavoir quel degré de confiance elles méritent; que d'ailleurs les Aſtronomes paroiſſent être convenus de regarder celles de Mayer comme les meilleures, j'ai cru qu'il étoit important de voir ce que ces dernières donneroient; & jai prié en conſéquence un très-habile Aſtronome (M. B**), de vouloir bien calculer les lieux de la Lune, au temps des obſervations rapportées ci-deſſus d'après les Tables de Mayer, pour en déduire les erreurs de ces Tables; je l'ai même engagé à entreprendre ce travail deux fois, premièrement en adoptant l'époque & le mouvement moyen de la Lune de Caſſini, &

y appliquant les équations données par les Tables de Mayer, & ensuite, en faisant le calcul uniquement d'après ces dernières Tables ; car comme la différence de 3′ 42″ qui est entre les mouvemens moyens séculaires de la Lune suivant Cassini & suivant Mayer, tient principalement à l'équation séculaire introduite par ce dernier, ainsi qu'on l'a vu au commencement de ce Mémoire, si on veut faire abstraction de cette équation, il paroît naturel qu'on rétablisse le mouvement moyen tel que Cassini l'a trouvé ; or il ne sera pas inutile dans notre recherche, de connoître les erreurs des Tables dans cette hypothèse, & de les comparer à celles qui ont lieu dans l'hypothèse de l'équation séculaire.

Voici les résultats de ces Calculs ; l'Auteur m'a assuré les avoir faits & revus avec beaucoup de soin, & de manière à pouvoir compter entièrement sur leur exactitude.

LIEUX des OBSERVAT.	DATE des ÉCLIPSES OBSERVÉES.	ERREURS des Tables DE MAYER avec l'équat. séculaire.	ERREURS des Tables DE MAYER sans l'équat. séculaire.
Babylone ...	720 av. J. C. Mars 19.	— 24′ 55″	— 23′ 30″
Babylone ...	382 ...... Déc. 22.	— 26.	— 11. 30.
Alexandrie ..	200 ...... Sept. 22.	— 17.	— 1. 15.
Alexandrie ..	364 ap. J. C. Juin 16.	— 12. 40.	+ 12. 12.
Caire	977 ...... Déc. 12.	— 1. 22.	+ 20. 42.
Caire	978 ...... Juin. 8.	+ 0. 18.	+ 16. 35.

Il faut remarquer à l'égard des deux premières observations de cette Table, qu'on a supposé dans le calcul, d'après M.

M. de la Lande *(Mém. Acad. année 1757)* que la différence des méridiens entre Paris & Babylone n'eſt que de $2^h\ 32'$; tandis que M. Dunthorn la ſait de $2^h\ 41'\ \frac{3}{4}$, à cauſe que, ſuivant Ptolémée, Babylone eſt plus à l'orient qu'Alexandrie de 50 minutes, & que la différence des méridiens entre cette dernière ville & Paris, eſt fixée à $1^h\ 51'\ \frac{3}{4}$.

Si on vouloit adopter la détermination de Dunthorn, alors les erreurs des Tables au temps des deux premières obſervations, c'eſt-à-dire, en 720 & 382 avant J. C. deviendroient d'environ 5 minutes plus grandes.

(43.) Si on prend les erreurs contenues dans la dernière colonne de la Table précédente, mais en omettant celle de l'année 382, & ſubſtituant à la place des deux dernières, la valeur moyenne $18'\ \frac{1}{2}$, on a cette ſuite de nombres $-\ 23\frac{1}{2}$, $-\ 1\frac{1}{4}$, $+\ 12\frac{1}{4}$, $+\ 18\frac{1}{2}$, dont les différences premières ſont $22\frac{1}{4}$, $12\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{4}$, & dont les différences ſecondes ſont $-\ 9\frac{3}{4}$, $-\ 6\frac{1}{4}$; leſquelles ſont trop inégales pour qu'on en puiſſe rien conclure directement pour la loi de l'équation ſéculaire *(article 38)*; on pourroit cependant, en changeant ſeulement de quelques minutes les erreurs dont il s'agit, rendre leurs différences ſecondes, conſtantes & égales à la valeur moyenne $-$ 8 des précédentes; alors on auroit 4 minutes pour la quantité de l'équation ſéculaire dans l'eſpace d'environ cinq cents cinquante ans; ce qui donneroit à peu-près 8 ſecondes pour l'équation ſéculaire au bout du premier ſiècle; mais nous ne nous arrêterons pas davantage là-deſſus, & nous paſſerons à examiner les erreurs des Tables même de Mayer qu'on voit dans la pénultième colonne.

Il eſt d'abord évident que le but de ce ſavant Aſtronome a été principalement de faire quadrer ſes Tables avec les Obſervations Arabes de 977 & 978; mais on doit, ce me ſemble, être un peu ſurpris de ce que ſes Tables ne repréſentent pas mieux l'obſervation de 720 avant J. C. qui a toujours ſervi de baſe dans la détermination des moyens mouvemens de la Lune; cependant ſi on fait attention que

le calcul a été fait en prenant avec M. de la Lande $6^h\ 11'$ pour le temps de l'opposition, tandis que suivant M. Cassini, elle a dû arriver à $6^h\ 58'$, on verra que cette différence de 47 minutes, en produira une d'environ 24 minutes dans le lieu de la Lune *(article 4 ci-dessus)*, ce qui réduira l'erreur des Tables de Mayer à environ — 1 minute.

Il paroît donc très-probable que cet Astronome a suivi le calcul de M. Cassini pour la détermination du lieu de la Lune dans l'éclipse de 720 avant J. C. & qu'il a par conséquent tâché d'y accommoder ses Tables au moyen de l'équation séculaire qu'il a appliquée au mouvement moyen. Mais si la correction que M. de la Lande a faite au calcul de M. Cassini, & dont il rend raison dans son Mémoire sur les équations séculaires *(Mémoires de l'Académie, année 1757)* est fondée, il est clair que le mouvement moyen & l'équation séculaire de Mayer devront être un peu altérés pour que ses Tables puissent représenter également l'observation de 720 avant J. C. & celles de 977 & 978 après J. C.

Soit x le nombre de minutes dont il faudroit augmenter le mouvement séculaire de Mayer, & y celui dont il faudroit augmenter son équation séculaire pour le premier siècle, à compter depuis 1700, il est clair qu'en gardant l'époque du lieu moyen pour 1700, le lieu moyen pour 978 se trouvera plus avancé de $-7\frac{1}{5}x + (7\frac{1}{5})^2 y$, & pour 720 avant J. C. de $-24\frac{1}{5}x + (24\frac{1}{5})^2 y$; or comme l'erreur des Tables de Mayer est presque nulle pour l'observation de 978, il faudra faire d'abord $-7\frac{1}{5}x + (7\frac{1}{5})^2 y = 0$, pour que le lieu moyen ne change pas en 978; & l'on aura par-là $x = 7\frac{1}{5}y$; ensuite pour détruire l'erreur de $-24'\ 55''$ que les Tables donnent pour l'observation de 720 avant J. C. on fera $-24\frac{1}{5}x + (24\frac{1}{5})^2 y = 24\frac{11}{12}$, ce qui à cause de $x = 7\frac{1}{5}y$ donne à très-peu près, $y = \frac{1}{17} = 3''\frac{1}{2}$, & $x = 25''$; en sorte que l'équation séculaire devroit être pour le premier siècle de $12''\frac{1}{2}$, & le mouvement séculaire moyen de $10^s\ 7^d\ 54'\ 0''$.

(44.) Ce changement dans l'équation séculaire & dans le mouvement moyen diminueroit aussi beaucoup les erreurs des Tables dans les observations intermédiaires; car le lieu moyen se trouveroit plus avancé d'environ 13 minutes pour l'observation de 382 avant J. C. d'environ 17 minutes pour celle de 200 avant J. C. & d'environ 5 minutes pour l'observation de 364 après J. C. de sorte que les erreurs trouvées dans la dernière colonne de notre Table précédente, en seroient diminuées d'autant.

Il est vrai qu'en changeant le lieu moyen, les valeurs des équations doivent aussi changer un peu; mais on peut ici négliger ces variations qui ne peuvent monter qu'à quelques secondes; en effet il est clair qu'il n'y aura que les trois principales équations de la Lune, savoir l'*équation du centre*, l'*érection* & la *variation*, qui puissent recevoir un changement tant soit peu sensible, tandis que le lieu moyen augmente ou diminue de quelques minutes; or à cause que dans les observations dont il s'agit, la distance de la Lune au Soleil, est 0 ou 180 degrés, la variation sera nulle, & l'érection aura pour argument la simple anomalie de la Lune; de plus comme toutes les Éclipses rapportées dans notre Table ci-dessus, à l'exception des deux dernières, sont arrivées, la Lune étant assez éloignée de ses apsides, on trouvera aisément que la différence produite par le changement des équations dont nous venons de parler, ne pourra guère monter à une minute.

Il n'en seroit pas de même pour les deux Éclipses de 977 & 978, qui sont arrivées fort près des apsides de la Lune, où un degré de différence dans l'anomalie peut donner jusqu'à $7'\frac{1}{2}$ de variation dans l'équation du centre; mais puisque nous avons fait en sorte que les changemens du mouvement moyen & de l'équation séculaire se compensent mutuellement au temps de ces Éclipses, le lieu moyen de la Lune n'a point été altéré par ces changemens.

(45.) Au reste comme les observations qui nous ont été transmises par Ptolémée ne sont rapportées que d'une

manière fort vague, & que d'ailleurs on sait qu'il est très-difficile de fixer le commencement ou la fin d'une Éclipse de Lune, à cause de la pénombre & de l'atmosphère de la Terre qui en rendent les phases douteuses, & qui font que nos meilleurs Astronomes s'y trompent quelquefois de plusieurs minutes, malgré l'exactitude de nos Instrumens & les soins scrupuleux qu'on a coutume d'apporter à ces sortes d'observations; il s'ensuit qu'il y a très-peu de fonds à faire sur les observations que nous venons de discuter ci-dessus pour en déduire l'équation séculaire de la Lune; & si l'on joint à cette remarque celle que M. de la Lande a déjà faite sur l'incertitude des deux Observations arabes de 977 & 978, au sujet desquelles feu M. Bevis, savant Astronome Anglois, qui avoit entre les mains une traduction du Manuscrit Arabe d'où elles sont tirées, lui dit qu'il avoit de fortes raisons de douter si c'étoient de véritables observations, ou de simples calculs *(Astronomie, article 1485)*, on conviendra sans peine que l'existence de cette prétendue équation séculaire est encore très-douteuse; de sorte que comme la théorie y paroît en même-temps contraire, le meilleur parti qu'il y auroit à prendre, du moins jusqu'à ce que le temps nous apporte là-dessus de nouvelles lumières, seroit peut-être de rejeter entièrement cette équation, en conservant néanmoins le mouvement moyen, tel que Mayer l'a établi, lequel paroît assez bien d'accord avec les observations de ces deux derniers siècles, pour lesquelles l'équation séculaire est d'ailleurs presque insensible.

En effet, le savant Astronome dont j'ai parlé ci-dessus, ayant comparé avec les Tables de Mayer les observations de quelques Éclipses de Lune du XIV.^e^ & du XVI.^e^ siècle, rapportées par Riccioli dans son Almageste, a trouvé les résultats suivans.

TEMPS MOYEN À PARIS, DES OPPOSITIONS OBSERVÉES.			ERREURS des Tables de MAYER.
1457.........	3 Septembre	10^{h} 10′	— 1′
1464.........	21 Avril....	12 ½	+ 1
1500.........	5 Novembre	12. 59	+ 2
1573.........	8 Décembre	7. 21	— 1

La première de ces quatre Éclipſes a été obſervée à *Mellicum* en Autriche par Purbach & Regiomontanus, la ſeconde à Padoue par Regiomontanus, la troiſième à Rome par Copernic, & la quatrième à Uranibourg par Tycho.

On voit d'abord que les erreurs des Tables de Mayer ſont très-petites, & que de plus elles ſont les unes poſitives, & les autres négatives; ce qui prouve que l'époque & le moyen mouvement ſont aſſez bien établis; il n'y a que l'obſervation de 1500 pour laquelle l'erreur des Tables eſt un peu ſenſible; mais je crois qu'il faut la rejeter plutôt ſur l'obſervation même, qui n'eſt rapportée par Copernic *(liv. IV, chap. IV des rev.)* que d'une manière un peu vague, d'autant plus que cette éclipſe n'ayant pas été totale comme les autres, il lui aura été difficile d'en fixer le temps du milieu.

MÉMOIRE
SUR LES
MOYENS DE PERFECTIONNER
L'ESPÈCE DE CRISTAL
NÉCESSAIRE À LA CONSTRUCTION
DES
LUNETTES ACHROMATIQUES.

Nec eſt alia materia ſequatior. *Pline, lib. XXXVII, cap. 13.*
Pline dit en parlant du verre: *Il n'y a pas de matière qui obéiſſe mieux à la main de l'ouvrier.*

Par M. LIBAUDE, aſſocié avec M. BONGARD DE ROQUIGNI dans la Verrerie du Valdannoy près Abbeville.

CONNOISSANT les moyens que l'on emploie ordinairement pour faire de beau criſtal, attaché aux travaux de l'art de la Verrerie, digne de l'encouragement du Miniſtère; le ſuivant & l'étudiant, j'oſe le dire, non-ſeulement par état, mais avec paſſion, enhardi par la demande que fait l'Académie Royale des Sciences aux Artiſtes, j'ai cru pouvoir entrer en lice, & m'efforcer de répondre aux vues de cette Compagnie.

Heureux ſi mes foibles efforts pouvoient enlever à nos voiſins & à nos émules, une partie d'où dépend eſſentiellement la perfection de nos Lunettes d'obſervations, & qui doit amener une révolution heureuſe dans l'Aſtronomie!

J'aurois fait des pas plus rapides, ſi les Savans à qui je parle, m'euſſent conduit avec principes dans un Art qui exigeroit toutes leurs connoiſſances en Chimie. J'implore leur indulgence ſur la diction; on doit exiger d'un Artiſte occupé de ſon travail, qu'il rende les choſes, ſans lui demander le vernis de l'élégance du ſtyle.

Je préviens encore ici que je ne chercherai point à expliquer comment opèrent les principaux agens dans la vitrification; les ſolutions de ces problèmes exigeroient plus de connoiſſance que je n'en ai, & des travaux beaucoup plus étendus, auxquels mes facultés & mes occupations m'ôteroient le loiſir de me livrer. Mes Juges, je l'eſpère, s'arrêteront uniquement aux faits que je leur expoſerai. Il me ſiéroit mal de décider des queſtions ſi délicates, & ſur leſquelles je dois laiſſer prononcer les Maîtres; je crois mieux répondre à leurs demandes en leur préſentant des expériences & des faits, plutôt que des idées vagues & un ſyſtème incertain.

L'Académie demande dans le criſtal néceſſaire à la conſtruction des Lunettes achromatiques, *qu'il ſoit d'une denſité demandée, & en même temps exempt des ſtries ou filandres, & du coup-d'œil gélatineux auxquels ſont ſujets les ſtras & le flint-glaſſ d'Agleterre (a).*

J'ai cru premièrement devoir examiner ces verres Anglois qui font l'objet de notre émulation, & conſulter nos Lunetiers pour m'informer des qualités qu'ils trouvent dans ces verres, & des défauts aſſez ordinaires à ces mêmes verres Anglois.

Les objectifs de Lunettes achromatiques ſont compoſés de deux verres de denſité différente, qui ſont connus en Angleterre l'un ſous le nom de *flint-glaſſ;* & l'autre ſous celui de *crown-glaſſ.* Les verres appelés *flint-glaſſ* ſont clairs, nets, blancs, exempts de *bulles* ou *points;* & je me ſuis aſſuré qu'ils ont été ſoufflés en manchon, puis coupés avec les ciſeaux, & ouverts comme le ſont les glaces de Veniſe *(b).*

Le *crown-glaſſ* eſt un verre qui a été ſoufflé & ouvert en *plat* à *l'ouvreau* d'un four: il eſt bien net & d'une belle couleur verte.

Je ne m'attacherai pas à imiter ce verre Anglois, 1.° parce

(a) Les mots *flint-glaſſ,* ſignifient en Anglois verre ou criſtal de cailloux, de pierres à fuſil. Je me ſervirai de ce mot pour donner l'idée de tout criſtal propre aux Lunettes achromatiques.

(b) Les groſſes *bulles* conſervent ce nom; les petites ſe nomment *points.* L'origine des *bulles* n'eſt pas la même que celle des *points.*

que l'Académie ne le demande pas; 2.° parce que nos Lunetiers pourroient aisément s'en passer, en lui substituant un beau verre vert le plus commun de nos fabriques *(c)*.

Les Lunetiers m'ont dit que la blancheur dans le *flint-glass* n'étoit pas une qualité essentielle, mais qu'il falloit l'homogénéité dans les parties, qu'il n'y eut point dans ces verres ni de *bulles*, ni de *points*; qu'ils trouvoient dans les verres Anglois une fusion convenable dans la matière; mais que dans la plupart des morceaux de ce verre que l'on tiroit d'Angleterre, les fils, ou plutôt les *lames* ou *tables* les arrêtoient dans leurs ouvrages, & que ces tables gâtoient souvent l'objectif qui paroissoit devoir le mieux réussir.

J'examinai ensuite dans des objectifs défectueux la position de ces lames; je reconnus qu'elles étoient souvent parallèles aux surfaces du morceau de verre que l'on avoit employé. On verra par la suite combien un œil attentif peut découvrir de faits heureux, & tirer parti de ses observations.

Muni de ces connoissances préliminaires & utiles pour mon objet, je résolus de tenter des expériences, ne comptant

(c) Je dis que je ne m'attacherai pas à imiter le *crown-glass*, mais conduit par le desir d'être utile, je reviens sur mes pas. L'Académie voudra bien me diriger si je m'égare dans le chemin qui peut m'y conduire.

Il me paroît que dans les verres des Lunettes achromatiques, l'on attend la réussite des objectifs de la différente densité des deux verres qui les composent. Si cela est ainsi, ne peut-on pas espérer un plus grand succès, en combinant un verre léger avec un verre lourd! Et de même que l'on donne de la pesanteur au *flint-glass*, & que le plus pesant réussit le mieux, ne devroit-on pas chercher la légèreté dans le *crown-glass!* il est possible de faire des verres plus légers; & j'ai reconnu, dans les différentes substances vitrifiables qui m'ont passé par les mains, certaines qui conservoient leur légèreté, de même que d'autres gardent leur pesanteur.

Ceux qui travaillent les objectifs des Lunettes achromatiques, disent que la couleur dans le *flint-glass*, & sur-tout dans le *crown-glass*, est indifférente. Mais est-il prouvé qu'un verre léger & blanc ne seroit pas préférable à un verre de couleur d'émeraude foncée, comme l'est le *crown-glass!* D'ailleurs, cette couleur verte ne seroit-elle pas indifférente dans le *flint* ou dans le *crown!*

Si mes idées sont justes, ne deviendroit-il pas avantageux de s'attacher, en suivant mes vues, à perfectionner le *crown-glass*, dont la combinaison avec le *flint-glass*, devient si utile pour les Lunettes d'Astronomie!

pour rien les difficultés & le temps néceſſaire pour m'aſſurer des faits avant que de les ſoumettre au jugement de cette célébre Compagnie.

On ſait que le verre eſt formé avec des ſubſtances diſpoſées à entrer en fuſion, & nommées par cette raiſon *vitrifiables;* mais dans nos fours de Verreries, nous ſommes obligés d'en précipiter encore la fuſion avec des ſels que nous appelons *fondans.*

La matière vitrifiable dont on ſe ſert ordinairement, eſt du ſable ou ſablon.

Le fondant peut être d'une nature fort différente; les uns emploient des ſoudes d'Eſpagne, c'eſt-à-dire de *kaly;* les autres des ſoudes de *varech;* ceux-ci des cendres fondues, comme la *potaſſe;* ceux-là des cendres de plantes terreſtres, &c. mais lorſqu'on veut faire un verre commun, on prend des ſoudes les plus communes, & principalement les ſoudes de varech. Si on veut faire un verre plus beau, on choiſit les ſoudes d'Eſpagne, & l'on emploie les ſels & les cendres de ces ſoudes, ou les cendres de nos foyers non leſſivées. Mais quand on veut faire un verre blanc & parfait, on tire ou des ſoudes d'Eſpagne ou des cendres de nos foyers les ſels qu'elles contiennent, & on n'emploie comme fondant que ces ſels dépouillés des cendres & du charbon. Il eſt prouvé que ces cendres & ce charbon contiennent un phlogiſtique & une partie terreuſe, peu propre à donner un verre fin & d'un beau blanc. Je parle à des perſonnes inſtruites, & je crois en avoir aſſez dit pour me faire entendre dans la ſuite de mon travail.

Ces ſubſtances bien *frittées,* entrent en fuſion dans le four des verreries, & on les travaille, pour les *ouvrager,* ſuivant l'intention de celui qui conduit la fabrique.

Reprenons chacune de ces parties; & comme le verre tient toutes ſes qualités, non-ſeulement du choix & d'un juſte mélange des matières; mais encore de la fuſion dans le four, & enfin des attentions que l'on prend en le travaillant; nous tirerons, d'après les réflexions ſur chacune de ces parties, que nous

traiterons dans autant d'articles séparés, les vrais moyens & les plus sûrs pour faire de bon verre avec les qualités requises.

ARTICLE PREMIER.

Des matières vitrifiables.

Je ne rapporterai pas ici toutes les expériences que j'ai faites pour m'assurer de la matière vitrifiable la plus propre à donner le *flint-glass* ou le verre des Lunettes achromatiques.

On se doute bien que, d'après les recettes anciennes pour faire du cristal ou pierres composées, j'ai soumis à l'expérience les cailloux. Je me suis assuré que le caillou qui, exposé au feu pour s'y *calciner (d)*, blanchit, donne seul un beau verre, qu'il convient de le réduire en poudre très-fine; mais j'avoue que la dépense & les soins qu'exigent ceux-ci, ne m'ont pas paru mériter la préférence sur un sablon bien blanc, très-fin, & sur-tout exempt de parties terreuses ou métalliques.

Lorsque près de la Verrerie l'on n'a pas de bon sable, & tel que je viens de le dire, exempt de terre grasse, ou de parties métalliques, si l'on a de bons cailloux, on doit les préférer au mauvais sablon, parce que l'on est certain qu'ils se trouveront moins mélangés de substances nuisibles à la composition d'un beau cristal. Il est probable que les Anglois font leur *flint-glass* avec des pierres à fusil; car ce mot le dit. J'ai fait un superbe cristal avec du cristal de roche. Il est certain que le beau cristal de roche est exempt de parties terreuses, & est très-homogène dans toutes ses parties. Ce verre étoit spécifiquement d'un poids différent du verre de sable, & peut-être pourroit-on trouver d'autres pierres ou terres vitrifiables, qui, par leur propre pesanteur, donneroient le verre *flint-glass*, sans addition de substance métallique *(e)*.

(d) C'est le terme impropre dont on se sert pour désigner cette opération.

(e) Ceci mériteroit d'être examiné plus particulièrement, en soumettant à l'expérience des substances vitrifiables, très-pesantes, jusqu'à ce que l'on en eût trouvé une, qui, sans avoir des défauts, donnât seule un verre lourd.

Étant convaincu qu'il y a du choix dans les ſablons, j'ai fait des dépenſes pour m'en procurer de différens endroits, & je me ſuis aſſuré que dans le nombre de mes épreuves, celui d'Étampes méritoit d'être choiſi; il y en a encore à Senlis, à Dieppe, &c. de très-bon.

Le meilleur ſable demande une préparation, il contient toujours une partie graſſe, une terre végétale (peut-être apportée par le vent ſur le vrai ſable). Pour qu'il ſoit pur, il convient de le laver à pluſieurs eaux & enſuite de le faire ſécher.

Je crois donc ne devoir point chercher ailleurs une matière vitrifiable: les difficultés vont croître à meſure que nous avançons, & ſe multiplieront à l'article intéreſſant des fondans.

ARTICLE DEUXIÈME.

Des fondans.

Nous avons dit que pour faire de beau criſtal, il falloit prendre pour fondans les ſels extraits des cendres de plantes; on les nomme en verrerie les *ſalins.*

Ceci nous diſpenſe de parler des verres que l'on peut faire avec les ſoudes de varech, avec les ſoudes d'Eſpagne & leurs cendres, enfin avec les cendres de foyers contenant leurs ſels. Nous paſſons tout de ſuite aux verres dans la compoſition deſquels on ne fait entrer comme fondans que le *ſalin.*

Pour traiter complètement cet article, il faudroit donner l'art de tirer le ſalin; car d'un bon ſalin on obtient de meilleur verre, & il y a une ſcience à tirer plus de ſalin & de bon ſalin. Je renvoie à l'Art de la verrerie de *Kunckel,* qui, je l'avoue, laiſſe trop à deſirer; mais c'eſt, je crois, le ſeul qui ait entamé la matière.

L'Académie me permettra de mettre ici des *principes,* que l'obſervation réitérée & mes expériences me font regarder comme certains, & dont j'eſpérerois convaincre cette Compagnie, ſi j'avois à traiter l'art de la Verrerie, & ſi je pouvois entrer ici dans des détails ſuffiſans.

1.° Le verre eſt d'autant plus beau que l'on a employé moins de fondans pour faciliter la fuſion, & un feu plus vif pour la produire; qu'il a bouilli à gros bouillons dans le commencement de la fuſion.

2.° Que le fondant eſt moins mêlé de ſels de nature différente.

3.° Le verre eſt le ſeul produit de la matière vitrifiable, & le fondant pur n'entre pour rien dans la compoſition du verre parfait *(f)*.

4.° Les chaux métalliques, & certaines chaux métalliques entrent dans la vitrification; elles augmentent la peſanteur du verre, & il convient de choiſir pour le *flint-glaſſ* celles qui, ſans réunir des défauts eſſentiels, ſont les plus denſes, eu égard à leurs maſſes; de ce nombre ſont les chaux de plomb.

5.° Pour faire du verre bien blanc, pour ne le point ternir, ſur-tout celui où il entre de la chaux de plomb, avide de phlogiſtique, il convient mieux de le travailler dans un pot couvert.

6.° Le beau verre doit être *doux, coulant,* quand on le travaille; il doit ſe travailler à une foible chaleur; celui-ci ſe recuit plus aiſément, & eſt toujours plus fin.

7.° Je poſerai encore pour principe (& j'avoue que ceci mériteroit d'être traité par quelque Membre de cette ſavante Compagnie), *(g)* que les ſoudes d'Eſpagne donnent en ſalin, principalement l'alkali minéral, qui eſt la baſe du ſel marin, & qu'il eſt très-poſſible d'avoir ce ſel en beaux criſtaux, entièrement ſéparé d'autres ſels.

Que toutes les cendres de bois donnent à peu-près les

(f) J'imagine bien que ceci ſe trouvera ſujet à beaucoup d'objections auxquelles je ne puis pas répondre ici.

(g) Je dois avouer que j'ai profité ici du travail que m'a communiqué un Savant, qui ne me permet pas même aujourd'hui de le nommer; mais vous le connoiſſez ſans doute, Meſſieurs. Digne Élève d'un de vos illuſtres Membres, il a, comme lui, le zèle le plus ardent pour le progrès des Sciences & des Arts. Faire le bien, eſt ſon plus grand plaiſir, & la ſeule récompenſe flatteuſe qu'il en attend.

mêmes principes dans l'analyſe, & qu'il en réſulte un tartre vitriolé, de l'alkali végétal, & un peu d'alkali minéral.

8.° Que quelques plantes peuvent contenir du ſel marin; que celles-là le doivent aux évaporations de l'eau de la mer, ou aux urines avec leſquelles on les a arroſées; d'autres du ſel de nitre, & que ce ſel provient du lieu où ont crû ces plantes, dont le terrein, formé de plâtras & de fumier, a fourni ce ſel que la plante a pompé.

Reprenons chacun de ces paragraphes.

Il faut donc choiſir, d'après le premier principe, le fondant le plus actif, c'eſt-à-dire celui qui *porte* le plus de ſable.

Il s'enſuit encore qu'il ne faut donner au ſable que ce qui eſt néceſſaire de fondans pour obtenir une vitrification complète: ſi l'on manque ce point, l'on a un verre que l'on nomme *cordé*, & qui ne peut ſe travailler.

Il ſeroit impoſſible d'ouvrager la compoſition du verre deſtiné à être coulé en table, ce verre étant trop tendre & *cordé.*

J'ai fait des expériences en employant l'alkali minéral pur. Comme ce ſel tient preſque moitié d'eau dans ſa criſtalliſation, il faut ne compter que ſur moitié du ſel que l'on emploie: ou mettre dans l'arche, à une foible chaleur, évaporer la partie aqueuſe de ce ſel; ce ſel n'agiſſant pas avec le plus de force, ne doit point être choiſi.

Lorſqu'on tire le ſalin des ſoudes d'Eſpagne, ce ſalin eſt moins blanc que le ſel de ſoude pur, & le plus actif eſt celui qui tire le plus ſur la couleur de marron; il porte (le meilleur) cent cinquante livres de ſable par cent de ſalin; il contient donc une matière plus active & plus propre à aider à la fuſion des matières vitrifiables & doit être préféré au ſel de ſoude pur. Ce dernier ſel aide peu le verre à bouillir, & nous avons dit qu'il falloit pour devenir un verre fin, que la matière en entrant en fuſion, formât de gros bouillons; celle qui ne bout pas beaucoup s'affine moins bien, & prend ſouvent une couleur jaune. On a beau vouloir détruire cette couleur, en lui en donnant une artificielle, ſi la matière de ce verre eſt tendre, elle ne tient point la partie colorante

qu'on lui ajoute, & le jaune ſubſiſte, ſans que l'on connoiſſe de moyens ſûrs d'en faire un beau verre blanc, clair & net. J'ai employé l'alkali du tartre; il eſt bon, & ne porte que cent pour cent; ainſi je conſeille de ne le pas prendre de préférence. Ce ſel précipite la fuſion, & je conſeillerois de l'employer mêlé avec d'autres fondans (comme *Néri* le dit), ſi je n'avois pas obſervé qu'il vaut mieux laiſſer la matière plus de temps au feu, & lui donner un grand feu, plutôt que de précipiter la fuſion par un mélange de différens fondans, qui nuiſent toujours à la netteté & à la qualité du verre.

Tous les ſels neutres peuvent ſervir de fondans; mais dans ce nombre, ainſi que dans les alkalis, on doit rejeter ceux qui s'évaporent & ſe diſſipent aiſément. Le ſel marin, mêlé avec d'autres fondans, a le ſeul avantage de précipiter la fuſion, & de faire bouillir la matière. Mais je dois ajouter que ſi peu qu'il y ait de ſel gris dans une compoſition, le verre prend une couleur déſagréable. Si on emploie le ſel marin ſeul, il ſe ſublime; & quant il eſt joint à d'autres fondans, il forme ſur les pots le *ſel de verre;* nouveau compoſé, qui mériteroit d'être examiné plus exactement encore. Ce ſel nuit à la vitrification; il empêche la réunion des parties du verre; il ôte ſa tranſparence; il le rend gras, &c. Un inconvénient pour le Verrier, c'eſt que lorſqu'il emploie le ſel marin en grande quantité, il perce les pots, il uſe les ſiéges du four, & le four lui-même.

Après avoir fait l'analyſe des cendres de foyers, j'ai obtenu un ſalin qui n'eſt compoſé que de tartre vitriolé, joint à un alkali minéral & végétal, ou qui a une ſurabondance d'alkali végétal, d'une graiſſe ou d'un phlogiſtique que je laiſſe à l'Académie à bien définir. Je ne m'appuie que de mon travail, qui m'enſeigne, à meſure que j'apprends, à me méfier de mes connoiſſances & à être lent à tirer des déciſions. Ce que je puis aſſurer, c'eſt que ce ſalin eſt le meilleur pour faire le beau verre, & en particulier le verre des Lunettes achromatiques; que plus ce ſalin eſt de couleur brune ou de marron, meilleur il eſt, & plus propre pour porter beaucoup de ſable,

eu égard à sa masse. Le salin de bois quand il est bien fait doit porter deux cents livres de sable par quintal de salin. Enfin ce fondant est celui que l'on doit employer de préférence à d'autres.

Ce salin coûte beaucoup dans nos verreries, où la rareté & la cherté des bois rend les cendres peu abondantes. Dans certaines parties de l'Allemagne, on gagne à brûler des cendres pour en obtenir du salin, & chaque paysan tire partie de ses cendres & de la consommation de son bois, pour en tirer le salin.

Les soudes de potasse, étant des cendres de bois qui ont un commencement de fusion, doivent avoir les mêmes propriétés que les sels des cendres; aussi les ai-je employées avec succès. Je préviens cependant que la potasse du nord, faite avec des bois résineux, contient une graisse & un phlogistique qui nuit à la perfection du verre, & que l'on doit faire dissiper par un feu mesuré, dans une des arches du four, & mieux encore par des lavages & des cristallisations réïtérées.

Ceci me les fait ranger, pour leur utilité, après le salin des cendres de bois. L'orme est un des arbres qui donne un salin en plus grande quantité, & un des meilleurs.

Comme ces expériences m'indiquoient de préférer le salin des cendres de bois, je crus, après avoir connu par des analyses les sels qui constituoient ce salin, devoir essayer, pour fondans, ceux qui entrent principalement dans sa composition.

J'ai employé le tartre vitriolé seul pour fondant, & après plusieurs épreuves, j'ai reconnu que ce fondant ne porte que cinquante livres de sable par quintal. Le verre qui en est résulté étoit dur, se *calcinoit* à l'air au sortir du pot, & produisoit un verre de mauvaise qualité.

J'ai joint à soixante-cinq livres de tartre vitriolé, vingt-cinq livres d'alkali du tartre, & dix livres d'alkali minéral. Ce fondant a porté plus de sable que dans les premières épreuves; mais le verre n'étoit pas si beau que celui produit par le salin des cendres de foyer. Je crois donc qu'il manque à ce salin composé une qualité dont nous ne sommes pas encore en état

de définir la nature, & ſur laquelle mon travail me laiſſe entrevoir trop foiblement la différence d'avec le ſalin des cendres de foyer, pour oſer la propoſer au jugement de cette Compagnie.

Je dois dire qu'après avoir éprouvé les ſels neutres d'*alun*, de ſel de *Glauber*, de *borax*, &c. j'ai vu que l'alun portoit peu de ſable. Il fait bouillir le verre, & par-là peut être employé utilement dans une compoſition; mais ce ſel qui ſe décompoſe en aſſez grande quantité dans le pot, en précipitant la fuſion, & faiſant bouillir la matière, y laiſſe ſon acide, qui verdit le verre & le rend d'une vilaine couleur. Je dirai la même choſe du ſel de Glauber. Le borax eſt celui qui m'a le mieux réuſſi: mais il eſt trop cher; d'ailleurs il ſe bourſouffle dans le pot, il ſe diſſipe avant d'avoir engagé la vitrification, & il ne peut pas être employé avec ſuccès ſans d'autres additions. Lorſqu'on l'emploie pour faire bouillir la matière, il convient de ne le mettre qu'à très-petites doſes.

Je ne devois pas oublier d'eſſayer pour fondant le ſel de *nitre*, & pour être certain de la façon dont ce ſel agiſſoit, j'ai pris du ſel de nitre de la première cuite, & j'ai joint cent livres de ce ſel avec cent livres de ſable. Le ſel marin que contient ce ſel, lui donnoit une couleur verte; & le verre, quoique brillant, étoit gras. Je l'ai tiré à l'eau; j'ai corrigé cette graiſſe avec cinq livres de chaux vive par cent livres de ſel; mais ce verre ne portoit pas la couleur artificielle qu'on lui avoit donnée, & j'ai eu beaucoup de peine à lui ôter ſa couleur verte.

J'ai pris du ſel de nitre bien purifié, & de la quatrième cuite; & pour être plus sûr de n'employer que le nitre dépouillé de tout ſel marin, & ſans matière graſſe, je l'ai fait diſſoudre pluſieurs fois dans l'eau; &, par des criſtalliſations répétées, je pouvois être certain de n'employer que du ſel de nitre.

Ce ſel bien purifié porte cent vingt-cinq à cent cinquante livres de ſable pour cent, & donne un criſtal d'une couleur très-brillante, ſur-tout quand on *l'a tiré à l'eau*, ainſi que je vais l'expliquer. Cependant, comme ce fondant n'eſt pas

des

des plus actifs, & qu'il eſt cher ici, je ne conſeille pas de le préférer au ſalin de bois.

Je dois dire que lorſqu'on veut éclaircir le verre, & lui donner une couleur artificielle, le ſel de nitre eſt toujours employé; & l'on préfère dans la plupart des fabriques le nitre de la première cuite.

On joint ordinairement ce ſel avec la *manganèſe,* pour lors il produit une diviſion de la partie colorante de ce minéral, qui s'incorpore dans la matière du verre, & lui donne une teinte agréable. Mais je me retiens, & j'ai promis de laiſſer les explications des faits aux Savans plus capables que moi d'en donner de juſtes, afin de m'en tenir ſimplement aux expériences & à l'obſervation.

Si le nitre de la première cuite agit, ainſi qu'on le dit, avec plus d'efficacité, ce ſeroit à raiſon du ſel marin qu'il contient; j'ai dit que ce ſel en petite doſe engageoit la matière à bouillir à gros bouillons; que ces bouillons, en débarraſſant le verre par la ſublimation des matières qui ne font pas le verre, l'affinoient & l'épuroient; on l'employeroit donc utilement dans les compoſitions des criſtaux; mais il a de grands défauts, ſur-tout pour le verre *flint-glaſſ.* Je préfère pour cette eſpèce de verre, ainſi que je l'ai déjà avancé, le ſalin des cendres de foyer employé pour fondant, puis le ſalpêtre de la deuxième cuite *(h).*

ARTICLE TROISIÈME.

De la compoſition des flint-glaſſ, *eu égard à la denſité qu'ils doivent avoir.*

Je laiſſe aux habiles Géomètres, & c'eſt encore à ceux de l'Académie des Sciences auxquels je m'adreſſe, pour nous fixer la denſité propre à ce verre, qui, joint à un ſecond verre, doit diminuer l'aberration des rayons de la lumière par leurs différentes réfrangibilités. Les opérations purement pratiques

(h) Je puis aſſurer, par mes expériences, que le ſalpêtre ſera d'autant moins bon, qu'il contiendra plus de ſel marin.

ſont de notre reſſort; auſſi n'en ai-je négligé aucune de celles qui dépendoient de moi. J'ai pris chez un Lunetier le *flint-glaſſ* Anglois bon, & je me ſuis aſſuré que le pouce cube de ce verre pèſe 1230 grains. Celui de notre verre blanc ordinaire pèſe 906 grains: ainſi le *flint-glaſſ* eſt à notre verre blanc comme 1000 eſt à 736 ou 737.

Je me doutois bien que je ne pourrois obtenir, dans la vitrification, une différence & une beaucoup plus grande peſanteur qu'en y employant une ſubſtance métallique; mais il falloit trois conditions; 1.° que cette ſubſtance métallique reſtât dans la vitrification en ſe vitrifiant elle-même; 2.° qu'elle ne la colorât pas au point de la ternir; 3.° enfin qu'elle fût par elle-même plus denſe que pareille matière de verre dans laquelle on l'incorpore. J'aurois employé avec ſuccès la chaux d'antimoine: j'ai fait de beau criſtal en joignant à la compoſition une certaine quantité de chaux d'antimoine, que l'on nomme *foie d'antimoine*, ou avec celle connue ſous le nom d'*antimoine diaphorétique*, que l'on ſait être une chaux d'antimoine détonnée avec le nitre & lavée, qui prend une couleur très-blanche: mais mon verre n'acquéroit pas de peſanteur, cette chaux étant plus légère proportionnellement à la même maſſe de verre qu'elle remplace lorſqu'on l'introduit dans une vitrification. J'ai donc ſenti promptement qu'il convenoit de jeter les yeux ſur le plomb, en employant ce minéral réduit en chaux. L'expérience devoit me convaincre ſi l'eſpèce de chaux de plomb ne pouvoit pas produire de grandes différences dans le criſtal; & j'ai eſſayé les chaux de plomb connues.

Je croyois que le blanc de plomb, cette chaux produite par l'acide végétal, réuſſiroit mieux que les autres chaux. Sa blancheur m'engageoit à le conjecturer. J'ai obtenu, par le mélange de cette chaux, un verre de la peſanteur indiquée, & il avoit toutes les conditions requiſes, en n'oubliant aucune des circonſtances que je détaillerai ci-après; mais ce verre étoit d'une couleur bleuâtre & gélatineux. Je crois que la couleur de ce verre provenoit de l'acide végétal, qui jouoit un rôle dans cette vitrification.

Je ſuis donc revenu à la litharge, & plutôt encore au *minium ;* ces chaux donnent, à la vérité, un verre jaune; mais il eſt poſſible, par des préparations que j'indiquerai, de le faire devenir un criſtal fort blanc, & auſſi beau qu'il eſt poſſible de le deſirer. La doſe de cette chaux m'étoit indiquée par la comparaiſon de ſa peſanteur avec celle du verre blanc.

J'ai joint à du ſable bien lavé & ſéché...	50 livres	0 onces.
Salin de bois le mieux fait..........	25...	0.
Chaux vive en poudre.............	2...	8.

J'ajoute, pour cinquante livres de criſtal, vingt-cinq livres de *minium,* une once de *manganèſe.*

Et huit onces de nitre de la ſeconde cuite.

J'avertis que pour tirer d'une compoſition un beau verre à *ouvrager,* il faut une pareille quantité de matière. On n'obtiendra qu'avec grande peine une belle fonte dans un petit vaſe, appelé chez nous *patelin,* & dans des expériences faites en petit *(i).*

(i) On ſera ſans doute ſurpris, qu'après avoir avancé dans ce Mémoire, que, pour faire de beau criſtal, il falloit choiſir le fondant le plus actif, ne donner à la matière vitrifiable que la quantité de fondant qui lui eſt néceſſaire, & attendre une belle vitrification de la vive chaleur de ſon four, plutôt que du ſecours du fondant; enfin, qu'après avoir dit que le ſalin doit porter 200 liv. de ſable par quintal, & le ſalpêtre, 125 à 150, je ne m'y ſois pas conformé dans cette compoſition: je crois devoir expliquer au public les raiſons de cette eſpèce de contradiction.

Je ne devois parler dans ce Mémoire, que des expériences que j'avois faites, & qui me mettoient à portée de préſenter des échantillons à l'Académie: dans le moment où je l'ai écrit, mon four de verrerie étoit ſur ſon déclin; & ne donnant plus une aſſez vive chaleur, je forçois malgré moi & contre mes principes, la doſe des fondans.

Depuis que j'ai rétabli mon four, je me conforme à la vive chaleur qu'il donne; & voici ce qui me règle pour mes compoſitions. Prenons pour exemple un verre dans lequel on ſe ſera ſervi de ſalpêtre pour fondant.

Le *minium* peut porter ou faire vitrifier moitié de ſon poids de ſable.

	30	livres de ſable pour 60 de *minium.*
	105	livres de ſable pour 70 de *ſalpêtre.*
TOTAL...	135	livres de ſable.
	60	livres de *minium.*
	70	livres de *ſalpêtre.*

D'après mes principes, j'avois deux moyens pour obtenir un verre bien mêlé, très-homogène après sa fonte, & par conséquent à l'abri de ce défaut que l'on nomme dans les verres ouvragés, *verres cordés;* dans les verres coulés, *verres neigeux*.

Le mélange d'un verre est bien fait, & on se met à l'abri de le voir cordé, quand on établit un grand mouvement dans toutes ses parties, lorsqu'on le fait bouillir long-temps. Je vais faire part d'une expérience, qui, si elle ne concourt pas à donner de beau *flint-glass,* au moins pourra constater la vérité du principe premier que j'ai avancé *(page 68),* & donnera des vues à ceux qui pourroient travailler à faire de beaux cristaux, ou la partie de l'art de la Verrerie, qui concerne les verres des Lunettes achromatiques.

J'ai appris par des épreuves répétées que rien n'affine plus parfaitement les verres ordinaires, que d'y joindre à plusieurs reprises des *cuisses* tirées de nos fours *(k),* parce que cette espèce de verre fait bouillir à gros bouillons, & souvent même écumer la matière du pot où on l'a mis. Me servant

---

Souvent je n'ai point ajouté à la composition, de manganèse. Le verre prenoit une couleur bleuâtre qui n'étoit point désagréable, ni préjudiciable pour en former les objectifs des lunettes

Le verre est cordé lorsque nous ouvrageons une matière formée par du groësil de différentes fontes. Ce même verre tiré en masse, fait du verre neigeux: pareille chose arrive, lorsque nous mettons trop de fondans dans une composition, parce que, suivant ma façon de penser, le fondant engage certaines portions de sable à se vitrifier d'une façon plus complète que d'autres; & qu'un verre ou cristal pour être beau, doit être également vitrifié dans toutes ses parties. J'explique aisément, par cette raison, les difficultés que l'on éprouve en faisant le *flint-glass* composé de verre de sable & de verre de plomb de pesanteurs différentes; & l'on jugera si l'on ne peut pas espérer un mélange complet, en le tirant à l'eau plusieurs fois, ainsi que je l'expliquerai dans l'*article V de ce Mémoire.* Je suis d'autant plus porté à croire que le mélange de ces deux différens verres, en se faisant difficilement, est la cause de plusieurs imperfections dans le *flint-glass;* qu'il m'est arrivé souvent dans un pot, de trouver des verres de différentes pesanteurs au commencement, au milieu & à la fin du pot: je ne dois point ajouter que le plus pesant de ces verres étoit celui du fond du pot.

(k) On appelle *cuisses,* le verre qui, sorti du pot, est tombé dans le four, & s'est mêlé dans l'âtre avec du charbon & des cendres.

de ce moyen, j'ai fait avec la compoſition ſuivante, comme je m'y attendois, un verre vert, preſque noir ; mais un verre homogène & très-fin.

J'ai pris, ſable. . . . . 100 livres. } *minium* 67 liv.
Soude de varech 125

Et j'ai ajouté des cuiſſes à trois différentes fois.

Cette matière donne un verre vert, je le répète, mais très-fin & ſans nuage.

Si la couleur, comme on le dit, ne fait rien pour en former les objectifs, ce verre pourra être employé utilement.

Le pouce cube de ce verre peſe 1070 grains.

Ainſi il eſt au verre de glace comme 1000 eſt à 846 ou 847.

Ce verre formé avec des matières qui contenoient le phlogiſtique des charbons, de plus des cendres, & ayant eu pour fondant des ſoudes de varech, devoit, d'après mes principes, avoir une couleur verdâtre tirant ſur le brun. Je devois donc rejeter ce moyen pour obtenir un verre blanc, & j'ai cru ne pouvoir pas mieux réuſſir pour mêler les parties d'un vert de ſable avec celles d'un vert de plomb, de manière à former un nouveau verre blanc, & très-homogène dans toutes ſes parties, qu'en prenant :

1.° Les plus grands ſoins pour bien mêler le ſable très-ſec avec le ſel de nitre de la ſeconde cuite, bien pulvériſé & tamiſé.

2.° Le mêler auſſi le plus exactement qu'il eſt poſſible avec le *minium*, ſans laiſſer cette chaux former des boulettes, ainſi qu'il lui arrive aſſez ſouvent.

Enfin ce mélange, dans les parties de ce verre, devoit être d'autant plus complet, que je pourrois réitérer plus ſouvent l'opération de le tirer à l'eau, après laquelle je pouvois piler la matière, la bien mêler, & la fondre de nouveau.

J'ai déjà parlé du verre fait avec des cailloux; j'ai eſſayé, comme je l'ai dit, juſqu'au criſtal de roche; & pour ne rien négliger dans le choix des matières, j'ai choiſi pour fondant du ſel de nitre de la ſeconde cuite; avec cette compoſition

j'ai obtenu un ſuperbe criſtal; &, en y joignant du *minium*, le plus beau *flint-glaſſ*, en employant les moyens que je vais indiquer dans un moment.

Criſtal de roche auparavant calciné & réduit en poudre très-fine *(l)*	50ˡ
Salpêtre de la ſeconde cuite	50.
Et pour cinquante livres de criſtal	25 de *minium*.

Cette compoſition donne un verre d'une belle couleur un peu bleuâtre, & il n'eſt point néceſſaire d'y ajouter de la manganèſe, ni du *ſafre*, pour changer ſa couleur naturelle qui eſt très-tranſparente.

Le *flint-glaſſ* que m'a donné cette compoſition, eſt peſant. Il ſeroit poſſible de forcer la doſe de *minium*, en cherchant à le rendre plus denſe; & j'ignore le terme où il faudroit s'arrêter *(m)*.

J'ajoute ici une expérience que je dois encore au Savant qui m'a dirigé dans le travail du *flint-glaſſ*.

J'avois éprouvé certaines chaux métalliques, qui, moins peſantes que le ſable, ne procuroient aucun poids au verre que j'en compoſois. Il me reſtoit à ſoumettre à l'examen le *biſmuth;* on ſait que ce demi-métal eſt le plus lourd de ceux de ſa claſſe, & qu'il ſe convertit en verre. Il me reſtoit donc à connoître ce qu'il occaſionneroit dans un juſte mélange de ſable & de fondant. J'ai choiſi, d'après les avis que l'on m'a donné, l'eſpèce de chaux connue ſous le nom de *magiſter de biſmuth*.

On ſait que le *biſmuth* y eſt réduit en chaux à l'aide de l'acide nitreux, & que cette chaux eſt enſuite précipitée par le ſimple

---

(l) Le criſtal de roche eſt plus difficile à fondre que le ſablon. Je dois cependant ajouter ici que la doſe du fondant doit être moindre lorſque le four donne une plus vive chaleur, & que par la ſuite j'ai fondu le criſtal de roche ſeul à cent vingt-cinq pour cent de fondans, tandis qu'ici le *minium* ſervoit auſſi de fondant.

(m) J'ai fait du verre en donnant au *minium* la quantité de ſable qu'il peut vitrifier. Ainſi, à cent livres de *minium*, j'ajoutois cinquante livres de ſable: j'ai eu un verre jaune dont le pouce cube pèſe quinze cents ſoixante-onze grains. Il ne ſeroit peut-être pas impoſſible d'en obtenir un verre fin, blanc & clair.

lavage, en affoibliſſant l'acide avec de l'eau. Ce magiſter bien lavé, fait le blanc ou le fard des Dames; & l'on n'ignore pas qu'il ſe revivifie ſi aiſément, qu'une haleine chargée d'ail ou le plus léger phlogiſtique de l'air, ſuffit pour le noircir.

Voici une des expériences qui a été faite chez moi, que je compte varier, voyant lieu d'en tirer un verre très-parfait.

Sable	13 onces.
Magiſter de biſmuth	8.
Salpêtre, ſeconde cuite	6.

En ſix heures de temps, par un bon feu, j'ai eu un verre fin, très-clair, très-net, d'un beau blanc, & dont le pouce cube pèſe mille quarante-ſix grains;

Le pouce cube de verre blanc ordinaire, pèſe 906 grains.
Ainſi il eſt au verre blanc comme 1000 eſt à 868 ou 869.

Il eſt certainement poſſible de forcer encore la doſe de chaux de *biſmuth:* j'en ai fait avec deux tiers de cette chaux, ſans y avoir aperçu le moindre nuage métallique.

On reconnoît, par cette expérience, que la chaux de *biſmuth* ſert de fondant, puiſque ſix onces de ſalpêtre peuvent porter neuf onces de ſable, & que les quatre autres onces juſqu'à treize, ont été fondues & vitrifiées par les huit onces de magiſter de *biſmuth.* Un grand avantage, c'eſt que ce verre de biſmuth n'eſt point jaune comme le verre de plomb, mais eſt bien blanc. Le prix ſeul de la matière pourroit détourner d'en faire uſage.

ARTICLE QUATRIÈME.

De la Fritte.

Cet article demanderoit encore une deſcription complète de l'art de la Verrerie; car de la *fritte* ſouvent dépend une partie des perfections du verre; il eſt poſſible de faire une bonne fritte, & aiſé de la perdre & rendre ainſi cette opération, quoiqu'avantageuſe en elle-même, plus propre à gâter la compoſition du verre qu'à la perfectionner.

Considérons comment agit la fritte; elle consume dans l'*arche* les charbons qui gâteroient le verre, lorsqu'il y en a de joints avec les cendres : elle détruit un phlogistique surabondant qui nuit à la vitrification, & qui ternit le verre lorsqu'il s'y trouve : elle sublime des sels volatils qui nuiroient à la vitrification : peut-être encore prépare-t-elle (mais je n'ose parler ici de ce fait qu'avec la plus grande circonspection) certains sels à une décomposition qu'ils subiront dans le pot au verre, à l'aide d'un feu continu & des matières qui en devenant verre aideront à cette décomposition.

Je dirai seulement ici que ces considérations sur l'objet que l'on se propose en faisant fritter les matières, & la connoissance parfaite des matières que l'on veut exposer à la fritte, doivent tout de suite indiquer celles que l'on doit faire fritter, & celles qu'il ne convient pas d'exposer à cette première chaleur.

Le sable un peu séché & pur n'a pas besoin d'entrer dans la *calcaise* du four pour y être fritté; mais souvent en le mêlant avec d'autres matières que l'on veut diviser & séparer à l'aide de la fritte, il contribue beaucoup au but que l'on se propose; & souvent il convient de le joindre à ces matières.

Les soudes d'Espagne, &c. avec leurs cendres, doivent être frittées, parce que cette première chaleur les sépare, brûle les charbons des plantes, & diminue ou dissipe un phlogistique qu'elles contiennent toujours, & consume un soufre que ces soudes ont en plus ou en moins grande quantité.

Par cette même raison, lorsque pour faire du verre commun, l'on emploie les soudes de *varech*, on doit les faire fritter. Toutes les cendres de plantes ont besoin aussi d'être placées dans l'*arche-à-fritte.*

En faisant une fritte, il faut avoir égard 1.° à ménager la chaleur, sur-tout dans les commencemens de la cuisson, sans cela la fritte se durcit; elle se met en boules pesantes, une partie des sels se perd, & cette fritte réussit très-mal étant employée & mise dans les pots.

2.° Il faut bien mêler les matières que l'on veut faire fritter,

fritter, afin que les fels *s'ouvrent*, que la matière ne tienne pas au plancher de la calcaife, que les fondans fe gonflent; on les remue avec grand foin & à plufieurs reprifes dans l'arche: on ne doit la retirer qu'après environ cinq heures.

Après avoir donné à la fritte une douce chaleur, on l'examine enfuite; &, lorfque le fondant eft léger, qu'il a blanchi, qu'il forme de petits morceaux, on l'expofe à la plus grande chaleur, & l'on voit les fels qui commencent à entrer en fufion; ils fe couvrent d'une croûte blanche qui l'annonce, & en même temps indique l'inftant où il faut tirer la fritte de l'arche.

Par cette douce chaleur, les fondans s'incorporent, pour ainfi dire, avec le fable; ils l'enveloppent & le difpofent à entrer plus promptement dans une fufion complète.

Nous n'avons pas encore parlé d'un effet que produit la fritte; elle dégage par cette douce chaleur l'air interpofé entre les molécules des matières propres à devenir verre; auffi généralement les compofitions appelées de *fritte*, font moins fujettes à avoir du *point*, que celles qui ne fe frittent point. On eft obligé dans celles-ci de fuppléer à cette opération, en y ajoutant des fubftances qui, en faifant bouillir le verre, dégagent cet air, & par conféquent rendent le verre plus fin, & privé de ces points qui gâtent le plus beau verre.

D'après ce que nous avons dit fur l'objet de la fritte, le falin de bois ne doit point être foumis à cette première fufion; & par conféquent, on ne doit point faire fritter les compofitions de *flint-glaff*, lorfque l'on préfère ce fondant: cette opération feroit d'ailleurs très-nuifible fi on y expofoit les chaux de plomb qu'elle altéreroit.

ARTICLE CINQUIÈME.

Du four convenable, & de la conduite du feu dans ce four, pour y faire le flint-glaff.

J'ai avancé pour principe, que le criftal, dans la compofition duquel on avoit employé plus de fable & moins de fondant,

étoit le plus beau; mais qu'il falloit pour lors obtenir la vitrification, principalement de la violence du feu. D'après ceci (égalité dans la qualité des matières), on aura un plus beau verre, quand on devra la vitrification à un four qui chauffe beaucoup. De la forme du four dépend donc la qualité du verre & le profit du Verrier; car il y a des fours qui consumant du bois sans chauffer assez, font tomber le travail en pure perte pour l'Entrepreneur.

J'ai travaillé d'abord avec un four à la françoise, & je suis revenu aux fours allemands, comme plus propres à donner la chaleur qui convient, & la plus vive eu égard à la consommation de bois.

Le four à la françoise a une division où l'on met le bois qui s'y brûle, & dont la flamme & la chaleur, en passant à l'étage supérieur par une ouverture faite à la voûte, échauffe cette division du four où se trouvent les pots. Il y a une cave voûtée sous ce four, qui sert à recevoir les braises qui en tombent. Dans le four allemand, au contraire, il n'y a qu'une chambre, qui est divisée par deux bancs plus élevés, sur lesquels sont rangés les pots; le bois se met entre ces siéges ou bancs; la chaleur se porte immédiatement sur les pots & les échauffe vivement, elle gagne aussi la voûte de ce four, & enveloppant la calotte de ce four, elle en remplit plus aisément la capacité; des ventouses, appelées *soufflets*, aident le bois à bien brûler *(n)*; enfin, l'épreuve que j'ai faite de l'un & de l'autre, m'ont fait rejeter les fours à la françoise, pour m'attacher uniquement & faire seulement usage du four allemand.

J'avoue que si la construction du four allemand est faite pour produire une chaleur plus vive avec la même quantité de bois, avec cette forme de four il seroit moins aisé de

(n) On conçoit que si j'avois ici à décrire l'art de la Verrerie, j'entrerois dans les détails nécessaires sur chaque partie du four allemand qui par la justesse dans ses proportions, produit un bon four; le four est la partie la plus essentielle d'une Verrerie, & d'où dépend le gain du Verrier & la beauté des ouvrages qui sortent de sa fabrique.

préſerver les pots du phlogiſtique que contient la flamme, des étincelles & d'une fumée encore plus nuiſible à la perfection principalement de certains criſtaux.

Ceux qui font de vrais criſtaux, auxquels on veut donner une peſanteur qui les rend plus chers & plus eſtimés, n'obtiennent, comme je l'ai dit, de poids qu'à l'aide d'une chaux de plomb. C'eſt dans le *flint-glaſſ,* une qualité néceſſaire pour former un verre de Lunette achromatique; & il le doit à la moitié de ſa compoſition qui eſt en plomb. Perſonne n'ignore combien les chaux de plomb ſont avides du phlogiſtique pour ſe revivifier, & qu'en ſe revivifiant elles noirciſſent au moindre approche du phlogiſtique; le blanc de plomb ſe revivifie ſeulement à froid & par l'approche d'un corps gras. Or dans les fours allemands les chaux de plomb ſeroient plus ſuſceptibles de cette approche du phlogiſtique, ſi l'on n'avoit pas des moyens de s'en garantir.

Le moyen qu'il convient mieux de prendre pour fondre la compoſition du *flint-glaſſ,* eſt de mettre les matières dans un pot couvert. Le deſſus de ces pots porte un col ouvert & recourbé qui vient ſe rendre à l'ouvreau, où il ſe lute avec l'ouvreau; de cette façon la matière du pot n'a aucune communication avec la flamme du four. Cette précaution eſt néceſſaire dans le commencement de la fonte du plomb qui ne demande qu'à ſe revivifier: elle eſt utile dans la ſuite de l'opération pour empêcher les flammèches de tomber dans le pot; elles noirciroient, jauniroient ou terniroient le criſtal; mais l'on ne doit pas craindre, dans ce dernier temps, que la chaux de plomb vitrifiée reprenne ſa forme métallique.

On force le feu du four, & on le continue long-temps. Pour n'omettre aucuns des ſoins d'où peuvent dépendre les qualités dans cette eſpèce de criſtal, j'ai prêté une attention ſcrupuleuſe à tout ce qui pourroit lui nuire. Comme les outils de fer ſe décompoſent à l'eau, qu'il s'en détache des lames par la vive chaleur, je conſeille plutôt de ne point remuer la matière, que d'employer les *pilons* pour mêler la matière du verre lorſqu'elle eſt en fuſion. C'eſt cependant un

moyen néceſſaire, ſur tout quand on emploie la manganèſe, le ſaffre, &c. pour changer la couleur du criſtal.

Je ſuis perſuadé que ſi l'on remuoit avec un bâton, le bois qui ſe conſumeroit, en remuant la matière fondue, gâteroit encore plus la matière du pot, par le phlogiſtique qu'il communiqueroit à ce criſtal. J'avoue que j'ai mieux aimé ne point remuer la matière plutôt que d'employer les pilons de fer, ayant vu par les *cannes* que le verre qui touche à cet outil avec lequel on le travaille, y dépoſe une partie d'elles-mêmes & le noircit. Mais quand la couleur étoit mal mêlée, quand elle étoit miſe en trop grande quantité, ne trouvant pas de moyens pour ſuppléer à ces pilons de fer, je n'ai pas pu m'en paſſer. Quand je l'ai pu, je n'ai point remué la matière; & voici les moyens auxquels j'ai eu recours pour perfectionner cette eſpèce de criſtal.

Le verre, dans le commencement de la vitrification, bouillonne beaucoup; je le laiſſe pendant pluſieurs heures expoſé à un feu violent, tel que j'ai annoncé qu'il devoit être dans un four qui chauffe bien. Je chauffe ce four avec du bois refendu coupé en *billettes* & bien ſec, car c'eſt encore une choſe eſſentielle.

Pour rendre ce verre fin, l'affiner ou lui faire perdre les petites bulles ou points, je *tire la matière à l'eau.* Pour tirer ce verre du pot, j'aurois voulu me paſſer auſſi d'inſtrumens de fer; mais j'ai éprouvé encore une impoſſibilité. D'ailleurs, comme le verre reſte peu dans la cuiller ou poche dont on ſe ſert pour le tirer du pot, qu'on la mouille de temps à autre, qu'on retire le verre en plus grande maſſe qu'il eſt poſſible, je ne crois pas que le fer puiſſe s'y décompoſer. Je tire donc le verre de ce pot en puiſant la matière avec une poche ou cuiller; je le jette dans une auge remplie d'eau, & je fais piler cette matière dans une auge de bois, où ce verre ayant eſſuyé cette décompoſition par l'eau, il ſe ſépare & ſe pile facilement. J'ajoute à ce verre pulvériſé une petite quantité de manganèſe chaque fois que je le remets fondre, & un peu de ſalpêtre de la ſeconde cuite.

Ce verre eſt placé dans le même pot où je l'avois mis auparavant, & je le laiſſe s'affiner de nouveau. J'ai réitéré cette opération juſqu'à huit fois, pour avoir une matière parfaitement pure.

J'ai peſé pluſieurs fois un pot dont j'ai pris la *tarre* & le poids de la matière dont je l'ai rempli, & je n'ai eu en verre parfait que la quantité de matière vitrifiable que j'avois employée, les fondans s'étant évaporés. Il n'en eſt pas de même dans la compoſition du *flint-glaſſ* ou du verre de Lunette achromatique; le ſable & la chaux de plomb entrent eſſentiellement dans la compoſition du verre, & on a ſeulement en moins les fondans que l'on a employés, qui ne ſe retrouvent plus quand la vitrification eſt complète. Je m'en ſuis encore aſſuré par des expériences réitérées.

ARTICLE SIXIÈME.

Travail du flint-glaſſ.

J'ai avancé que les *points* & les *bulles*, c'eſt-à-dire de plus gros points, des veſſies moins ſerrées que les points, proviennent d'une cauſe différente. Nous venons de parler de l'origine des points; il nous reſte à expliquer comment ſe forment les bulles. Si dans un même pot, deux ouvriers travaillant la même matière, l'un forme des bulles dans un ouvrage, & l'autre fait une même eſpèce de verre ſans qu'il s'y trouve de bulles, j'aurai, je crois, prouvé que les bulles dépendent uniquement de la main de l'ouvrier, & qu'elles proviennent de la manière dont on cueille le verre.

Si l'ouvrier, en levant ſon verre avec ſa canne, le ſort de la ſuperficie du pot, qu'il faſſe entrer de l'air entre les lames de verre qu'il applique ſur ſa canne, cet air reſtera enveloppé dans le verre & y formera des bulles. Ceci n'arrive que trop ſouvent à nos ouvriers peu adroits, & nous les reprenons inutilement ſur le peu d'adreſſe & le peu de légèreté qu'ils mettent en cueillant le verre. Le *flint-glaſſ*, quoique ſoufflé, n'a point de bulles, parce que l'on prend beaucoup

d'attention en le travaillant; mais l'on peut dire généralement que les verres soufflés sont plus sujets à avoir des bulles que les verres coulés. Ceci n'aide-t-il pas à confirmer ce que j'avance, que les bulles sont formées par un mauvais cueillage. N'est-ce pas au moins un acheminement à se ranger de mon sentiment? Je convaincrois complètement, si devant mes Juges, & par un mauvais *cueillage,* je formois à dessein des bulles dans une matière.

Les verres *flint-glass* Anglois sont soufflés, c'est-à-dire, que l'on puise plusieurs fois de la matière du verre avec la *canne* ou *felle;* on la tourne légèrement, & le verre s'enveloppe sur la canne.

J'ai dit que j'avois remarqué aux *flint-glass,* que les tables qui les traversent, & qui nuisent à la perfection de ces verres, étoient toujours parallèles aux deux surfaces du plat de verre. Cet examen m'a fait croire que ce défaut essentiel & très-commun dans ces verres, ne provenoit que de la façon dont on le travailloit.

La matière, au sortir du pot, éprouve en se refroidissant lorsqu'on la souffle, des changemens qui lui deviennent préjudiciables, sur-tout lorsque ce verre, comme dans le *flint-glass,* est composé de verre de sable & de verre de plomb de densités différentes; il est impossible que la table de verre qui s'est ainsi refroidie, ne se ressente pas de ces différens momens où la matière se durcit, & prend de la consistance. Cette matière qui est roulée sur le *marbre* pour en faire la *paraison,* reçoit les impressions de l'air, dont le degré de chaleur est bien différent de celui qu'elle avoit dans le four, ou dans le pot. La partie la plus extérieure se fige; elle n'est pas assez durcie pour ne pas se joindre avec la matière qui, étant marbrée ou soufflée en s'alongeant, change de place; & il restera toujours des fils qui indiquent cette différente position, & qui nuiront à la perfection des verres. Je crois la méthode que je vais proposer, exempte de ces défauts.

Quand on retire un vieux pot du four, on trouve souvent dans ces pots du verre en grosse masse, qui est sans fils, sans

table. Ceci m'indiqueroit que les verres Anglois ne ſont défectueux uniquement que par les moyens ſucceſſifs employés en les travaillant; que le refroidiſſement ſubit, mais uniforme dans toutes ſes parties, n'étoit pas la cauſe de cette imperfection.

J'ai ſait faire des moules avec de la terre à pot, préparée comme celle avec laquelle on fait les pots, & qui avoient à peu-près la hauteur que je voulois donner à la table de verre que je devois y mouler *(o)*. J'ai mis ce moule dans le four, expoſé à la même chaleur que le verre que je voulois y couler, & j'ai coulé la matière lorſque je l'ai vu bien affinée. Je me refuſois de m'en aſſurer par des eſſais, afin d'y mettre le moins de *ferment* qu'il m'étoit poſſible. Enfin la comptant bien nette, & jugeant de ſa qualité par l'inſpection de la dernière matière que j'avois tirée à l'eau, je prenois, avec une poche, de la matière de verre; je la renverſois dans chacun de mes moules que l'on tenoit dans le four, près du pot qui contenoit la matière fondue. De cette manière la fonte eſſuyoit peu ou point de changement, en paſſant du *pot au travail* dans le moule. La matière s'y couloit, & n'avoit ni fils, ni table, ni points. Je la retirois du four en la faiſant paſſer dans l'arche aux *féraces*, & ne la faiſant ſortir que par des degrés preſque inſenſibles, & proportionnés au chemin que je faiſois faire aux moules, & au degré de chaleur que l'on entretenoit dans le four pour la fonte d'autres nouvelles matières.

J'avoue cependant que ce moyen n'eſt pas ſans inconvéniens, parce que ſouvent le verre qui eſt adhérent au moule, ſe caſſe en s'y refroidiſſant. J'y remédiois en trempant le moule dans l'eau au ſortir du four, & l'engageois ainſi à ſe *calciner* où à ſe fendre en perdant ſa chaleur.

Un autre moyen plus ſimple encore, conſiſte à prendre, lorſque le four a perdu autant de ſa chaleur qu'il eſt poſſible,

(o) Ce moule doit avoir une forme convenable, & être fait avec précautions, afin que la matière de ce moule, en ſe refroidiſſant, n'éprouvant pas les mêmes changemens dans ſa forme que le verre qui s'y refroidit auſſi, ne caſſe point le verre qu'il contient.

de la matière avec une épaiſſe cuiller de cuivre que l'on a mouillée auparavant, & à verſer d'un ſeul jet la matière, en renverſant la cuiller ſur une plaque de cuivre, ou dans un moule de cuivre graiſſé. On ôte ce verre du moule, & on le met dans une *quilore*, ou eſpèce d'étui à manchon de tôle épaiſſe, poſé dans l'arche à recuire les ouvrages; on l'en tire par degrés preſque inſenſibles *(p)*. J'ai obtenu ainſi un verre ou criſtal *flint*, plus parfait, & je me flatte qu'il répond à la demande de l'Académie. Je ſoumets à ſon jugement de ce verre brut, de dégroſſi, & d'autres taillés en objectifs par un Lunetier.

Je crois entendre quelques-uns de mes Lecteurs, dire qu'ils ont imaginé un moyen plus aiſé, plus certain, qui conſiſte à allumer & à éteindre à chaque fonte un four deſtiné à faire ſeulement des verres de Lunettes achromatiques.

Je réponds que ce moyen, qui eſt praticable, ne tend pas à la perfection de la matière, mais la rend plus chère, ce qui me laiſſe l'avantage de pouvoir en offrir au choix du Public une plus grande quantité, & à plus bas prix.

L'on n'imaginera pas, je crois, qu'étant à la tête d'une Verrerie, l'intérêt m'ait conduit. Si mon cœur eût été capable de ces vues baſſes, ce vil intérêt eût briſé ma plume, & l'eût arrêtée pour qu'elle me refuſât ſon ſecours dans ce moment.

Je ſuppoſe qu'un Particulier ait conſtruit un four pour y faire ſeulement du *flint-glaſſ*; peut-il eſpérer de ce feu éphèmère ce que nous devons attendre d'un feu vif, allumé depuis quinze ou dix-huit mois *(q)*!

(p) On ne court aucun riſque de laiſſer la matière prendre un commencement de fuſion dans ce four à recuite, où elle ne reçoit point de fumée, & où les parties les plus peſantes étant fondues, prennent un arrangement, qui, ſans doute, tourne à l'avantage du *flint-glaſſ*.

(q) Lorſque nous faiſons conſtruire un four dans un lieu où il n'y en a point eu, il faut au moins deux mois de feu avant d'en tirer tout l'avantage que nous devons en attendre; & nous réglons nos compoſitions ſuivant le peu de chaleur que donne ce four, qui conſume pour lors beaucoup de bois en pure perte. Il en eſt de même lorſque le four eſt ſur ſa fin; nous ſommes obligés pour lors de forcer la doſe des fondans; & le verre n'en eſt pas ſi beau.

Mais,

Mais, ou il a travaillé en aveugle, ou il s'eſt dirigé d'après de vraies connoiſſances dans l'art de la Verrerie. Si un haſard heureux l'a favoriſé, l'Académie mettra le comble à ſon bonheur en le couronnant. S'il eſt dans ma deuxième hypothèſe, il ſaura mieux que moi combien l'art de la Verrerie offre de connoiſſances nouvelles à acquérir. Nous voyons depuis peu l'eſpace immenſe qu'il laiſſe à nos découvertes. Le plus clair-voyant y travaille ſouvent en aveugle; une circonſtance inconnue peut nous faire manquer une compoſition. Nous travaillons une matière coûteuſe; & la ſeule économie forme notre gain.

Je ſuppoſe que dans nos Verreries l'une de ces circonſtances faſſe manquer la fonte du *flint-glaſſ*, nous jetons les morceaux dans un pot, & nous la recommençons, ou nous formons avec cette matière des criſtaux qui entreront dans notre commerce: nos ſoins, nos peines, notre temps ne ſont plus comptés pour rien. Ces conſidérations me font pronoſtiquer que cette fabrique ne ſortira pas des Verreries; & je m'appuye ſur ce que rapportent les Voyageurs qui aſſurent que les Anglois, dans le choix du bon *flint-glaſſ*, laiſſent beaucoup de rebut, qui n'eſt pas en pure perte pour le Verrier qui en forme des criſtaux; ma méthode eſt donc plus générale & la ſeule que puiſſent adopter nos Verriers.

On ſait que les glaces de Veniſe ſont plus eſtimées que nos glaces coulées: ces premières ſont toutes ſoufflées en *manchon* & *ouvertes*. Perſonne n'ignore encore que la même matière travaillée en *plats* eſt plus belle que ſoufflée en *manchons*. Les plats acquièrent de la beauté en ſe recuiſant & ſe refroidiſſant, tandis que les verres à *manchons* que l'on coupe au four, pour, en les ouvrant, faire des vitres, perdent de leur brillant en les étendant & en ſe refroidiſſant. J'ai travaillé le *flint-glaſſ* de ces deux manières; 1.° de ſouffler en *manchons* les *flint-glaſſ*, & de les couper comme font les Anglois; 2.° de les ouvrir en plats.

Le verre des Lunettes achromatiques doit être tendre & coulant au ſortir du pot; pour en former un *manchon* ou

un *plat*, il faut cueillir plusieurs fois en laissant refroidir sa première *paraison*. On compte aisément sur de pareils morceaux les différentes levées ; ce qui forme des tables dans ce verre. Ceci confirme de la manière la plus sensible, ce que j'ai avancé sur l'origine des tables ou fils qui se remarquent très-souvent en travaillant le *flint-glass* Anglois, de sorte que je ne crois pas ces deux moyens les plus propres à produire le meilleur *flint-glass*.

L'Auteur joint à son Mémoire:

N.os 1. Un verre de salin coloré avec le cobolt, & pesant.

2. Un verre de salin dégrossi.

2.a Un verre de salin poli.

3. Un verre de salin plus blanc.

3.a Ce verre arrondi & dégrossi.

4. Un verre de salin en plat.

5. Un autre travaillé avec les fers, & coupé près de la canne.

6. Des verres coupés comme pour des verres de montre.

7. Verre de salin avec sa couleur naturelle.

7.a Ce verre taillé en objectif.

8. Verre de salpêtre pesant, pour faire voir les couches produites par trois cueillages.

9. Un verre à plat à deux cueillages.

10. Verre de cristal de roche, salpêtre de la seconde cuite, & *minium*.

11. Verre de cristal de roche, un peu neigeux, parce qu'il est trop chargé de fondans, & qu'il a été tiré du four où il y avoit pour lors une trop vive chaleur.

12. Un verre de salin rafiné.

12.a Le même verre poli.

13. Un verre de vitre avec soude de varech, & des plus communs; seulement pour juger de son poids, & en faire l'essai comme *crown-glass*.

Les numéros 4, 5, 6, pour juger si ces manières de travailler les verres pourroient être admises pour le *flint-glass*.

Les numéros 8, 9, montrent les différens cueillages, & appuient le sentiment de l'Auteur sur les fils ou tables du *flint-glass* Anglois.

P. S. Je vous ai dépeint, Meſſieurs, l'art de la Verrerie, étant encore dans ſon berçeau; je crois même vous l'avoir prouvé, en avouant dans le cours de cet ouvrage combien nous avons de lumières utiles à deſirer; utiles, je devrois dire néceſſaires, pour perfectionner cet Art, & étendre les barrières de nos connoiſſances, même en Phyſique. Il ſeroit de votre gloire d'aider de vos lumières, des Artiſtes qui ſe feroient honneur de travailler de concert avec vous à exécuter ce vaſte projet.

Je crois vous avoir fait voir que la peſanteur d'un verre dépend de la ſubſtance vitrifiable que l'on emploie, chaque ſubſtance offre un poids ſpécifique différent; par conſéquent, un verre d'une peſanteur différente. Combien d'étendue auroit cet article bien traité, par la quantité de terre vitrifiable & de chaux métallique à examiner! Il faudroit mieux connoître l'effet des fondans ſur le verre; étudier la conſtruction & la forme du four le plus propre à donner une vive chaleur, qui s'accorderoit avec nos ouvrages, & la façon de les travailler.

Enfin dans ce travail, la Chimie la plus parfaite s'exerceroit avec avantage, mais la Phyſique y trouveroit peut-être des faits qui ſerviroient d'explications au ſyſtème de la lumière, & des corps propres à la réfléchir. Le plomb eſt gris; perdant de ſon phlogiſtique, il devient jaune, rouge; le verre en eſt jaune: cette chaux, formée par un acide, devient blanche; elle fait un verre jaune un peu vert, & cependant avec des cendres l'on fait un verre vert, avec du charbon, un verre brun: d'un verre fin je peux en faire une eſpèce d'émail ou de porcelaine, ſans aucune addition de ſubſtance métallique, & ſeulement en l'étouffant, & lui donnant du phlogiſtique. Certaine quantité de manganèſe blanchit le verre, une plus grande le rougit & le noircit; comment cela s'opère-t-il, &c. &c. &c.? Que de queſtions, qui, étudiées, pourroient être éclaircies, & ſervir à notre inſtruction!

FIN des Prix.

MÉMOIRES

MÉMOIRES
DE
MATHÉMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,

Préſentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savans, & lûs dans ſes Aſſemblées.

EXPÉRIENCES PHYSICO-CHIMIQUES

*Sur l'Air qui ſe dégage des Corps dans le temps de leur décompoſition, & qu'on connoît ſous le nom vulgaire d'*Air fixé.

Par M. Bucquet.

IL y a long-temps que les Phyſiciens ont regardé l'air comme une ſubſtance ſimple & élémentaire; mais les anciens Chimiſtes, & même pluſieurs de ceux du moyen âge, ne l'ont point admis au nombre des élémens. Accoutumés à ne regarder comme principes que les produits groſſiers qu'ils retiroient de l'analyſe

des corps, l'air, par sa ténuité, leur avoit échappé. Il n'est compté ni dans les Principes de Paracelse, ni dans ceux de Becher & de Stahl; Vanhelmont cependant avoit observé que le tartre crud, distillé dans des vaisseaux exactement fermés, occasionne leur rupture, quelque grands qu'ils soient. Le même Chimiste a connu la vapeur incoërcible qui s'élève des liqueurs en fermentation, & il l'a désignée sous le nom de *gas sylvestre;* mais il n'a déterminé ni la nature de ces vapeurs, ni la cause qui produit la fracture des vaisseaux dans lesquels on distille le tartre. Boyle est le premier Chimiste qui ait véritablement fait attention à l'air qu'on retire en analysant les corps: Newton en parle aussi en plusieurs endroits de son Optique; mais ni l'un ni l'autre ne l'ont regardé comme différent de l'air atmosphérique. Il en est de même de Boërhaave; ce Savant donne, dans son Traité de l'air, différens moyens de produire cette substance, en unissant des acides aux sels alkalis, à la craie, aux métaux, aux huiles; il indique également la possibilité d'en extraire par la combustion, la distillation, la fermentation; & quoiqu'il ait bien su distinguer le nouvel air produit par la décomposition des corps, de celui qui se trouve renfermé dans leurs pores & qu'on en retire par le seul secours de la machine pneumatique, il ne lui a pas attribué de propriétés particulières, encore qu'il ait eu connoissance des expériences de Hales, ainsi qu'il le dit lui-même. C'est donc à ce dernier qu'on doit attribuer véritablement la découverte de l'air fixé; il a calculé avec une très-grande exactitude, dans ses excellens Traités de la Statique des végétaux & de l'Hémastatique, la quantité d'air qu'on retire par la distillation des matières minérales, végétales & animales: il a très-judicieusement fait remarquer à l'égard de ces dernières, que l'air qui entre dans leur composition n'en sort pas au commencement de l'analyse, mais seulement lorsque l'opération est fort avancée & que la décomposition est au plus haut point. Il a mesuré avec la même exactitude la quantité d'air qui se produit dans les dissolutions métalliques & pendant le temps que plusieurs matières végétales & animales

ſubiſſent la fermentation. Le même Auteur a obſervé que pluſieurs matières analyſées, ou pluſieurs mélanges, donnoient d'abord de l'air & qu'ils en abſorboient enſuite, parce que preſque toutes les décompoſitions donnant lieu à de nouvelles combinaiſons, une partie de l'air qui s'eſt dégagé d'abord, rentre dans la compoſition de ces nouveaux êtres. Quelques mélanges, ſuivant l'obſervation de Hales, commencent par abſorber de l'air & en donnent enſuite, mais ſouvent moins qu'ils n'en ont abſorbé. Tous ces phénomènes dépendent d'une même cauſe; premièrement tous les corps qui contiennent peu d'air dans leur combinaiſon, en fourniſſent peu dans leur décompoſition; en ſecond lieu, ſi ces corps ſe réduiſent facilement en vapeurs, ils ſe mêlent dans cet état à l'air, lui font perdre ſon reſſort & le réduiſent à n'occuper qu'un eſpace beaucoup plus petit que celui qu'il occupoit auparavant, en ſorte que ce fluide ſemble détruit en grande partie: au moins il me ſemble que c'eſt de cette manière qu'on doit entendre ce que dit Hales de la vertu d'abſorber l'air, qu'il attribue à certains corps ſuſceptibles de ſe réduire facilement en vapeurs, ſoit pendant qu'on les diſtille, comme les acides minéraux & les eſprits alkalis volatils, ſoit dans le temps qu'on les unit à d'autres corps, comme l'acide nitreux qu'on unit au fer. Pendant la première action de cet acide ſur le métal, une grande quantité d'air eſt abſorbée, parce que l'acide nitreux chargé du phlogiſtique du fer ſe diſſipe d'abord en vapeurs rouges qui font perdre à l'air ſon reſſort; mais bientôt après, une portion de l'acide agiſſant ſur la terre métallique, produit de l'air en la diſſolvant. Depuis Hales, pluſieurs habiles Chimiſtes & Phyſiciens ont écrit ſur l'air fixé: le docteur Black, dans un excellent Mémoire ſur la Magnéſie & ſur la Chaux, imprimé en 1756 dans le deuxième volume des Actes d'Édimbourg, a fait connoître un grand nombre de propriétés de l'air fixé, différentes même de celles qu'avoit remarquées Hales, & relatives, pour la plupart, à la manière dont ce principe ſe combine aux terres calcaires & aux ſels alkalis. Il détermine avec beaucoup

d'exactitude son juste rapport avec chacun de ces différens corps, & explique un grand nombre de phénomènes relatifs à la causticité que peuvent acquérir les terres calcaires & les sels alkalis, phénomènes qui jusqu'alors avoient fort embarrassé les Chimistes. M. Macbride dans ses Dissertations sur l'air fixé, sur les mélanges des substances alimentaires, sur la vertu dissolvante de la chaux vive, &c. a publié d'importantes découvertes sur l'air fixé. Ce Physicien, à l'exemple de Hales, a mesuré la quantité d'air qui se dégage pendant la fermentation de différentes substances végétales & animales; il a observé également que cet air suffoque tous les animaux qui le respirent, qu'il détruit la putridité, & qu'un des meilleurs moyens d'empècher cette altération de se produire, c'est de retarder le développement de l'air fixé, qui tend à se dégager des corps fermentescibles. M. Jacquin, célèbre Professeur de Chimie à Vienne, dans une Dissertation qui a pour objet d'établir l'opinion du Docteur Black sur la chaux vive, & de discuter celle de Meyer sur l'*acidum pingue*, a répété un grand nombre des expériences de Black, & en a ajouté beaucoup d'autres nouvelles & fort curieuses, pour prouver que la chaux vive ne doit son état qu'à la perte de l'air fixé qui se trouvoit contenu dans la pierre calcaire. Cet Auteur ajoute avec le docteur Black, que la seule restitution de ce principe suffit pour réduire la chaux vive à l'état de pierre calcaire. Quoique ces assertions ne me paroissent pas suffisamment démontrées, ainsi que je me propose de le faire voir par la suite, il n'en est pas moins vrai que cet Ouvrage de M. Jacquin renferme des faits très-nouveaux & très-importans, & qu'il est un des meilleurs de ceux qu'on a publiés sur l'air fixé. M. Venel, Docteur en Médecine & Professeur de Chimie à Montpellier, a attribué à l'air le goût des eaux minérales, acidules & spiritueuses: cet habile Chimiste est parvenu à les imiter parfaitement en introduisant dans de l'eau pure une petite portion d'un acide & d'un sel alkali, qui en se combinant dans l'eau, la chargent de l'air qui se produit au moment de leur union. M. Priestley est parvenu aux mêmes fins, en

introduiſant également dans l'eau de l'air fixé, mais ſans qu'elle retînt aucune matière ſaline; ce qui n'a point lieu dans le procédé de M. Venel.

Tels ſont les principaux travaux qui avoient été donnés juſqu'ici ſur l'air fixé. M. Prieſtley vient de publier un Ouvrage qui renferme pluſieurs faits très-nouveaux. M. Rouelle a inſéré dans l'Avant-coureur, quelques expériences fort ſingulières; & M. Lavoiſier vient de faire part à l'Académie & au Public, de pluſieurs phénomènes très-curieux & très-intéreſſans. Il y a quelque choſe de commun entre mon travail & ceux de M.rs Prieſtley & Rouelle; mais je n'ai point examiné les ſubſtances ſur leſquelles M. Lavoiſier a travaillé. Quelque utiles & quelque bien entendues que ſoient les expériences qu'on a faites ſur l'air fixé, il m'a ſemblé qu'il reſtoit encore beaucoup de connoiſſances à acquérir ſur ce principe, pour ſavoir en quoi il diffère préciſément de l'air atmoſphérique, s'il eſt contenu dans tous les corps, s'il eſt abſolument le même de quelque ſubſtance qu'on le retire, & quelque moyen qu'on emploie pour l'extraire. Ces recherches m'ont paru mériter d'autant plus d'attention, que l'air fixé eſt auſſi intéreſſant en Chimie par ſes ſingulières propriétés, & par le rôle qu'il joue dans les différentes combinaiſons & opérations, qu'il peut devenir précieux aux Médecins, par la facilité qu'il a de ſe combiner aux ſubſtances animales putrides, & de détruire en elles ce caractère. Quoique ce dernier objet ne ſoit pas exactement du reſſort de l'Académie, elle prend trop d'intérêt à tout ce qui peut concerner le progrès des Sciences & la conſervation des hommes, pour ne pas voir avec plaiſir que les travaux des Chimiſtes puiſſent jeter du jour ſur l'art de guérir; elle paroît même avoir eu décidément cette intention, en faiſant faire l'analyſe d'un grand nombre de plantes, analyſe qui n'eut pas alors le ſuccès qu'on en attendoit, la Chimie n'ayant point encore fait les progrès qu'elle a faits depuis que les Chimiſtes ont eſſayé d'examiner les plantes par l'analyſe menſtruelle, & en ſéparant d'abord leurs principes, pour

les examiner enſuite ſéparément par une analyſe ſecondaire. Parmi les Auteurs qui ont examiné l'air fixé, pluſieurs l'ont enviſagé comme un remède excellent; mais enyvrés de leur découverte, ils ont voulu s'en ſervir pour expliquer tous les phénomènes, tant de la ſanté, que de la maladie; & peut-être eſt-il à craindre qu'un pareil enthouſiaſme, peu propre à mériter la confiance, ne ſuffiſe pour décréditer un ſecours qui pourra devenir précieux quand il ſera employé à propos.

Ces réflexions importantes avoient frappé depuis long-temps M. le Duc de la Rochefoucauld, dont le goût pour les Sciences & le zèle pour leur avancement, ſont connus de l'Académie. Il me fit l'honneur de me communiquer ſes idées; & après lui avoir fait part des miennes, je répétai dans ſon laboratoire & ſous ſes yeux, les expériences dont je vais avoir l'honneur de rendre compte.

Mon intention en les faiſant, a été de déterminer, ſi l'air fixé eſt différent de l'air atmoſphérique, & en quoi conſiſte cette différence, s'il eſt le même, de quelque corps qu'on le retire, & de quelque moyen qu'on ſe ſerve pour l'extraire. Elles n'auront pas toutes le mérite de la nouveauté; mais ayant été répétées avec ſoin, & dans des circonſtances différentes de celles dans leſquelles les Auteurs les ont tentées, elles pourront contribuer à aſſurer leurs découvertes, à faciliter l'intelligence de pluſieurs de leurs opérations, & à compléter l'hiſtoire d'un corps qui, de même que le phlogiſtique, produit de grands & de ſinguliers effets, & paroît être de nature à occuper long-temps les Chimiſtes avant d'être parfaitement connu.

Il y a trois moyens de décompoſer les corps; les combinaiſons ou l'analyſe menſtruelle, la diſtillation & la fermentation. J'ai extrait l'air fixé de différentes ſubſtances en les ſoumettant à ces trois genres d'analyſes. Je commence par les combinaiſons, parce qu'elles paroiſſent fournir un air plus pur & plus dégagé de ſubſtances étrangères. M.rs Hales, Black, Macbride, Jacquin, Venel, Prieſtley, qui ont examiné l'air qui ſe dégage pendant les efferveſcences &

les diſſolutions, n'ont point été à même de le conſidérer dans ſon état de pureté, parce que les vaiſſeaux dont ils ſe ſervoient contenant de l'air atmoſphérique, ces deux airs ſe trouvoient mélangés. J'ai donc cru devoir faire quelques changemens à l'appareil dont ſe ſervoit M. Macbride, en conſervant néanmoins les deux bouteilles & le tube de communication. Les bouteilles dont je me ſuis ſervi ſont coupées en deux parties, & les deux parties s'ajuſtent l'une ſur l'autre par des vis de cuivre qui ferment bien, & dont on lutte encore les bords avec de la cire molle. A l'aide de ces vis, on peut ouvrir commodément les vaiſſeaux, les nettoyer, y placer les corps qu'on veut mettre en expérience. Chaque bouteille eſt terminée par une virole de cuivre, dans laquelle on maſtique un tube de verre courbé, qui ſert à établir la communication. Une des bouteilles ſert pour faire les mélanges, je l'appellerai dorénavant *bouteille des mélanges;* l'autre ſert pour recevoir l'air fixé & les corps qu'on veut ſoumettre à ſon action, je l'appellerai *bouteille de réception.* La bouteille des mélanges eſt percée dans ſa partie ſupérieure, d'un trou ſur lequel on a maſtiqué un robinet de cuivre fermant exactement. Ce robinet eſt diſpoſé de manière que ſa partie ſupérieure reçoit un entonnoir de verre, dont la tige eſt terminée par un pas de vis. La bouteille de réception eſt percée dans ſon fond, d'un trou auquel on a maſtiqué un robinet de cuivre fermant exactement, & diſpoſé de manière à être commodément viſſé ſur une machine pneumatique. Mon appareil étant conſtruit de la ſorte, je puis opérer dans le vide, & obtenir par conſéquent l'air fixé auſſi pur qu'il ſoit poſſible de ſe le procurer: voici ce que j'ai obſervé.

Ayant placé la bouteille de réception ſur une machine pneumatique, j'y enfermai un petit baromètre d'épreuve: j'introduiſis dans la bouteille des mélanges deux onces deux gros d'acide vitriolique, dont le poids étoit à celui de l'eau, comme 51 à 39; je le coupai avec partie égale d'eau diſtillée: je fermai cette bouteille & ſon robinet garni de l'entonnoir; & après l'avoir placée ſur un petit guéridon, à la hauteur

de la machine pneumatique, je maſtiquai le tube de communication, & je fis le vide aſſez parfaitement pour faire baiſſer le mercure de mon baromètre juſqu'au ſixième degré, ce qui exigea vingt-ſix coups de piſton. Le vide ſe ſoutenant toujours dans le même état, je verſai dans l'entonnoir une leſſive alkaline préparée avec deux onces deux gros de ſel alkali fixe de tartre bien pur & bien ſec, & neuf onces d'eau diſtillée; j'ouvris alors le robinet de la bouteille des mélanges, & je fis tomber peu-à-peu ma leſſive alkaline ſur l'acide vitriolique; il ſe fit une effervescence des plus vives, & il ſe dégagea de l'air qui faiſoit remonter le mercure du baromètre d'autant plus rapidement, que je verſois à la fois une plus grande quantité de leſſive alkaline ſur l'acide: je continuai d'en verſer juſqu'à ce que mes vaiſſeaux fuſſent remplis d'air, ce que je reconnus lorſque je vis que ma leſſive alkaline au lieu de tomber dans la bouteille, ſe ſoutenoit dans l'entonnoir, quoique le robinet fût ouvert. Ce phénomène ſe préſente toutes les fois que l'air fixé dont l'intérieur des vaiſſeaux eſt rempli, ſe trouve en équilibre avec l'atmoſphère; mais ſi l'effervescence dure encore, & qu'il ſe produiſe une nouvelle quantité d'air fixé, il ſort par l'entonnoir & traverſe la liqueur alkaline en formant un jet de bulles plus ou moins conſidérable. Si on ferme les bouteilles lorſqu'elles ſont pleines d'air, & qu'il s'en produit encore, l'excès ſe fait jour à travers les luts lorſqu'ils ne ſont pas fort épais; mais ſi la ſurabondance n'eſt que petite ou que les luts ſoient capables de réſiſter, cet air reſte condenſé dans les vaiſſeaux. Après avoir fait mon expérience, telle que je viens de l'indiquer, je laiſſai mon appareil fermé pendant douze heures; au bout de ce temps, j'ouvris l'entonnoir & je laiſſai tomber dans la bouteille des mélanges, le reſte de ma leſſive alkaline, qui ne trouva aucune réſiſtance à ſa deſcente; ce qui prouve que l'air fixé qui rempliſſoit l'intérieur des bouteilles s'étoit condenſé, ou qu'une portion avoit été abſorbée; Hales avoit obſervé la même choſe dans pluſieurs circonſtances. Après que la leſſive alkaline fut tombée, je ne m'aperçus pas qu'il rentrât de l'air, au moins je n'entendis

pas

pas de sifflement; ce qui cependant m'eſt arrivé toutes les fois qu'il ſe trouvoit un peu de vide dans mes bouteilles.

L'air fixé que j'avois produit par ce moyen, avoit une odeur très-vive qui affectoit déſagréablement les yeux & excitoit violemment la toux. Cette odeur m'a paru parfaitement ſemblable à celle qui s'élève des matières qui ſubiſſent la fermentation ſpiritueuſe, auſſi je la déſignerai dorénavant ſous le nom d'*odeur gazeuſe;* elle ſe fait ſentir également dans les deux bouteilles & ſubſiſte aſſez long-temps, même lorſqu'on tient l'air fixé dans des vaiſſeaux négligemment bouchés, mais lorſqu'on laiſſe les vaiſſeaux fort ouverts, elle ſe diſſipe bientôt: j'ai ſaturé les alkalis fixes du tartre & de la ſoude avec les acides nitreux & marin, & je n'ai aperçu aucune différence dans l'odeur de l'air qui s'en eſt dégagé.

Ayant employé de l'eſprit alkali volatil tiré du ſel ammoniac par l'alkali fixe, pour ſaturer les acides vitriolique, nitreux & marin, il ſe fit dans tous les cas une très-vive efferveſcence, & l'air fixé qui ſe dégagea avoit une odeur beaucoup plus pénétrante que celui qui ſe dégage pendant l'efferveſcence produite lors de l'union des mêmes acides aux ſels alkalis fixes; & en ouvrant la bouteille de réception, je ſentis une odeur très-fétide & ſemblable à celle de la viande putréfiée: l'odeur fétide ſe fit moins apercevoir en ouvrant la bouteille des mélanges, parce qu'il s'en élevoit une vapeur beaucoup plus pénétrante. Je n'ai aperçu aucune différence quel que ſoit l'acide que j'aie employé; dans toutes les efferveſcences, ma bouteille de réception s'eſt toujours conſidérablement obſcurcie, mais beaucoup plus conſidérablement dans la combinaiſon des ſels ammoniacaux, que dans toutes les autres.

J'ai verſé ſucceſſivement ſur de la craie les acides vitriolique, nitreux & marin; il s'eſt fait, dans tous les cas, une efferveſcence très-vive, l'air fixé qui s'eſt dégagé avoit une odeur gazeuſe qui ne m'a paru différer en rien de l'odeur qui s'élève lorſqu'on unit les acides aux ſels alkalis fixes.

Deſirant connoître ſi les matières métalliques contenoient de l'air fixé, ou ſi cet air étoit le même que celui qui s'étoit

dégagé dans les combinaiſons précédentes, je jetai de la limaille de zinc dans ma bouteille des mélanges; & ayant fait le vide dans les vaiſſeaux, je fis tomber ſur cette limaille un peu de l'acide vitriolique dont le poids eſt à celui de l'eau, ainſi que je l'ai déjà dit, comme 51 à 39. La diſſolution s'étant faite très-promptement, le mercure du petit baromètre d'épreuve qui étoit deſcendu juſqu'au ſixième degré, remonta avec beaucoup de rapidité; la diſſolution de la limaille de zinc étant achevée, j'ouvris la bouteille, mais je ne ſentis qu'une odeur déſagréable & qui n'étoit nullement gazeuſe. Je répétai la même expérience en me ſervant de limaille d'acier bien pur au lieu de limaille de zinc; la diſſolution étant achevée & les bouteilles ouvertes, je ne ſentis encore qu'une odeur déſagréable, mais point du tout d'odeur gazeuſe: je n'ai point eſſayé ſur d'autres matières métalliques, je n'ai point employé non plus d'autres acides, parce que les autres matières métalliques ne ſe diſſolvent pas facilement à froid dans l'acide vitriolique, & que les autres acides fourniſſent une grande quantité de vapeurs qui auroient altéré la pureté de l'air que je voulois obtenir. Je crois devoir avertir les perſonnes qui deſireroient répéter ces dernières expériences, qu'elles exigent quelques précautions: il faut verſer une petite quantité d'acide à chaque fois; car ſi on en met trop, il ſe dégage une telle quantité d'air que les vaiſſeaux ſe briſent.

Pour examiner ſi l'air fixé qui ſe dégage dans le temps d'une efferveſcence, ne contient rien des ſubſtances ſalines qu'on y a employées, j'expoſai dans la bouteille de réception une diſſolution de ſirop de violettes dans de l'eau; je la chargeai d'air fixé dégagé des différentes combinaiſons ſalines & diſſolutions métalliques dont j'ai parlé plus haut: je n'ai aperçu aucune altération dans la couleur du ſirop, quoiqu'il eût ſéjourné pendant plus de douze heures dans l'air fixé dégagé par ces différens moyens.

De l'eau pure placée dans la bouteille de réception & chargée de l'air fixé qui ſe dégage dans l'union des trois acides aux ſels alkalis fixes ou volatils, & même à la craie, a pris

une ſaveur piquante & acidule. Cette eau expoſée à l'air ne conſerve pas ſa ſaveur pendant plus de vingt-quatre heures; cette même ſaveur diminue conſidérablement lorſqu'on fait chauffer l'eau, & ſe diſſipe entièrement après l'ébullition; mais de pareille eau miſe dans une bouteille fermée d'un bon bouchon de liége, a conſervé ſa ſaveur pendant quinze jours, & peut-être l'eût-elle gardée davantage, ſi je n'avois ſouvent ouvert la bouteille pour l'examiner. L'eau plongée dans l'air fixé qui ſe dégage des diſſolutions métalliques, ne prend point de goût acidule. M. Rouelle a obſervé la même choſe à l'égard de la ſaveur des eaux acidules, mais il ajoute qu'il eſt poſſible avec du temps de combiner à l'eau un peu de l'air fixé dégagé des diſſolutions métalliques. J'ai cru m'apercevoir que l'eau ſoumiſe à l'action de cet air fixé ne faiſoit que s'imprégner de la mauvaiſe odeur qui eſt répandue dans les vaiſſeaux, & elle ne m'a paru aucunement aërée: au reſte je ne prétends pas nier l'expérience de M. Rouelle, qui peut avoir opéré autrement que moi. Comme pluſieurs habiles Phyſiciens penſent que le vin, pour devenir acide, abſorbe de l'air fixé, j'eſſayai d'en charger un excellent vin vieux de Bourgogne & je l'y laiſſai ſéjourner pendant quarante-huit heures; au bout de ce temps le vin avoit une odeur très-piquante & une ſaveur acerbe, ſemblable à celle d'un vin vert de mauvaiſe qualité: il n'étoit cependant point acide, à proprement parler; mais peut-être eſt-ce le premier degré de cette fermentation. M. l'abbé Rozier, dans ſa Diſſertation ſur les vins de Provence, a bien remarqué que les vins qui s'aigriſſoient, abſorboient de l'air. M.rs Lavoiſier & Prieſtley ont fait la même obſervation; mais ce dernier a démontré par des expériences très-bien faites, que lorſque la fermentation acide avançoit davantage, elle fourniſſoit beaucoup plus d'air qu'elle n'en avoit d'abord abſorbé. Au reſte, je ne puis attribuer qu'à l'air fixé les changemens que mon vin avoit éprouvés, puiſque de pareil vin expoſé à l'air libre pendant le même eſpace de temps, n'a pas ſubi les mêmes altérations.

Je n'ai point eſſayé d'expoſer du vin à l'air qui ſe dégage

des dissolutions métalliques; mais je présume fort que puisque cet air n'a pas d'odeur gazeuse, & qu'il ne cause aucune altération à l'eau, il ne pourroit pas en communiquer au vin, qui ne me paroît pas aussi susceptible de se combiner à l'air fixé. Cette présomption va acquérir de la force par les expériences suivantes.

Ayant pris de l'esprit alkali volatil tiré du sel ammoniac par la chaux, & qui ne faisoit aucune effervescence avec les acides, je le plaçai dans la bouteille de réception; je fis le vide, & ayant dégagé de l'air fixé, soit par l'union des acides aux alkalis fixes, soit par l'union de ces mêmes acides aux alkalis volatils ou à la craie, l'esprit de sel ammoniac a toujours recouvré la propriété de faire effervescence avec tous les acides, & une partie s'est cristallisée sur les bords du vase qui le contenoit.

De pareil esprit alkali volatil tiré du sel ammoniac par la chaux, & qui ne faisoit aucune effervescence avec les acides, ayant été exposé à l'air dégagé des dissolutions métalliques, il s'est trouvé le même qu'avant l'opération, c'est-à-dire, très-pénétrant, parfaitement fluide & ne faisant aucune effervescence avec les acides; & je ne puis croire que ce fût faute d'air fixé, car l'esprit alkali volatil se trouvoit mis en expérience, lorsqu'une de mes bouteilles se trouva remplie d'air au point de se briser.

J'exposai de l'eau de chaux récente à l'air fixé dégagé par l'union des acides aux sels alkalis fixes, alkalis volatils & à la craie; l'eau de chaux s'est troublée, & il s'est fait un précipité qui n'étoit que de la craie pure. Je m'en suis assuré, non-seulement parce que ce précipité faisoit effervescence avec les acides, mais encore parce que mêlé au sel ammoniac, il n'en dégage point l'alkali volatil sans le secours du feu: de semblable eau de chaux, exposée à l'air fixé, qui se dégage des dissolutions métalliques, ne s'est point précipitée.

Ces faits me paroissant suffire pour démontrer que l'air fixé n'est pas précisément le même air que l'air atmosphérique, & qu'il diffère suivant les corps qui le fournissent, je suspendis

mes expériences dans le deſſein de les reprendre inceſſamment, & je m'attachai à reconnoître quelle différence pouvoit ſe trouver entre ces airs fixés & l'air commun. La première tentative que je fis, fut de comparer, ainſi que l'avoit fait le célèbre Hales, le poids de l'air fixé au poids de l'air atmoſphérique : pour cela, je plaçai dans la bouteille de réception un gobelet de verre dans lequel j'avois mis de l'acide vitriolique; je fermai cette bouteille avec le couvercle de la bouteille des mélanges, diſpoſée de manière que l'extrémité de l'entonnoir étoit placée au-deſſus du gobelet qui contenoit l'acide; au ſommet de cette bouteille je luttai un petit ballon à peſer l'air, & je fis le vide de manière à faire deſcendre le mercure du petit baromètre à deux lignes près du niveau : ayant enſuite fermé le robinet qui, de la bouteille communiquoit à la machine pneumatique, je fis tomber par l'entonnoir une leſſive de ſel de tartre ſur l'acide contenu dans le gobelet. Lorſque mes vaiſſeaux furent pleins d'air, je fermai le ballon, & après l'avoir détaché de deſſus l'appareil, je le peſai; l'ayant enſuite vidé, je le laiſſai ſe remplir d'air atmoſphérique, je le peſai de nouveau, & je n'ai point trouvé de différence dans le poids de ces deux airs.

Voulant comparer la compreſſibilité & le reſſort de l'air fixé avec ces mêmes propriétés de l'air atmoſphérique, & n'en pouvant raſſembler une aſſez grande quantité pour en charger une fontaine de compreſſion ou la croſſe d'un fuſil à vent, je me ſervis du tube de Boyle, dont les Phyſiciens ſe ſervent ſouvent pour comprimer l'air en le chargeant d'une colonne de mercure: ce tube a deux branches, dont l'une eſt haute d'environ trente pouces & ouverte par en haut, l'autre eſt beaucoup plus courte & fermée. Je fis ſéparer ce tube à ſa courbure, en deux parties, & je réunis les pièces ſur un robinet de cuivre: je verſai dans la longue branche, du mercure qui réduiſit l'air à un eſpace plus petit; ayant marqué cette réduction, je ſéparai la branche courte & la luttai avec ſon robinet au haut d'un appareil ſemblable à celui que j'ai employé pour vider le ballon à peſer l'air & le remplir d'air

ſixé : je ſis commodément le vide dans cette branche courte, & l'ayant enſuite remplie d'air fixé je fermai ſon robinet, & l'ayant détachée de deſſus l'appareil, je la réunis avec la longue branche que je chargeai de mercure comme auparavant. Ayant ouvert enſuite la communication, le mercure paſſa dans la branche courte, & réduiſit l'air fixé à peu-près au même point qu'il avoit réduit l'air atmoſphérique; l'un & l'autre de ces deux airs s'eſt remis dans ſon premier état avec la même facilité, lorſque j'ai diminué la quantité de mercure qui les comprimoit.

N'ayant pu découvrir de caractère ſalin dans l'air fixé, puiſqu'il n'altère en rien la couleur du ſirop de violettes, & qu'il n'altère pas davantage celle des ratiſſures de raves, comme l'a très-bien obſervé M. Macbride, je penſai que ſon odeur pouvoit bien ne dépendre que d'une portion de phlogiſtique qui ſe dégageoit avec l'air ; & cette opinion me parut d'autant plus vraiſemblable, que le phlogiſtique eſt, comme le ſavent les Chimiſtes, le principe des odeurs; & d'ailleurs, l'odeur de l'air fixé étant à peu-près le même, quoique cet air ſoit dégagé de pluſieurs corps différens, elle paroiſſoit pouvoir être attribuée à la préſence d'un corps connu pour ſimple & identique, de quelque ſubſtance qu'on le retire. J'eſſayai donc d'expoſer une lame d'argent bien polie, dans la bouteille de réception remplie de l'air fixé dégagé lors de l'union des acides à la craie, des ſels alkalis fixés ou volatils, mais elle n'éprouva aucune altération. La même lame expoſée aux vapeurs qui s'élèvent des diſſolutions métalliques, a été noircie. Du minium expoſé à l'air fixé qui ſe dégage dans l'union des acides aux alkalis ou à la craie, n'a éprouvé aucune altération, ni dans ſa couleur, ni dans ſon poids. Le mercure précipité *per-ſe*, que l'on ſait être la chaux métallique la plus réductible, expoſé de la même manière, n'a pas éprouvé plus de changement.

Il me reſtoit à ſavoir ſi l'air ſixé qui ſe dégage dans la combinaiſon des ſels neutres parfaits, des ſels ammoniacaux & des ſels à baſe terreuſe, & dont l'odeur eſt fort gazeuſe,

étoit inflammable comme celui qui ſe dégage des diſſolutions de zinc & de fer, dans l'acide vitriolique que j'avois pris pour exemple, ou de ces mêmes métaux dans l'acide marin. Les Auteurs ſe trouvent fort partagés. M. Hales prétend que tout air fixé eſt inflammable; il dit qu'ayant placé une chandelle allumée ſous une cloche remplie de l'air fixé, qui s'étoit dégagé par la diſtillation des pois, de l'ambre, de la cire, des écailles d'huître, l'air s'étoit enflammé; que la flamme s'éteignoit lorſqu'après avoir ôté ſa lumière il replongeoit la cloche dans l'eau, & qu'en replaçant ainſi pluſieurs fois la chandelle ſous la cloche, l'air s'étoit allumé pluſieurs fois. M. Macbride dit poſitivement que l'air qui ſe dégage pendant la fermentation des mélanges alimentaires, & tous les autres cas éteignent le feu. Il eſt vrai que M. Macbride ne dit pas comment il a fait ſon expérience; & on ſait aſſez que les vapeurs même les plus inflammables, ſoufflent les lumières lorſqu'on les préſente à elles en trop grande abondance: cela ſe voit lorſqu'on veut enflammer les vapeurs qui s'élèvent des diſſolutions de zinc ou de fer, par les acides vitriolique & marin, quoique ces vapeurs ſoient des plus inflammables lorſqu'on leur préſente convenablement une bougie bien allumée. Je fus donc curieux d'examiner la choſe avec attention. Mon premier deſſein fut d'abord de faire battre un briquet dans l'air fixé, & de comparer la vivacité des étincelles qui ſe produiroient avec celles qui ſe produiſent dans l'air commun; mais faiſant réflexion que je n'avois pour juger la vivacité de ces étincelles que la vue qui pouvoit me tromper, je renonçai à mon projet, & je pris un autre parti. Je mis dans trois matras à long col, du ſel alkali fixé bien ſec, dans trois autres du ſel alkali volatil concret, tiré du ſel ammoniac par l'alkali fixé, & dans trois autres, de la craie. Je verſai ſur chacune de ces matières les trois acides minéraux, & après avoir condenſé la vapeur qui s'en élève, en mettant le doigt ſur l'orifice du matras, comme on le fait pour enflammer la vapeur des diſſolutions de fer ou de zinc, j'ouvris le vaiſſeau devant des bougies bien allumées, mais

les vapeurs ne s'enflammèrent point. Lorſqu'elles ſortoient en très-grande abondance, elles éteignoient les lumières; ce qui n'arrivoit pas lorſqu'elles ſortoient en moindre quantité.

Il réſulte donc de ces expériences, que l'air fixé, dégagé dans l'union des acides aux ſels alkalis, à la craie, aux métaux, diffère de l'air atmoſphérique principalement par ſon odeur; que l'air fixé n'eſt point une ſubſtance identique, puiſqu'il a une odeur putride lorſqu'il ſe dégage dans la combinaiſon des ſels ammoniacaux, & qu'il n'a qu'une odeur ſimplement gazeuſe dans la combinaiſon des ſels neutres parfaits, & des ſels à baſe terreuſe; qu'enfin l'air dégagé des ſubſtances métalliques eſt très-différent des autres airs fixés, puiſqu'il n'a point l'odeur pénétrante, qu'il ne rend point l'eau acidule, qu'il ne précipite point l'eau de chaux, qu'il ne communique pas à l'alkali volatil cauſtique la propriété de faire effervеſcence; enfin de ceux que j'ai eſſayés, il eſt le ſeul qui m'ait paru inflammable, les autres ne donnant d'autres indices de la préſence du phlogiſtique que leur odeur, & peut-être le goût ſingulier qu'ils communiquent à l'eau. M. Rouelle, dans des recherches ſur cette même matière qu'il vient de publier dans l'Avant-coureur, a découvert que l'air qui s'élève lorſqu'on précipite le foie de ſoufre par un acide, étoit inflammable, & que cet air ne ſe combine point facilement à l'eau. A l'égard de l'air inflammable, dont parle le docteur Hales, cet air fixé pouvoit ſe trouver chargé de quelques vapeurs étrangères qui s'étoient élevées pendant la diſtillation: il y a long-temps qu'on s'eſt aperçu qu'en diſtillant le gayac & pluſieurs autres corps qui, comme lui, donnent beaucoup d'air & de vapeurs huileuſes, ces vapeurs ſortant par le trou du ballon dans lequel on le diſtille, forment un dard qui s'enflamme à l'approche d'une bougie. Je crois cependant pouvoir aſſurer que l'air fixé qui ſe dégage de beaucoup de corps pendant la diſtillation, eſt à-peu-près de la même nature que celui qui ſe dégage lors des combinaiſons; il en eſt de même de celui qui ſe produit dans le temps de la fermentation. Mais comme les expériences qui le prouvent

ſeroient

ſeroient encore fort longues à rapporter, j'en réſerve le détail pour un autre Mémoire, dans lequel je me propoſe de faire connoître pluſieurs faits relatifs à la manière dont l'air fixé ſe combine à différens corps.

Après avoir rédigé mes expériences, j'ai pris connoiſſance d'un Ouvrage de M. Prieſtley, qui paroît depuis fort peu de temps. Ce Chimiſte parle de pluſieurs faits que j'avois cru nouveaux, notamment de l'odeur particulière déſagréable qui s'élève des diſſolutions métalliques, & de quelques propriétés particulières à cette eſpèce d'air, qu'il déſigne auſſi ſous le nom d'*air inflammable*. Ces mêmes particularités n'ont point échappé à M. Rouelle, & je rends à ces Meſſieurs la juſtice qui leur eſt dûe, d'en avoir parlé les premiers. J'aurois même volontiers ſupprimé mon travail, ſi je ne l'euſſe cru propre à aſſurer leurs découvertes, & ſi d'ailleurs il n'eût préſenté d'autres particularités qui m'ont paru mériter d'être connues. M. Prieſtley donne encore le nom d'air inflammable à celui qu'on retire des matières végétales & animales; mais je ne crois pas qu'on puiſſe regarder cet air comme pur, à beaucoup près. M. Prieſtley fait mention d'un air qu'il nomme putride, mais cet air eſt celui qui ſe trouve chargé de la reſpiration des animaux ou infecté de la vapeur des ſubſtances putréfiées, & non pas celui qui ſe dégage dans le temps de la combinaiſon des ſels ammoniacaux & auquel j'ai donné ce nom. A l'égard de l'air nitreux dont parle auſſi M. Prieſtley, ce n'eſt que de l'air chargé des vapeurs de l'acide nitreux qui ſe dégage lorſqu'on diſſout quelque métal par cet acide.

PREMIER MÉMOIRE

POUR SERVIR

À L'HISTOIRE ANATOMIQUE DES POISSONS.

Par M. VICQ-D'AZIR.

LA diſſection des Brutes a été long-temps la ſeule qui fût permiſe & pratiquée. Dans des ſiècles plus éclairés on s'eſt livré ſans partage à l'Anatomie humaine, & grâce aux travaux d'un nombre prodigieux de Savans, on a vu cet objet ſous preſque toutes ſes faces; il ne s'agit plus maintenant que d'en connoître les rapports. Pour les apercevoir, il faut rétrograder & revenir par choix à cette anatomie qu'on a cultivée long-temps par néceſſité. Quelques Anciens s'en ſont occupés avec ſuccès, mais c'eſt principalement aux Anatomiſtes modernes qu'elle a les plus grandes obligations; ce ſont eux qui ont fourni les faits les plus importans, qui en ont formé une chaîne & qui en ont fait ſentir les avantages.

Pluſieurs Académiciens célèbres ont développé la ſtructure des quadrupèdes & des oiſeaux; la petiteſſe des inſectes, la ténuité de leurs organes n'ont point arrêté les progrès de leurs découvertes; à l'aide du microſcope ils ont pénétré dans les replis les plus cachés de leur économie, & le corps d'un inſecte n'eſt pas plus étonnant pour un Reaumur, que celui de l'homme ne l'étoit pour Winſlow. L'organiſation des végétaux n'a pas même échappé à leurs recherches, & l'eſprit d'analyſe ſemble avoir dévoilé, juſqu'en ſes plus petits détails, les myſtères de la Nature vivante.

Dans un enchaînement auſſi rapide de connoiſſances nouvelles, les poiſſons ſont les ſeuls dont on n'ait pas ſuivi l'hiſtoire avec le même zèle & le même ſuccès. Les Naturaliſtes ſe ſont contentés de la nomenclature & ont ſeulement étudié les formes; peu de Phyſiciens ſe ſont occupés de leur diſſection, & nos Auteurs ne nous fourniſſent qu'un petit nombre de

descriptions exactes. Stenon & Ruysch ont disséqué la raie, Lorenzinus & Kœmpfer la torpille, Peyer le saumon, Muralt la truite, Borrichius l'aiguille, Needham la carpe & l'alose, Valisnieri l'anguille, Vald-Schmidius la lamproie, & M. Gouan plusieurs épineux. Aurelius Severinus, M.rs Duverney, Petit, Hérissant & Geoffroy ont aussi décrit plusieurs organes appartenans à cette classe d'animaux. Nous pourrions encore citer quelques Anatomistes qui s'en sont occupés; mais tous ces morceaux sont décousus, & on ne trouve nulle part une suite d'observations d'après lesquelles on puisse comparer chaque ordre de poissons avec les autres corps vivans. Encouragé par cette disette, j'ai cru devoir profiter du voisinage de la mer pour vérifier les faits que j'avois lûs; & ce travail m'a nécessairement conduit à un autre qui consiste à rassembler ces faits, & à tâcher d'en apprécier les rapports.

Mais quel ordre suivre dans un semblable projet? doit-on décrire les parties de chaque individu séparément, ou seulement celles que l'on peut regarder comme des caractères anatomiques & qui sont propres aux différentes classes. J'ai cru que cette dernière méthode étoit préférable, & que lorsqu'on avoit disséqué un certain nombre d'animaux de la même famille, l'ouvrage le plus utile étoit de donner une idée claire, précise & générale de leurs viscères & des parties les plus remarquables qui les composent, après les avoir divisés en différens ordres relatifs à leur structure. C'est aussi ce que je me suis proposé de faire; bien persuadé qu'une description minutieuse de chaque poisson n'annonceroit qu'une curiosité vaine, & jamais cet esprit philosophique qui doit être l'ame de toute histoire, & sur-tout de celle de la Nature.

Parmi les divisions reçues, celles d'Aristote & de Wolston que Willughby & Ray suivent en partie, ne peuvent nous convenir: ces Naturalistes rangent mal-à-propos les cétacées dans la classe des poissons, puisque la forme du cœur, celle des paupières & des organes de la respiration mettent entre eux des différences essentielles. M. Brisson a soigneusement évité cette faute, & Linnæus ne veut pas même que l'on y

rapporte les cartilagineux : quoiqu'Artedi & M. Gouan ſoient auſſi de ce ſentiment, nous ne pouvons y déférer, fondés ſur ce que les cartilagineux ont tous les caractères eſſentiels aux poiſſons. Leur cœur n'a qu'un ventricule, toutes leurs ſemelles ont des œufs; ils n'ont point de poumons, & l'organe de l'ouïe n'a point chez eux d'ouverture extérieure. D'après ces aſſertions que nous prouverons dans nos Mémoires, nous diviſerons les poiſſons en cartilagineux, en poiſſons longs ou anguilliformes & en épineux; les cartilagineux ſeront ſubdiviſés en cartilagineux longs & en cartilagineux plats : les poiſſons longs ou anguilliformes ſont auſſi cartilagineux ſuivant la remarque de Rondelet; mais les cartilagineux longs, connus par les Latins ſous le nom de *galei*, ne ſont jamais ſi arrondis, & leur ſtructure intérieure met d'ailleurs entr'eux des différences qui juſtifient aſſez notre diviſion. Enfin les poiſſons épineux ſeront diviſés en épineux arrondis & en épineux plats, nommés *plani* par les Latins : chaque ordre nous occupera ſéparément, & nous tâcherons de faire voir par les détails, que cette diviſion eſt auſſi exacte qu'elle eſt ſimple.

PREMIER ORDRE.

Anatomie des Poiſſons cartilagineux.

Pour procéder avec méthode, nous examinerons 1.° le ſquelette, 2.° les muſcles, 3.° les viſcères que nous diviſerons à raiſon des cavités.

Squelette des Poiſſons cartilagineux.

M. Gouan eſt peut-être le ſeul qui ſe ſoit propoſé de donner une deſcription ſuivie & complette du ſquelette des poiſſons; mais cette deſcription ne convient ni aux anguilliformes, ni aux poiſſons plats, ni aux cartilagineux; le ſquelette de ces derniers a cela de particulier, qu'il ne ſe durcit jamais au point de ne pouvoir être aiſément coupé avec le ſcalpel. Les os plats, ſur-tout ceux de la tête, réſultent de l'aſſemblage de différentes lames revêtues par une membrane très-mince

& dans l'intervalle desquelles une liqueur glaireuse est épanchée. Les os arrondis n'ont point de cavité proprement dite, mais ils ont des cellules & sont pénétrés par le même mucus; si on les fait dessécher, ils perdent beaucoup de leur poids, & acquièrent, en se racornissant, une dureté très-grande. Si on les soumet aux expériences de M.rs Hérissant & Tenon, ils ne fournissent qu'une très-petite quantité de substance soluble; ils sont arrosés par un nombre prodigieux de vaisseaux: la cellulosité qui les entoure est plus lâche que dans les quadrupèdes; leurs articulations n'offrent rien qui ressemble à des glandes synoviales, & les têtes articulaires ne sont point revêtues par ces filets perpendiculaires que M. de Lassone a observés dans l'homme, mais par une lame osseuse repliée & continue avec celles qui composent le reste de l'os: d'où il faut conclure que les os des cartilagineux diffèrent principalement de ceux des quadrupèdes, parce qu'ils sont pénétrés par une mucosité qui leur est particulière, qui n'est autre chose que ce que M. Hérissant appeloit son *gluten* ou sa troisième substance, & qui supplée au défaut de moëlle osseuse & de synovie proprement dite; d'un autre côté la cellulosité extérieure étant moins adhérente, comprime moins l'organe *(a)* qui sépare le suc osseux, & qui dans les poissons étant plus lâche, laisse échapper des sucs plus délayés.

Le squelette des cartilagineux est composé de la tête, de l'épine, des côtes ou rayons, du sternum & des os innominés. On peut ajouter les cercles des ouïes & l'os hyoïde.

1.° La tête peut être divisée en crâne & en mâchoire. Le crâne est oblong & finit en devant par une pointe plus ou moins mousse, dans laquelle le cartilage devient de plus en plus mou & spongieux; le dessus est plane & n'est point surmonté par une crête comme dans les épineux, le dessous est égale-

(a) Dans les jeunes animaux le suc osseux se sépare dans toute l'étendue de l'os; mais il est très-délayé. L'ossification commence par les couches internes, elle passe ensuite aux moyennes, & si dans un âge très-avancé il se forme encore des lames osseuses sous le périoste, c'est qu'il reste une portion de l'os, dans laquelle le travail de l'ossification n'est point achevé. Il en est de même, à proportion, dans les arbres.

ment aplati & forme la voûte du palais; latéralement se trouvent les orbites, & quoique dans plusieurs ils paroissent occuper la partie supérieure, ils n'en sont pas moins placés sur les côtés de la masse cartilagineuse; l'intérieur du crâne, *(voy. fig. 2, pl. 1)* est divisé en deux fosses, dont l'une *a*, que l'on peut appeler pituitaire, est antérieure, plus excavée, & située derrière les deux lames criblées; l'autre *b* est postérieure, vraiment cérébrale, plus élevée & plus étroite; les trous qui s'ouvrent dans ces cavités sont au nombre de sept; l'un mène au conduit spinal *d*, & son principe est remarquable par deux petites excavations *cc* qui logent le cervelet. Deux paires de trous *ee* donnent passage aux nerfs de la langue, du pharynx, de l'estomac & de l'ouïe; les trous optiques *f* viennent après, ils sont obliques, divergens & placés l'un auprès de l'autre. Toujours en avançant vers la partie antérieure, on aperçoit deux lames minces, légèrement excavées & percées par un grand nombre de trous qui s'ouvrent dans les narines *gg*; mais il est essentiel d'observer que toutes ces parties sont continues & ne forment qu'une seule pièce; ce qui est bien différent dans les épineux dont la fibre osseuse est roide & cassante, & chez lesquels le crâne est formé par l'assemblage d'un grand nombre de pièces, qui ont chacune un centre d'ossification, & qui se rencontrent par des sutures multipliées: ces réflexions fournissent une nouvelle preuve de la théorie exposée par M. Hunauld dans les Mémoires de l'Académie, & font concevoir pourquoi les crânes qui conservent plus long-temps leur mollesse ont aussi moins de sutures.

La mâchoire inférieure ressemble à celle d'un enfant. *(Voyez fig. 4, pl. 1)*; ses branches montantes sont courtes & terminées par un petit condyle *a*: un cartilage placé dans le *geni* la sépare en deux pièces; l'intérieur est creusé pour le passage des vaisseaux & des nerfs, & le grand angle se recourbe pour l'insertion d'un muscle.

La mâchoire supérieure est contiguë à la face inférieure du crâne. Dans quelques espèces elle est mobile & s'abaisse par le jeu de quatre pièces à ressorts qui suivent le mouvement des muscles; cette conformation a lieu dans le poisson

que l'on appelle vulgairement du nom de moine, ange ou *ſquatina*, & dans tous les cartilagineux qui ont l'ouverture des mâchoires placée à la pointe de la tête; elle ne jouit au contraire que d'un très-petit mouvement dans ceux qui l'ont placée en-deſſous, comme dans les raies & les *galei.*

Les mâchoires ſont armées dans les uns de dents triangulaires & taillées en ſcie d'un côté, comme dans le *Galeus-canis* ou Chien de mer; dans les autres elles ſont figurées en pyramide très-acérée, comme dans l'eſpèce de *Canicula* que les Normands appellent du nom de *Rouſſette,* ou bien en forme de pièces de parquet raboteuſes, & irrégulièrement polygones comme dans le Reton. *(Voyez fig. 5, pl. 1).*

2.° L'épine eſt formée par une ſérie de vertèbres qui vont en décroiſſant, du crâne juſqu'à l'extrémité de la queue; leur forme eſt bien décrite par pluſieurs Auteurs, & c'eſt principalement de cette partie qu'ils ſe ſont occupés. Ariſtote dit que l'épine cartilagineuſe caractériſe cet ordre de poiſſons; l'épine n'eſt pourtant pas plus cartilagineuſe que les autres os de l'individu. Nous nous contenterons d'ajouter que le nombre des vertèbres n'eſt pas conſtant, & je puis aſſurer, après l'avoir compté dans pluſieurs cartilagineux de la même eſpèce, que je ne l'ai pas trouvé le même dans tous: ce qui ne s'accorde point avec les obſervations de M. Linnæus, qui a trouvé le même nombre de vertèbres dans pluſieurs amphibies. On ne doit point au reſte regarder ces variations comme fort ſurprenantes, puiſque M. Daubenton n'a pas toujours rencontré le même nombre de vertèbres lombaires dans les chevaux.

3.° Il n'y a point de côtes, proprement dites, dans ces poiſſons; l'enceinte du ventre & de la poitrine eſt formée par des os qui ont une figure particulière, par des muſcles & des aponévroſes; ſeulement on trouve dans les cartilagineux plats, des rayons oſſeux parallèles liés enſemble par un tiſſu ligamenteux aſſez lâche, qui forment les ailes du poiſſon, & fourniſſent inſertion aux muſcles qui tiennent lieu de nageoires: ces os ployans ſont accompagnés par des nerfs & des vaiſſeaux ſanguins qui jouent à leur ſurface, &

ils s'articulent avec ceux qui tiennent lieu de ſternum & de baſſin.

4.° Le ſternum n'eſt pas éloigné de la mâchoire inférieure, *(Voyez fig. 3, pl. 1)*; il eſt formé par un os tranſverſal, étroit, plus long dans les cartilagineux plats, & qui, ſur les côtés, ſe diviſe en deux branches, dont les unes ſont antérieures *aa*, & les autres poſtérieures *bb*. Les deux branches antérieures ſont briſées dès leur naiſſance par une articulation *cc;* elles s'étendent & s'amincissent des deux côtés de la mâchoire ſupérieure, elles forment l'enceinte du thorax, & ſoutiennent les trous des ouïes dans les raies de toute eſpèce. Les branches poſtérieures ſe recourbent des deux côtés du bas-ventre; & dans l'endroit où elles ſe continuent avec les antérieures, on obſerve une lame qui déborde & fournit pluſieurs concamérations, dont les unes répondent au ventre & les autres à la poitrine *dddd*.

5.° Les os du baſſin ſont figurés en fer-à-cheval & placés au-deſſous de l'anus, ce qui eſt particulier aux cartilagineux; leur partie moyenne porte une excavation en devant & deux en arrière plus petites & ſéparées par une crête; les deux extrémités ſont recourbées en bas, & portent deux petites franges ou nageoires: ces os ſoutiennent l'anus & la vulve des femelles, comme le ſternum protège le cœur & partage la poitrine du bas-ventre: j'ai donc dû conſerver avec confiance les noms de ces os, qui ne peuvent convenir à ceux que M. Gouan nomme ainſi dans les épineux, puiſqu'ils n'ont aucun de ces uſages, & qu'étant ſimplement deſtinés à ſoutenir les nageoires ventrales & pectorales, ils porteroient à plus juſte titre le nom d'*oſſa pinnarum* ſous lequel les Anciens les connoiſſoient.

6.° Les cercles des ouïes & leurs ouvertures ſont diſpoſés & jouent d'une façon particulière aux cartilagineux; nous n'avons rien à ajouter à ce que des Anatomiſtes célèbres en ont dit; les franges & les muſcles ſont comme dans les épineux, & Duverney a décrit l'un & l'autre avec la plus grande exactitude: il ſuffira d'obſerver que ces organes ont, comme

comme dans les autres poiſſons, le double uſage de ſervir à la déglutition, en laiſſant échapper le liquide ſuperflu ou en l'arrêtant à volonté, & d'expoſer le ſang au contact du fluide dans lequel l'animal ſe meut.

7.° L'os hyoïde eſt formé par deux pièces qui vont ſe rencontrer à angle aigu vers la baſe de la langue, & qui ſont articulées poſtérieurement avec deux autres qui tiennent à la baſe du crâne auprès du premier cercle des ouïes. *(voy. fig. 1, pl. 1).*

Muſcles des Poiſſons cartilagineux.

Les muſcles des cartilagineux n'ont pas été mieux décrits que leur ſquelette, ſi l'on en excepte les muſcles en forme de faulx, particuliers aux torpilles, qui ſont placés & ſe correſpondent ſur le dos & ſur la poitrine, & dans leſquels Stephanus Lorenzinus d'après Rhedi, fait conſiſter leur force engourdiſſante ou électrique. Nous les diviſerons en ceux qui ſont deſtinés au mouvement total du poiſſon, & ceux qui ne meuvent que quelques-unes de ſes parties. Parmi ces derniers, les uns ſont placés en deſſus, les autres en deſſous.

Ceux qui ſont placés en deſſous ſont *(voy. fig. 6)* 1.° une paire de muſcles qui vont du ſternum à la mâchoire inférieure *a a;* 2.° une autre paire qui va à la langue, qui eſt placée au-deſſous de la première & en eſt ſéparée par une aponévroſe aſſez forte; 3.° deux muſcles grêles & longs qui partent des environs du ſternum, & ſe terminent par un tendon mince & très-étroit des deux côtés de la pointe ou bec aigu qui termine le poiſſon en devant *b b;* 4.° deux bandes muſculeuſes de chaque côté, qui recouvrent le thorax, dont les aponévroſes ſe croiſent, & qui ſont placées entre les branches antérieures du ſternum & les muſcles moyens qui vont à la langue & à la mâchoire: c'eſt-là que ſont les *muſculi falcati inferiores* de la torpille; 5.° deux muſcles arrondis, ſaillans & placés ſur l'angle, le condyle & l'articulation des deux mâchoires qu'ils rapprochent; 6.° deux muſcles ſitués preſque tranſverſalement, & qui vont de la baſe de la mâchoire à celle de la langue; 7.° deux autres muſcles profonds qui dans quelques-uns ſont deſtinés à l'élé-

vation de la mâchoire supérieure & placés au-dessus de l'œsophage entre les cercles des ouïes; 8.° des muscles abdominaux assez minces qui peuvent être facilement séparés en deux plans, entrecoupés par des aponévroses qui s'insèrent aux branches postérieures du sternum & à l'os innominé, & dans quelques sujets vont jusqu'aux ouïes; 9.° un muscle placé dans l'angle de chaque cercle brisé qui forme les ouïes, & qui a pour fonction de le rendre plus aigu en les ployant *(voyez fig. 8, pl. 1).*

Les muscles qui se trouvent en dessus *(voyez fig. 9, pl. 1),* sont 1.° deux muscles grêles placés des deux côtés du crâne, & qui aboutissent par un tendon longuet vers le devant du poisson, en formant un V consonne *a a;* 2.° deux plans charnus de chaque côté que l'œil sépare, l'un est interne, globuleux & remarquable par une aponévrose qui le recouvre *b b,* l'autre est externe, aplati, moins élevé, & n'est recouvert que par la peau *c c.*

Les muscles qui sont destinés au mouvement total du poisson sont placés auprès de l'épine ou dans le reste de la circonférence; les premiers sont figurés en chevrons brisés, *fig. 7, pl. 1;* les autres sont différens dans les cartilagineux plats & dans les ronds: dans les premiers ils sont disposés en rayons, suivant la longueur des os droits qui tiennent lieu de côtes; dans les cartilagineux ronds au contraire ils sont plus ou moins obliques & brisés en différens endroits: ces derniers ont des nageoires, & leurs muscles sont figurés comme ceux des épineux que M. Gouan a très-bien décrits.

Maintenant ne sommes-nous pas en droit d'observer que les cartilagineux sont, à cet égard, les mieux organisés de tous les poissons, puisqu'outre les muscles des nageoires & les muscles latéraux, les différentes parties qui les composent sont mûes par un grand nombre de puissances musculaires que l'on ne trouve point dans les autres? c'est sur-tout la partie antérieure qui en est le mieux pourvue, & les quatre muscles longuets, dont deux sont placés en dessus & deux en dessous, ne contribuent pas peu à la rapidité des mouvemens que fait le bec de ces poissons.

Viſcères des Poiſſons cartilagineux.

Les viſcères des poiſſons cartilagineux ſont les ſeules parties de ces animaux ſur leſquelles on trouve quelques éclairciſſemens dans les Auteurs; encore ont-ils mal décrit le cerveau *(b)*, le cœur & ſur-tout l'oreillette, & ils ont oublié quelques obſervations intéreſſantes ſur les parties ſexuelles. Pour ranger avec ordre celles que nous avons faites ſur la ſplanchnologie des cartilagineux, nous les diviſerons à raiſon des cavités qui renferment les principaux viſcères; & ces cavités ſont la tête, la poitrine & le bas-ventre.

1.° Le crâne renferme le cerveau recouvert de ſes membranes; l'aracnoïde eſt très-ſenſible à l'origine des nerfs, & la maſſe cérébrale peut être diviſée en trois portions, dont l'une eſt antérieure, l'autre moyenne, la troiſième poſtérieure; la portion antérieure *a (fig. 10, pl. 1)*, eſt irrégulièrement triangulaire, aplatie par en bas, légèrement bombée en deſſus & jointe par un étranglement *b* avec la partie moyenne; elle ſemble appartenir toute entière aux nerfs olfactifs *c c* qui en partent & en ſont comme les appendices; la portion moyenne *d* forme une boſſe mamelonnée ſupérieurement & plane en deſſous; elle n'a preſque point de ſubſtance corticale, & les nerfs optiques qui naiſſent de ſa face inférieure ſont rapprochés comme dans les oiſeaux; ſi on y fait une ſection longitudinale, on y aperçoit un ventricule, avec une valvule & une eſpèce d'*infundibulum;* les lobes poſtérieurs ſont plus ſenſibles dans les cartilagineux plats, & répondent au cervelet; la portion antérieure eſt logée dans la foſſe pituitaire, la moyenne dans la foſſe cérébrale proprement dite, & les lobes poſtérieurs dans les excavations qui ſont à l'origine du conduit ſpinal.

Les nerfs olfactifs ſont les plus gros de tous; une grande portion du cerveau eſt employée à les former, & à cet égard ils diffèrent beaucoup des nerfs olfactifs des épineux; c'eſt ce que Willis n'a pas remarqué : la pulpe des nerfs eſt recouverte

(b) Il faut en excepter le célèbre M. Camper, dont le travail m'étoit inconnu quand j'écrivois ce Mémoire.

par une membrane très-mince, & ſe plonge par les trous de la lame criblée, dans l'intérieur des narines qui ſont diviſées en pluſieurs cellules dont Collins a mal-à-propos négligé l'hiſtoire *(voyez fig. 2, pl. 1)*. C'eſt-là que ſe fait l'expanſion de la pulpe nerveuſe dont un *mucus* entretient la molleſſe, & l'on n'obſerve nulle part avec plus de ſatisfaction & de facilité la diſtribution de la première paire.

L'organe de l'ouïe n'eſt pas tout-à-fait auſſi facile à développer que celui de l'odorat; après des recherches très-longues & aſſez laborieuſes, voici ce que j'ai conſtamment obſervé: des deux côtés du crâne derrière les orbites, ſont deux cavités aſſez amples, ſymétriques & ſéparées par des cloiſons qui ſont toutes doublées par des membranes d'une conſiſtance aſſez molle, & dans leſquelles on trouve, 1.° trois conduits tranſparens & cartilagineux qui décrivent des cercles aſſez réguliers & qui ſont tapiſſés intérieurement par une membrane muqueuſe, & qui aboutiſſent à une eſpèce de tête aſſez ſemblable à celle du petit os nommé *enclume* dans l'oreille des quadrupèdes; 2.° une maſſe blanchâtre aſſez mollaſſe, qui ne manque jamais, & que Ray & Stenon ont décrite; 3.° une gelatine abondante comme dans le reſte du crâne, & diſtribuée dans des cellules diaphanes; 4.° des nerfs qui ſe diviſent, qui ſerpentent & qui ſemblent ſe réduire en pulpe dans le voiſinage de la maſſe blanchâtre; mais j'avouerai que j'ai inutilement cherché une ouverture extérieure. Parmi les anguilliformes, quelques-uns, le congre, par exemple, offrent une conformation à-peu-près ſemblable; mais les conduits tranſparens ſont logés des deux côtés des foſſes cérébrales au-deſſus du petit oſſelet qui ſe trouve dans le crâne de ces poiſſons, & qu'on ne rencontre point dans les cartilagineux: la petite maſſe blanchâtre de ces derniers ſemble y ſuppléer; le reſte eſt aſſez égal.

Je n'ignore point que M. Geoffroy a décrit l'organe de l'ouïe de la raie, mais il n'a point parlé de la petite tête à laquelle aboutiſſent les conduits qu'il appelle du nom de *demi-circulaires*, & qui ont auſſi quelque reſſemblance avec les vaiſſeaux aqueux de Cotuni: j'ai de plus retrouvé la même

conformation dans les *galeï* que M. Geoffroy n'a point disséqués, & des deux côtés de la moëlle alongée des anguilliformes; enfin j'ai jeté quelques doutes sur l'existence du trou auditif externe; mon travail ajoute donc à celui de ce savant Naturaliste, & le confirme en plusieurs points *(c)*.

Les autres nerfs sont au nombre de deux troncs principaux de chaque côté, qui se distribuent à la langue, au pharynx & donnent des filets qui vont jusqu'au cœur dans l'épaisseur des membranes: on trouve encore plusieurs ramifications qui se plongent aussi dans l'orbite & qui vont à l'œil, mais je n'ai trouvé dans les nerfs de ces poissons rien qui eût l'apparence ganglio-forme; ce qui me fait croire que ces petits organes sont particuliers aux animaux plus parfaits. La poitrine s'étend depuis le sternum jusqu'à la mâchoire inférieure, & depuis une branche droite du sternum jusqu'à la gauche; sa figure imite celle d'un triangle dont la pointe seroit en devant; une membrane épaisse que l'on peut prendre pour la plèvre ou pour le péricarde, la tapisse intérieurement & adhère aux muscles pectoraux: le diaphragme forme la paroi inférieure; il est membraneux & composé de plusieurs feuillets qu'un tissu cellulaire plus ou moins lâche sépare l'un de l'autre; il s'attache au sternum & à l'épine, & quelque soin que j'y aie apporté, je n'ai jamais pu apercevoir les fibres musculaires que plusieurs Naturalistes ont décrites dans le diaphragme des épineux.

(c) Tel étoit l'énoncé de mon travail lorsque je l'ai communiqué à l'Académie; alors l'excellent Mémoire de M. Camper n'étoit point sorti des mains de M. le Secrétaire. Depuis qu'il m'a été permis d'en prendre lecture, j'ai vu que cet illustre Anatomiste avoit fait en Hollande à-peu-près les mêmes observations que j'ai depuis faites en Normandie. Je conviens de bonne foi que son travail est plus exact & mieux suivi que le mien: j'observerai seulement qu'il n'a point décrit le petit renflement auquel aboutissent les conduits demi-circulaires; que les conduits membraneux qu'il admet me semblent plutôt être une membrane qui tapisse les premiers, que des conduits jouissans d'une existence particulière; que les divisions cellulaires de la cavité qui renferme l'organe de l'ouïe n'y sont pas convenablement exprimées; que sa bourse élastique n'est autre chose que la membrane qui tapisse la cloison & qui couvre la gélatine; & qu'enfin cet Anatomiste, ainsi que M. Geoffroy, n'a point décrit la structure des cartilagineux alongés dont je donne l'histoire assez au long. Tels sont les rapports & les différences de mon travail & de celui de M. Camper, qui mérite sans doute, à tous égards, les éloges que des Commissaires savans & judicieux lui ont justement prodigués.

Lorſque l'on ouvre la poitrine avec précaution on aperçoit un organe muſculeux placé ſur le milieu d'une veſſie rouge & tranſparente; c'eſt le cœur & l'oreillette.

Le cœur des cartilagineux *(voy. pl. 11, fig. 1, 2, 3, b, c, d)* eſt irrégulièrement triangulaire; on y diſtingue deux faces & trois bords; des deux faces l'une eſt inférieure & plane, l'autre eſt ſupérieure & diviſée en deux par une ligne légèrement ſaillante & longitudinale; des deux bords l'inférieur eſt le ſeul qui ſoit remarquable, parce qu'il eſt irrégulièrement arrondi & comme feſtonné: la forme du cœur varie au reſte dans les différentes eſpèces; par exemple, il approche plus de la forme triangulaire dans ceux qui n'ont point l'ouverture des mâchoires placée en deſſous.

L'oreillette *(pl. 11, figures 1 & 4, a)* eſt ordinairement gonflée par un ſang très-fluide & très-rouge; au premier coup d'œil elle reſſemble au poumon des grenouilles ou à une véſicule gonflée par une bulle d'air; ſa figure approche de celle d'un cœur dont la pointe ſeroit en devant & les deux prolongemens en arrière; elle eſt celluleuſe & devroit plutôt porter le nom de *ſinus* que celui d'oreillette: dans ſon milieu *c, fig. 4, pl. 11,* ſe trouve l'ouverture qui communique avec la face ſupérieure du cœur. Si nous paſſons à l'examen de l'intérieur de cet organe, nous y trouvons une ſeule cavité triangulaire avec des prolongemens, & qui paroît ſéparée en deux par un faiſceau principal de fibres charnues, ſemblable à ceux que l'on connoît ſous le nom de *faſciculi* dans l'homme & dans les quadrupèdes.

De la pointe du cœur part une artère qui dans ſa naiſſance eſt fortifiée par un muſcle blanc & continu avec les fibres de cet organe, c'eſt là que ſe trouve un muſcle en forme de larme de Job dans les épineux; l'artère ſe ramifie enſuite dans les ouïes, & donne les branches que M.rs Duverney & Gouan ont décrites avec beaucoup de ſoin; c'eſt-là que le ſang ſe diſtribue en plus grande quantité, comme il fait dans le poumon des animaux à deux ventricules; c'eſt-là qu'il reçoit le contact de l'élément que le poiſſon habite, & je croirois volontiers que ce contact eſt néceſſaire, parce qu'on

le retrouve par-tout; mais j'ai peine à croire que l'air contenu dans l'eau s'en ſépare pour s'inſinuer dans les vaiſſeaux ſanguins du poiſſon: ce qui fortifie mes doutes à cet égard, c'eſt que l'organe frangé qui porte le nom d'ouïe & de *branchiæ* chez les Latins, ne me ſemble point propre à cette décompoſition, & j'aimerois autant dire que l'air entre dans le poumon des quadrupèdes, afin que ce dernier en ſépare l'eau qui peut y être contenue.

Quelques Naturaliſtes diſent avoir trouvé un poumon dans les cartilagineux, M. Garden, cité par M. Linnæus, eſt dans cette opinion; pour moi j'oſe aſſurer que les cartilagineux des côtes de la baſſe Normandie n'ont ni au dehors ni au dedans du thorax, rien qui reſſemble à un poumon ou qui puiſſe en avoir l'uſage: & s'il étoit permis, j'ajouterois une conjecture; c'eſt que ceux qui penſent différemment ont été trompés par l'apparence bulleuſe de l'oreillette.

3.° L'abdomen des cartilagineux, comme celui des autres poiſſons, renferme trois eſpèces de viſcères; 1.° ceux qui ſervent à la digeſtion, 2.° ceux qui ſont deſtinés à la propagation de l'eſpèce, 3.° ceux qui ſéparent un fluide analogue à l'urine, & qui ſont placés derrière le péritoine comme dans les quadrupèdes.

1.° Les viſcères qui ſervent à la digeſtion ſont le foie & les inteſtins, l'eſtomac, la rate & le pancreas; le foie occupe la partie ſupérieure & latérale de l'abdomen, il a trois lobes dans les cartilagineux plats *(voyez pl. II, figure 2)*; dans les ronds il eſt formé par deux lanières qui s'étendent à droite & à gauche, de ſorte cependant que la gauche eſt plus conſidérable: ce viſcère eſt très-mollaſſe dans les poiſſons, & les vaiſſeaux qui s'y diſtribuent charient un ſang mêlé d'une huile abondante, ce qui s'accorde à merveille avec le ſyſtème expoſé par M. Lieutaud; la véſicule du fiel eſt enveloppée dans le foie, & ſon conduit ſe rencontre avec l'hépatique avant de s'ouvrir dans l'inteſtin auprès du pylore.

La rate eſt ſituée à gauche, au-deſſous & le long de l'eſtomac; dans quelques-uns on en trouve deux, & la plus petite adhère à l'extrémité inférieure du ventricule.

Le pancreas est blanc, triangulaire, assez semblable à celui des oiseaux, & collé sur le bord de l'intestin; il s'amincit vers le pylore, & dans quelques-uns il se renfle tellement qu'il paroît double au premier coup-d'œil, *b, pl. II, fig. 11.*

L'estomac est très-large, très-dilatable & presque toujours rempli de crustacées; ceux de ces petits animaux qui occupent la partie la plus voisine de l'œsophage, sont à peine ramollis, tandis que ceux qui ont descendu jusqu'au fond de l'estomac sont réduits en pulpe *(d)*; son intérieur est plissé longitudinalement; il fait dans presque tous les individus un petit cul-de-sac, *k, l, m, pl. II, fig. 5, 11, 12,* puis il se rétrécit pour former le pylore; c'est-là que l'intestin commence, il s'élargit ensuite & devient plus étroit à l'anus, vers lequel il se porte presque directement, de sorte que l'intestin & l'estomac font ensemble une S romaine: il en est donc des poissons comme des quadrupèdes & des oiseaux; ceux qui sont les plus voraces ont l'œsophage plus large & le boyau plus court, *pl. II, fig. 5 & 11, r, s, t;* dans quelques espèces, comme dans le moine ou *squatina*, l'estomac ne ressemble pas mal à celui d'un enfant; dans quelques autres, comme dans le *galeus canis*, la coupe de l'intestin m'a semblé présenter une membrane connivente, flottante & roulée en spire *(e)*, qui augmente en même temps la surface du boyau & le nombre des bouches absorbantes, *pl. II, fig. 7.*

2.° Les organes de la génération sont cachés par ceux de la digestion; & comme ils ont été très-bien décrits par Rondelet, Ruysch & Stenon, nous nous contenterons d'ajouter qu'au-dessus de cette espèce d'intestin double qui naît de la poche ou cloaque, & qui tient lieu des cornes de l'utérus & au niveau du paquet d'œufs jaunes, assez semblables à ceux des

(d) Cette observation suffiroit pour prouver l'existence d'une humeur propre à pénétrer & à dissoudre les alimens; mais elle n'est pas la seule de ce genre. Les autres classes d'animaux fournissent un grand nombre de faits qui viennent à son appui.

(e) Une structure à peu-près semblable a été observée dans la seche; on en trouve la description dans l'*Amphitheatrum* de Valentini. M. Tenon a fait aussi la même observation.

des oiſeaux, on trouve un organe arrondi, *planche II, fig. 6,* blanchâtre, tiſſu en forme de rayons, diviſé intérieurement en deux ſegmens *c c,* & qui reſſemble beaucoup à un teſticule. Cette ſtructure ſeroit aſſez d'accord avec le ſyſtème de M. de Buffon, qui admet dans les femelles des teſticules ou des parties qui en font les fonctions. J'ajouterai encore que le ſac épais, plat, quadrangulaire & corné, nommé *teſta,* par Ruyſch, n'eſt pas rompu par le fœtus, comme l'aſſure Rondelet, mais qu'il s'ouvre par une extrémité de dedans en dehors, à peu-près comme M. de Reaumur l'a obſervé dans les coques des chenilles. Un gluten en colle les parois, & par l'autre extrémité on ne pourroit l'ouvrir ſans en rompre la continuité.

3.° Les reins ſont ſitués derrière le péritoine; ils forment deux boſſes que l'épine partage; inférieurement ils s'approchent l'un de l'autre vers l'anus, & s'ouvrent par un conduit dans cet inteſtin, auprès d'un petit appendice creux qui reſſemble à une verge; ils ſont plus larges, plus ſaillans & ne s'élèvent pas auſſi haut que dans les épineux.

C'eſt au-deſſous de ces viſcères que ſe trouve le paquet d'œufs dans les femelles & dans les mâles, un organe blanc, creux & dont le conduit s'ouvre dans l'anus avec une caroncule comme dans le reton & le *galeus-canis.* Voy. *fig. 10, pl. II.*

La totalité du poumon eſt recouverte par une peau très-rude, chagrinée & à boucles dans quelques-uns; elle eſt criblée de pores par leſquels ſuinte une humeur glaireuſe & abondante, qui ſort ſous l'apparence d'un vermiſſeau quand on la comprime: lorſqu'on enlève la peau avec précaution, on aperçoit un lacis de vaiſſeaux blancs, mucilagineux, noueux dans quelques endroits, & qui vont d'une boucle ou d'un pore à l'autre; ils ſont moins abondans vers la circonférence, & c'eſt à la partie antérieure du poiſſon qu'ils ont le plus de volume. Nous avons déjà fait obſerver qu'une pareille humeur ſe trouve dans les cellules des os plats, & même dans le tiſſu des os longs. *Stephanus Lorenzinus,* en décrivant la Torpille, fait auſſi mention d'une pareille humeur & de pores ſemblables.

D'après ces obſervations, nous ſommes en état de ſavoir quel rang doivent tenir les cartilagineux dans la claſſe des animaux, & quels ſont leurs rapports principaux & leurs principales différences. Si on les compare aux quadrupèdes, on voit qu'ils en diffèrent ſur-tout par l'abſence du poumon & par la forme du cœur ; mais en revanche leur eſtomac, l'organe de l'odorat, les lames criblées, quelques phénomènes de la génération, la ſituation & l'uſage du *ſternum*, & la forme de pluſieurs muſcles, ſemblent les en rapprocher. Comme les reptiles ils ont un cœur & un ſeul ventricule; mais l'oreillette eſt différente, & ils ne reſpirent point. Ils reſſemblent aux oiſeaux par leurs œufs, leurs teſticules, leurs uterus & le cloaque de l'anus ; mais ces derniers ont un cœur biloculaire & un poumon : les cétacées en diffèrent par la même raiſon ; mais les cartilagineux habitent le même élément, & la plupart ont deux trous des ouïes placés en deſſus, où ils ſemblent tenir lieu des conduits qui méritent aux premiers le nom de *ſouffleurs*. Leur analogie avec les autres poiſſons eſt plus grande ; mais les différences n'en ſont pas moins marquées. Dans les anguilliformes les os ſont également cartilagineux, mais le cœur eſt chez eux irrégulièrement ſémilunaire, le cerveau eſt plus alongé & l'eſtomac ne forme point un cul-de-ſac, mais un boyau aveugle & fort long. Enfin, les épineux en diffèrent par la dureté de leurs os, par la forme de l'oreillette, par les appendices nombreuſes du pylore & par les opercules des ouïes. Les cartilagineux ſont donc les mieux organiſés de tous les poiſſons, & c'eſt par eux qu'il a fallu commencer. Ceux que j'ai diſſéqués & qui ſervent de baſe aux obſervations que j'ai l'honneur de préſenter à l'Académie, ſont parmi les cartilagineux plats le poiſſon nommé *paſtinaca*, le *ſquatina*[a], & les eſpèces de raies que Rondelet nomme *raia levis*[b], *raia cinerea*, *raia occulata & aſpera*, *raia clavata*, *raia aſperrima*[c]; & parmi les cartilagineux longs, le *galeus lævis*, le *galeus aſteria*, le *galeus canis*[d], & deux autres poiſſons cartilagineux dont un eſt *le canicula ariſtotelis*[e], & l'autre une eſpèce de *malta*[f] de Rondelet.

[a] Moine *ou* ange.
[b] Reton.
[c] Tirot.
[d] Haut chien.
[e] Rouſſette.
[f] Reſſemble beaucoup au *[illegible]*,

Je n'ai décrit que les parties qui avoient été oubliées, ou celles qui m'ont semblé mal vues ; & j'ai cru avant de finir devoir donner ces détails, afin que ceux qui seront à portée puissent vérifier les faits que j'avance, & à l'aide de ces observations en faire de nouvelles, qui puissent nous conduire enfin à l'histoire complette de cette classe d'animaux.

EXPLICATION DES FIGURES.

PLANCHE I.

Figure 1. Os hyoïde. *aa*, les deux extrémités antérieures de l'os hyoïde. *bb*, les deux extrémités postérieures qui s'articulent avec le crâne.

Fig. 2. Coupe horizontale du crâne. *gg*, places qu'occupent les deux lames criblées. *a*, la cavité antérieure ou pituitaire. *b*, la cavité cérébrale, proprement dite. *cc*, petites arrière-cavités qui logent le cervelet. *f*, place qu'occupe le nerf optique. *ee*, place qu'occupent les deux autres nerfs dans leur sortie. *g*, conduit spinal.

Fig. 3. Le sternum. *hh*, branche moyenne. *bb*, branches latérales postérieures. *aa*, branches latérales antérieures. *cc*, articulation des branches antérieures avec la moyenne. *dddd*, cavités formées par une lame qui déborde.

Fig. 4. *aa*, branche montante de la mâchoire inférieure. *b*, cartilage qui sépare les deux pièces.

Fig. 5. Espèce de parquet que forment ensemble les dents du *raya lævis*.

Fig. 6. Cette figure représente le dessous d'un poisson cartilagineux ; elle est seulement destinée à donner une idée de la position & non de la figure des muscles. *ee*, *ff*, *g*, sont l'enceinte de la partie antérieure du poisson. *h*, désigne la place de la bouche. *aa*, désigne celle des muscles qui vont du sternum à la mâchoire inférieure, ou à la langue. *bib*, place du sternum. *bg*, *bg*, muscles longs & minces qui vont au bec en se rapprochant. *cc*, place des muscles pectoraux.

Fig. 7. *cd*, *cd*, angles que font ensemble les fibres des muscles latéraux.

Fig. 8. *abc*, ligne qui désigne la situation des muscles des ouïes dans leurs angles.

Fig. 9. Cette figure à peu-près semblable à la sixième représente

le dessus du poisson. *ad, ad,* muscles qui sont ongs & étroits, & qui répondentà ceux qui sont placésinférieurement. *bc, bc,* désignent la place des deux plans musculaires latéraux que l'oeil divise.

Fig. 10. Cerveau. *cc,* première paire. *a,* portion antérieure. *d,* portion postérieure. *b,* étranglement par le moyen duquel l'une communique avec l'autre. *ee,* nerfs optiques. *ff,* petits lobes du cervelet.

Fig. 11. Cellules qui divisent les narines intérieurement.

PLANCHE II.

Fig. 1. *a,* coeur & oreillette du *raia lævis.* *b,* cœur. *a,* l'oreillette. *c,* muscle blanc dont l'artère est fortifiée dans son origine. *d,* bord inférieur & festonné.

Fig. 2. Cœur du *raia asperrima.* *d,* muscle blanc.

Fig 3. Cœur du *squatina.*

Fig. 4. Oreillette cordiforme dessinée seule & non excessivement gonflée. *a, b,* trou de communication avec le cœur. *c,* sinus plat & alongé derrière le diaphragme.

Fig. 5. Estomac & boyau du *raia clavata.* *k,* cul-de-sac de l'estomac. *l,* pilore. *r, s, t,* boyaux. *v,* petit appendice creux en forme de verge. *xx,* reins.

Fig. 6. *aa,* deux organes qui se trouvent chez les femelles, & qui ressemblent beaucoup à un testicule. *c, c,* division de ces organes en deux segmens. *x, x,* les reins.

Fig. 7. Coupe de l'intestin du *galeus canis.*

Fig. 8. Celle-ci désigne le nombre des couches qui composent les muscles latéraux dans les *galei.*

Fig. 9. Partie sexuelle nommée *testa* par Ruysch & par Rondelet, dont l'extrémité s'ouvre par l'écartement des parois qu'un gluten réunit.

Fig. 10. Conduit déférent du *galeus canis.*

Fig. 11. Foie, estomac & boyau du *squatina.* *a,* foie à trois lobes. *m,* cul-de-sac de l'estomac. *b,* pancréas.

Fig. 12. Estomac du *canicula aristotelis.*

Nota. Il est facile de s'apercevoir, en parcourant ces planches, combien la partie du dessin y est défectueuse; aussi l'Auteur s'en sert moins pour rendre la Nature que pour donner une idée plus positive de la situation & des rapports des parties dont elles désignent la place ou la figure.

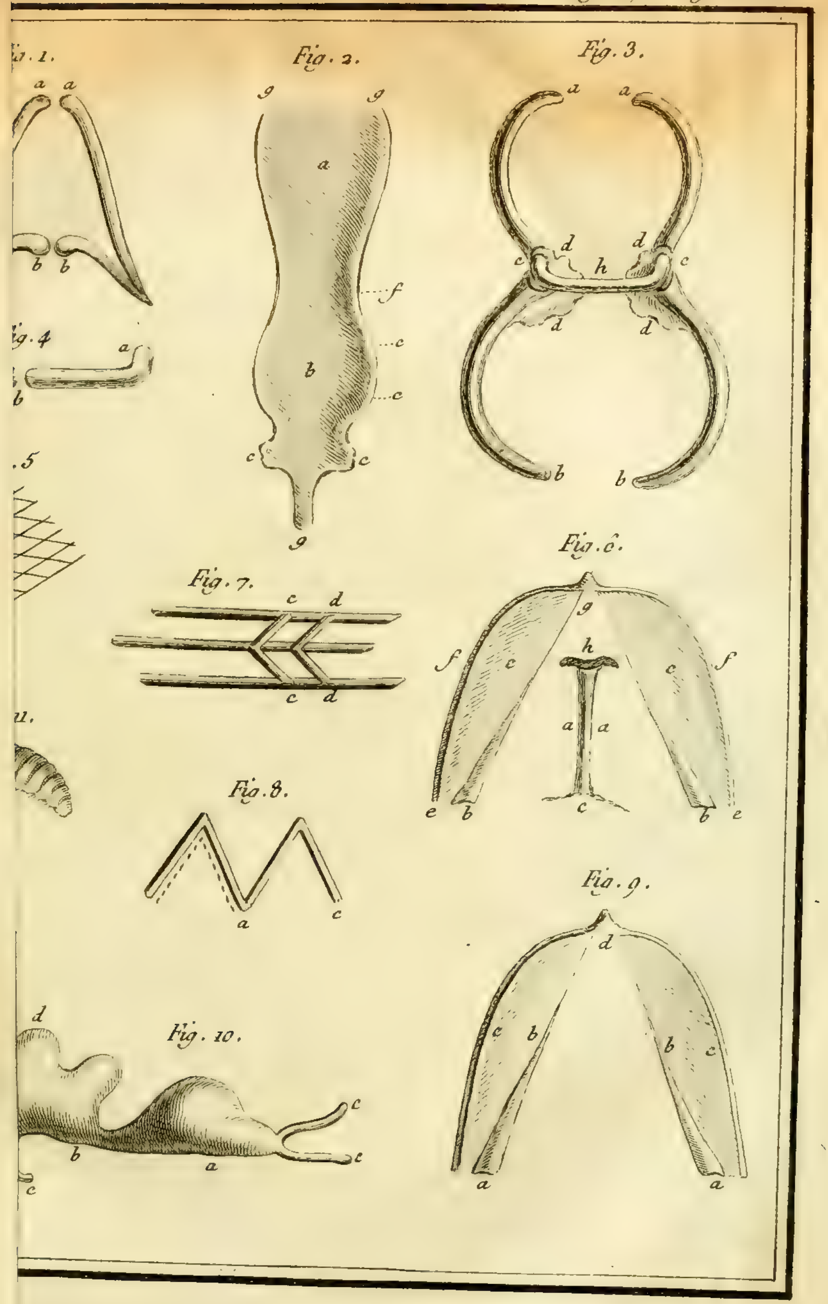
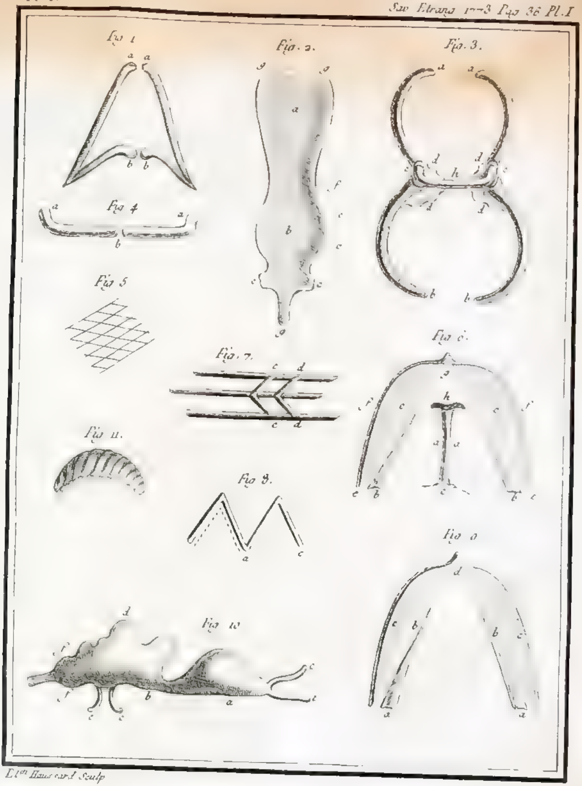


Fig. 1.
a a
b b
Fig. 2.
g g
a
b
f
c
c
c c
g
Fig. 3.
a a
d d
c h c
d d
b b
Fig. 4
a
b
.5
Fig. 6.
g
h
f c c f
a a
e b c b e
Fig. 7.
c d
c d
Fig. 8.
a c
Fig. 9.
d
c b b c
a a
Fig. 10.
d
c
b a c
c



Eln. Haussard Sculp.

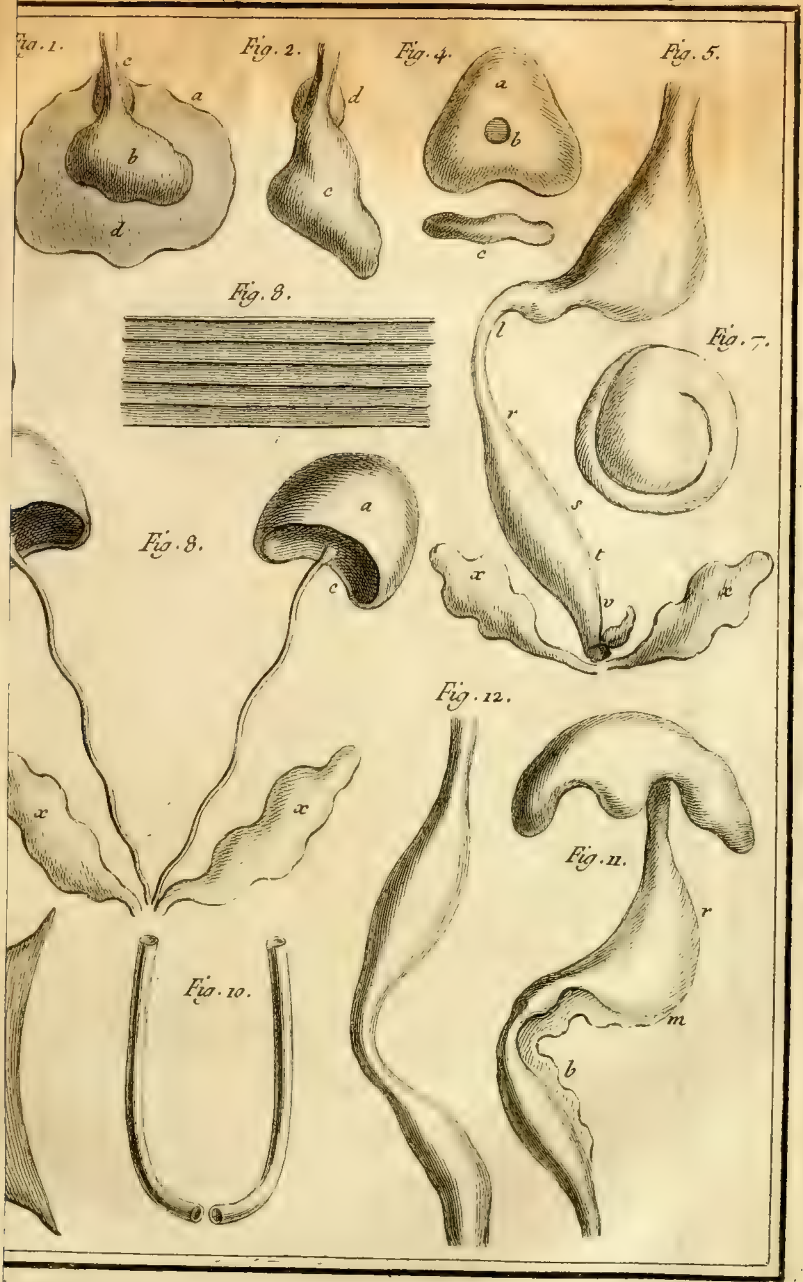
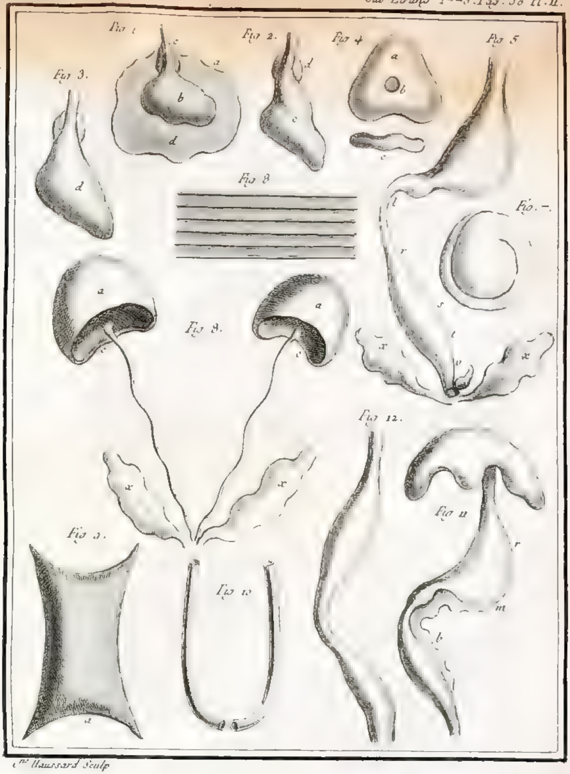


Fig. 1.
a
b
c
d
Fig. 2.
c
d
Fig. 4.
a
b
c
Fig. 5.
l
r
s
t
v
x
x
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 8.
a
c
x
x
Fig. 10.
Fig. 12.
Fig. 11.
r
m
b



Ch. Haussard Sculp

RECHERCHES

1.° sur l'intégration des Équations différentielles aux différences finies, & sur leur usage dans la théorie des hasards.

2.° sur le principe de la Gravitation universelle, & sur les inégalités séculaires des Planètes qui en dépendent.

Par M. DE LA PLACE, Professeur à l'École Royale Militaire.

I.

LES premières recherches que l'on a faites sur la somma- tion des progressions arithmétiques & sur les progressions géométriques, renfermoient le germe du Calcul intégral aux différences finies à une & deux variables ; voici comment: une progression arithmétique est une suite de termes qui croissent également, & il falloit en trouver la somme d'après cette condition ; il est visible que chaque terme de la suite est la différence finie de la somme des termes précédens, à cette même somme augmentée de ce terme; on se proposoit donc de trouver cette somme d'après la nature de sa différence finie ; ainsi de quelque manière qu'on y soit parvenu, on a véritablement integré une quantité aux différences finies. Les Géomètres qui sont venus ensuite ont poussé plus loin ces recherches; ils ont déterminé la somme des carrés & des puissances supérieures & entières des nombres naturels; ils y sont parvenus d'abord par des méthodes indirectes: ils ne s'apercevoient pas que ce qu'ils cherchoient revenoit à trouver une quantité dont la différence finie étoit connue; mais si-tôt qu'ils ont eu fait cette réflexion, ils ont résolu directement, non-seulement les cas déjà connus, mais beaucoup d'autres plus étendus. En général, $\varphi(x)$, représentant une fonction quelconque de la variable x, dont la différence finie est supposée constante, ils se sont proposé de trouver une quantité dont la différence finie soit égale à cette fonction,

Lû à l'Acad. le 10 Févr. 1773.

& c'eſt l'objet du Calcul intégral aux différences finies à une ſeule variable.

Pareillement, la recherche du terme général d'une progreſſion géometrique, revient à trouver le x.^ième^ terme d'une ſuite telle que chaque terme ſoit à celui qui le précède, en raiſon conſtante. Soit y_{x-1}, le $(x - 1)$.^ième^ terme, & y_x le x.^ième^ terme, la loi de la ſuite exige que l'on ait $y_x = p \cdot y_{x-1}$, quel que ſoit x, p étant conſtant. Or il eſt clair que de quelque manière que l'on ſoit parvenu à trouver y_x, on a véritablement intégré l'équation aux différences finies $y_x = p \cdot y_{x-1}$. Enſuite, on a généraliſé cette recherche en ſe propoſant de trouver le terme général des ſuites telles que chacun de leurs termes ſoit égal à pluſieurs des précédens multipliés par des conſtantes quelconques; ces ſuites ont été nommées pour cela *récurrentes*. On eſt parvenu d'abord à trouver leur terme général par des voies indirectes, quoique fort ingénieuſes, on ne s'apercevoit pas que cela revenoit à intégrer une équation linéaire aux différences finies; mais lorſqu'on eut fait cette réflexion, on eſſaya d'appliquer à ces équations les méthodes connues pour les équations linéaires aux différences infiniment petites, avec les modifications qu'exige la ſuppoſition des différences finies, & l'on réſolut de cette manière des cas beaucoup plus étendus que ceux qui l'étoient déjà.

M. Moivre eſt, je crois, le premier qui ait déterminé le terme général des ſuites récurrentes; mais M. de la Grange eſt le premier qui ſe ſoit aperçu que cette recherche dépend de l'intégration d'une équation linéaire aux différences finies, & qui y ait appliqué la belle méthode des coëfficiens indéterminés de M. d'Alembert *(voyez le I.^er^ vol. des Mémoires de Turin)*. Je me ſuis propoſé enſuite d'approfondir ce calcul intéreſſant, dans un Mémoire imprimé dans le *IV.^e^ Tome* de ceux de Turin; & depuis, ayant eu occaſion d'y réfléchir davantage, j'ai fait ſur cela de nouvelles recherches dont je rendrai bientôt compte. Je dois obſerver ici que M. le Marquis de Condorcet a donné d'excellentes choſes ſur cette

matière, dans ſon Traité du Calcul intégral, & dans les Mémoires de l'Académie.

Il n'étoit queſtion juſqu'alors que des équations aux différences ordinaires, & des ſuites qui en dépendent; mais la ſolution de pluſieurs problèmes ſur les haſards, m'a conduit à une nouvelle eſpèce de ſuites que j'ai nommées *récurro-récurrentes*, & dont je crois avoir donné le premier la théorie, & indiqué l'uſage dans la ſcience des probabilités *(voyez le tome VI des Savans étrangers.)* Les équations dont ces ſuites dépendent, ſont à peu-près dans les différences finies, ce que les équations aux différences partielles ſont dans les différences infiniment petites; ce que j'ai donné ſur ces équations n'eſt qu'un eſſai: en les approfondiſſant j'ai vu qu'elles étoient fort importantes dans la théorie des chances, & qu'elles donnoient une méthode de les traiter beaucoup plus généralement qu'on ne l'a fait encore: c'eſt ce qui m'engage à les conſidérer de nouveau; mais les nouvelles recherches que j'ai faites ſur cet objet, ſuppoſant celles que j'ai déja données; je vais reprendre ici toute cette matière.

I I.

On peut concevoir ainſi les équations aux différences finies; j'imagine la ſuite

$$y_1, \; y_2, \; y_3, \; y_4, \; y_5 \ldots\ldots\ldots y_x, \; \text{\&c.}$$

formée ſuivant une loi telle que l'on ait conſtamment

$$X_x = M_x \cdot y_x + N_x \cdot \Delta \cdot y_x + P_x \cdot \Delta^2 \cdot y_x \ldots + S_x \cdot \Delta^n \cdot y_x (A)$$

les nombres 1, 2, 3... x, placés au bas des y, indiquent le rang qu'occupe l'y dans la ſuite, ou, ce qui revient au même, l'indice de la ſérie, les quantités X_x, M_x, N_x, &c. ſont des fonctions quelconques de la variable x, dont la différence eſt ſuppoſée conſtante & égale à l'unité. La caractériſtique Δ ſert à exprimer la différence finie de la quantité devant laquelle elle eſt placée, comme dans l'analyſe infiniteſimale la lettre d exprime la différence infiniment petite des quantités. Cela poſé, l'équation précédente eſt une équation aux

différences finies, qui peut généralement repréſenter les équations de ce genre, où la variable y_x, & ſes différences ſont ſous une forme linéaire.

Quoique j'aie ſuppoſé la différence conſtante de x, égale à l'unité, cela ne diminue en rien la généralité de l'équation précédente *(A)*; car ſi cette différence au lieu d'être 1, eſt égale à q, on fera $\frac{x}{q} = x'$, & y_x étant fonct. (x), deviendra fonct. (qx'); je nomme $y_{x'}$ cette dernière fonction. Or, on a par hypothèſe, $\Delta . y_x = y_{x+q} - y_x =$ fonct. $(x + q)$ $-$ fonct. $(x) =$ fonct. $[q(x' + 1)]$ $-$ fonct. (qx') $= y_{x'+1} - y_{x'} = \Delta . y_{x'}$ la différence conſtante de x', étant 1. Pareillement,

$$\Delta^2 . y_x = y_{x+2q} - 2 . y_{x+q} + y_x = y_{x'+2} - 2 . y_{x'+1} + y_{x'} = \Delta^2 . y_{x'}$$

& ainſi du reſte. L'équation *(A)* ſera donc transformée dans la ſuivante.

$$X_{x'} = M_{x'} y_{x'} + N_{x'} \Delta . y_{x'} + \text{\&c.} \ldots + S_{x'} . \Delta^n . y_{x'}$$

dans laquelle la différence de x' eſt égale à l'unité.

On peut former aiſément d'autres équations différentielles, dans leſquelles y_x & ſes différences entreroient d'une manière quelconque; mais celles qui ſont compriſes dans l'équation *(A)*, ſont les ſeules qu'il ſoit véritablement intéreſſant de conſidérer.

Avant que de chercher à les intégrer, je vais rappeler ici un principe fort utile dans l'analyſe des différences infiniment petites, & qui s'applique également & avec le même avantage aux différences finies; voici en quoi il conſiſte.

Toute fonction de x *qui, renfermant* n *conſtantes arbitraires irréductibles, ſatisfait pour* y_x *dans une équation différentielle de l'ordre* n, *entre* x *&* y_x, *eſt l'expreſſion complète de* y_x.

Par *conſtantes irréductibles*, j'entends qu'elles ſont telles que deux ou pluſieurs ne peuvent ſe réduire à une ſeule; il ſuit de-là que ſi une fonction renfermant n conſtantes arbitraires irréductibles, ſatisfait pour y_x dans une équation différentielle

différentielle de l'ordre $n - 1$, cette équation eſt ſûrement identique; car ſi elle ne l'étoit pas, la fonction la plus générale de x qui pût y ſatisfaire pour y_x, ne renfermeroit que $n - 1$ conſtantes arbitraires irréductibles.

Pour la commodité du calcul, je ſuppoſerai que les quantités notées de cette manière, ${}^1H, {}^2H, {}^3H$, ou ${}^1M, {}^2M$, &c. expriment des quantités différentes, & qui peuvent n'avoir aucun rapport entre elles; mais celles-ci $H_1, H_2, H_3 \ldots H_x$, ou M_1, M_2, M_x, &c. repréſentent les différens termes d'une ſuite formée ſuivant une loi quelconque, les nombres 1, 2, $3 \ldots . x$ déſignant le rang des H ou des M dans la ſuite. Cela poſé, puiſque l'on a

$$\Delta . y_x = y_{x+1} - y_x$$
$$\Delta^2 . y_x = y_{x+2} - 2 . y_{x+1} + y_x$$
$$\Delta^3 . y_x = y_{x+3} - 3 . y_{x+2} + 3 . y_{x+1} - y_x \text{ \&c.}$$

je puis donner à l'équation *(A)* cette forme.

$$\begin{aligned} X_x = & \; y_x . [M_x - N_x + P_x - \text{\&c.}] \\ & + y_{x+1} [N_x - 2 P_x + \text{\&c.}] \\ & + \text{\&c.} \\ & + y_{x+n} . S_x \end{aligned}$$

d'où il réſulte que toute équation linéaire aux différences finies, peut être généralement repréſentée par celle-ci.

$$y_x = H_x . y_{x-1} + {}^1H_x . y_{x-2} + {}^2H_x . y_{x-3} \ldots + {}^{n-1}H_x . y_{x+n} + X_x \; (B),$$

l'équation $y_x = H_x . y_{x-1} + X_x$, eſt du premier ordre, celle-ci $y_x = H_x . y_{x-1} + {}^1H_x . y_{x-2} + X_x$, eſt du ſecond ordre, & ainſi de ſuite.

Comme dans la ſuite j'aurai beſoin de caractériſtiques pour déſigner la différence finie des quantités, leurs intégrales finies, le produit de tous les termes d'une ſuite, je me ſervirai pour cela des ſuivantes.

La caractériſtique Δ placée devant une quantité, en dé-

ſignera, comme ci-deſſus, la différence finie. Ainſi, $\Delta . H_x$, exprimera la différence finie de H_x; la caractériſtique Σ placée devant une quantité, en déſignera l'intégrale finie; ainſi, $\Sigma . H_x$ ſignifiera l'intégrale finie de H_x: enfin la caractériſtique ∇ déſignera le produit de tous les termes d'une ſuite; ainſi, $\nabla . H_x$ repréſentera le produit $H_1 . H_2 . H_3 . . . . H_x$ de tous les termes de la ſuite $H_1, H_2, H_3 . . . . H_x$.

III.

PROBLEME I.

L'équation différentielle du premier ordre $y_x = H_x . y_{x-1} + X_x$ étant donnée, on propoſe de l'intégrer.

Je fais dans cette équation $y_x = u_x . \nabla . H_x$; elle devient

$$u_x . \nabla . H_x = H_x . u_{x-1} . \nabla . H_{x-1} + X_x;$$

mais on a $H_x . \nabla . H_{x-1} = \nabla H_x$. partant $u_x = u_{x-1} + \frac{X_x}{\nabla . H_x}$, ou $\Delta . u_{x-1} = \frac{X_x}{\nabla . H_x}$; & comme cette équation a lieu quel que ſoit x, on aura $\Delta . u_x = \frac{X_{x+1}}{\nabla . H_{x+1}}$; partant en intégrant $u_x = A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{\nabla . H_{x+1}}$; A étant une conſtante arbitraire. On a donc

$$y_x = \nabla . H_x . \left[A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{\nabla . H_{x+1}}\right];$$

ſi H_x étoit conſtant & égal à p, on auroit

$$\nabla . H_x = p^x, \text{ \& } y_x = p^x \left[A + \Sigma \frac{X_{x+1}}{p^{x+1}}\right].$$

IV.

PROBLEME II.

L'équation différentio-différentielle

$$y_x = H_x . y_{x-1} + {}^1H_x . y_{x-2} + {}^2H_x . y_{x-3} . . . . + {}^{n-1}H_x . y_{x-n} + X_x \; (B)$$

étant donnée, on propoſe de l'intégrer.

Je fais $y_x = \alpha_x . y_{x-1} + T_x$ (C), α_x & T_x étant deux nouvelles variables, & j'en conclus les équations ſuivantes.

$$y_{x-1} = a_{x-1} \cdot y_{x-2} + T_{x-1}$$
$$y_{x-2} = a_{x-2} \cdot y_{x-3} + T_{x-2}$$
$$y_{x-3} = a_{x-3} \cdot y_{x-4} + T_{x-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{x-n+1} = a_{x-n+1}\, y_{x-n} + T_{x-n+1}$$

je multiplie la première de ces équations par $-{}^1\mathcal{C}$, la seconde par $-{}^2\mathcal{C}$, la troisième par $-{}^3\mathcal{C}$, &c. & je les ajoute avec l'équation *(C)*; ce qui me donne

$$y_x = [a_x + {}^1\mathcal{C}] \cdot y_{x-1} + [-{}^1\mathcal{C} \cdot a_{x-1} + {}^2\mathcal{C}] y_{x-2}$$
$$+ [-{}^2\mathcal{C} \cdot a_{x-2} + {}^3\mathcal{C}] \cdot y_{x-3} + \&c.$$
$$- {}^{n-1}\mathcal{C} \cdot a_{x+1-n} \cdot y_{x-n}$$
$$+ T_x - {}^1\mathcal{C}\, T_{x-1} - {}^2\mathcal{C} \cdot T_{x-2} \ldots\ldots - {}^{n-1}\mathcal{C} \cdot T_{x-n+1}$$

en comparant cette équation avec l'équation *(B)*, on aura

1.° $T_x = {}^1\mathcal{C} . T_{x-1} + {}^2\mathcal{C} . T_{x-2} \ldots + {}^{n-1}\mathcal{C} \cdot T_{x-n+1} + X_x$

2.° les équations suivantes.

$${}^1\mathcal{C} + a_x = H_x$$
$${}^2\mathcal{C} - {}^1\mathcal{C} \cdot a_{x-1} = {}^1H_x$$
$${}^3\mathcal{C} - {}^2\mathcal{C} \cdot a_{x-2} = {}^2H_x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- {}^{n-1}\mathcal{C} \cdot a_{x-n+1} = {}^{n-1}H_x.$$

De-là on conclura

$${}^1\mathcal{C} = H_x - a_x$$
$${}^2\mathcal{C} = {}^1H_x + a_{x-1} \cdot H_x - a_x \cdot a_{x-1}$$
$${}^3\mathcal{C} = {}^2H_x + a_{x-2} . {}^1H_x + a_{x-1} . a_{x-2} . H_x - a_x . a_{x-1} . a_{x-2},$$

&c.

$$\left.\begin{array}{l} {}^{n-1}\mathcal{C} = {}^{n-2}H_x + a_{x-n+2} \cdot {}^{n-3}H_x + a_{x-n+3} \cdot a_{x-n+2} \\ \quad \cdot {}^{n-4}H_x + \&c. - a_x \cdot a_{x-1} \cdots a_{x-n+2} \end{array}\right\} = -\frac{{}^{n-1}H_x}{a_{x-n+1}},$$

à cause de l'équation $-{}^{n-1}\mathcal{C} \cdot a_{x-n+1} = {}^{n-1}H_x$; on aura donc pour résoudre le Problème, les deux équations suivantes,

$$T_x = (H_x - \alpha_x) . T_{x-1} + [{}^1H_x + \alpha_{x-1} . H_x - \alpha_x . \alpha_{x-1}] . T_{x-2} + \&c. - \frac{{}^{n-1}H_x}{\alpha_{x-n+1}} . T_{x-n+1} + X_x \quad (D),$$

$$0 = 1 - \frac{H_x}{\alpha_x} - \frac{{}^1H_x}{\alpha_x . \alpha_{x-1}} - \frac{{}^2H_x}{\alpha_x . \alpha_{x-1} . \alpha_{x-2}} - \&c.... - \frac{{}^{n-1}H_x}{\alpha_x \ldots \alpha_{x-n+1}} \quad (E).$$

Les équations *(D)* & *(E)* font d'un degré inférieur à la propofée, & l'équation *(D)* eft de la même forme; or il n'eft pas néceffaire d'intégrer généralement ces équations, pour intégrer l'équation *(B)* du Problème; il fuffit de connoître une quantité qui fatisfaffe pour α_x. Dans l'équation *(E)*, je nomme δ_x cette valeur; on la fubftituera dans l'équation *(D)*, que je nomme *(D')* après cette fubftitution, on cherchera l'intégrale complète de l'équation *(D')*; enfuite au moyen de l'équation $y_x = \delta_x . y_{x-1} + T_x$; on conclura en intégrant par le Problème I.er

$$y_x = \nabla . \delta_x [A + \Sigma . \frac{T_{x+1}}{\nabla . \delta_{x+1}}],$$

A étant une conftante arbitraire.

Cette équation eft l'intégrale complète de l'équation *(B)*, car l'équation *(D')* étant néceffairement de l'ordre $n - 1$, l'expreffion complète de T_x, renferme $n - 1$, conftantes arbitraires irréductibles: partant, $\nabla . \delta_x [A + \Sigma . \frac{T_{x+1}}{\nabla . \delta_{x+1}}]$, renferme n, conftantes arbitraires. Ces conftantes font de plus irréductibles, car, $\nabla \delta_x . \Sigma . \frac{T_{x+1}}{\nabla . \delta_{x+1}}$ en renferme $n - 1$ d'irréductibles, & aucune d'elles n'eft réductible avec la conftante *A*.

L'expreffion précédente de y_x peut fervir à faire connoître l'intégrale de l'équation *(B)* du Problème; car puifque l'équation *(D')* eft linéaire, on peut fuppofer que l'expreffion de T_x a cette forme

$$T_x = \nabla . \lambda_x . [{}'A + \Sigma . \frac{{}'T_{x+1}}{\nabla . \lambda_{x+1}}],$$

${}^{1}T_x$, dépendant de l'intégration d'une équation linéaire de l'ordre $n - 2$; on a donc

$$y_x = \nabla \cdot \delta_x [A + {}^{1}A . \Sigma . \frac{\nabla \cdot \lambda_{x+1}}{\nabla \cdot \delta_{x+1}} + \Sigma . \frac{(\Sigma . \frac{{}^{1}T_{x+1}}{\nabla \cdot \lambda_{x+1}})}{\nabla \cdot \delta_{x+1}}],$$

en continuant de raisonner ainsi, on verra que l'expression de y_x est de cette forme

$$y_x = A . \nabla . \delta_x + {}^{1}A . \nabla . {}^{1}\delta_x + {}^{2}A . \nabla . {}^{2}\delta_x \ldots + {}^{n-1}A . \nabla . {}^{n-1}\delta_x + L_x.$$

A, ${}^{1}A$, ${}^{2}A$, &c. étant arbitraires.

Si l'on suppose $X_x = 0$, dans l'équation *(B)*, il est aisé de voir par la suite des opérations que je viens d'indiquer, que L_x sera nul; ainsi dans ce cas

$$y_x = A . \nabla . \delta_x + {}^{1}A . \nabla . {}^{1}\delta_x \ldots + {}^{n-1}A . \nabla . {}^{n-1}\delta_x,$$

δ_x satisfait par la supposition pour α_x, dans l'équation *(E)*; ${}^{1}\delta_x$, ${}^{2}\delta_x$, &c. y satisferont pareillement; car puisque l'équation $y_x = \nabla . {}^{1}\delta_x$, par exemple satisfait à l'équation *(B)* en y supposant $X_x = 0$, on aura

$$\nabla . {}^{1}\delta_x = H_x . \nabla . {}^{1}\delta_{x-1} + {}^{1}H . \nabla_x . {}^{1}\delta_{x-2} + \&c.$$

partant

$$0 = 1 - \frac{H_x}{{}^{n}\delta_x} - \frac{{}^{1}H_x}{{}^{1}\delta_x . {}^{1}\delta_{x-1}} - \&c.$$

V.

Je suppose dans les équations *(D')* & *(B)*, $X_x = 0$, j'aurai les deux expressions suivantes de y_x,

$$y_x = \nabla . \delta_x . [A + \Sigma . \frac{T_{x+1}}{\nabla . \delta_{x+1}}] \quad (1)$$

$$y_x = A . \nabla . \delta_x + {}^{1}A . \nabla . {}^{1}\delta_x + {}^{2}A . \nabla . {}^{2}\delta_x \ldots + {}^{n-1}A . \nabla . {}^{n-1}\delta_x \quad (2)$$

Ces deux expressions différentes en apparence, doivent réellement coïncider; je suppose donc que l'intégrale complète de l'équation *(D')* soit

$$T_x = {}^{1}A . R_x + {}^{2}A . {}^{1}R_x \ldots + {}^{n-1}A . {}^{n-2}R_x,$$

en ſubſtituant cette valeur de T_x dans l'équation (1), on aura

$$y_x = \nabla.\delta_x.\left\{\begin{array}{l} A \\ + \; {}^{1}A.\Sigma\left[\frac{R_{x+1}}{\nabla.\delta_{x+1}}\right]. \\ + \; {}^{2}A.\Sigma\left[\frac{{}^{1}R_{x+1}}{\nabla.\delta_{x+1}}\right]. \\ + \; \&c. \\ + \; {}^{n-1}A.\Sigma\left[\frac{{}^{n-2}R_{x+1}}{\nabla.\delta_{x+1}}\right]. \end{array}\right.$$

En comparant cette dernière équation avec l'équation (2), on aura

$$\nabla.\delta_x.\Sigma.\left[\frac{R_{x+1}}{\nabla.\delta_{x+1}}\right] = \nabla.{}^{1}\delta_x.$$

$$\nabla.\delta_x.\Sigma.\left[\frac{{}^{1}R_{x+1}}{\nabla.\delta_{x+1}}\right] = \nabla.{}^{2}\delta_x.$$

&c.

Donc

$$R_x = \nabla.\delta_x.\Delta.\left[\frac{\nabla.{}^{1}\delta_{x-1}}{\nabla.\delta_{x-1}}\right],$$

$${}^{1}R_x = \nabla.\delta_x.\Delta.\left[\frac{\nabla.{}^{2}\delta_{x-1}}{\nabla.\delta_{x-1}}\right].$$

$${}^{2}R_x = \nabla.\delta_x.\Delta.\left[\frac{\nabla.{}^{3}\delta_{x-1}}{\nabla.\delta_{x-1}}\right]. = 0$$

&c.

Donc ſi je ſais réſoudre l'équation *(B)*, en y ſuppoſant $X_x = 0$, je ſaurai réſoudre l'équation *(D')*, en y ſuppoſant pareillement $X_x = 0$. Soient alors u_x, ${}^{1}u_x$, ${}^{2}u_x$, &c. les valeurs particulières de y_x, dans l'équation *(B)*, en ſorte que ſon intégrale complète ſoit

$$y_x = A.u_x + {}^{1}A.{}^{1}u_x + {}^{2}A.{}^{2}u_x \ldots + {}^{n-1}A.{}^{n-1}u_x;$$

on aura

$$u_x = \nabla.\delta_x, \quad {}^{1}u_x = \nabla.{}^{1}\delta_x, \text{ \&c.}$$

& l'intégrale complète de l'équation *(D')* en y ſuppoſant $X_x = 0$, ſera

$$T_x = {}^1A . u_x . \Delta . \left(\frac{{}^1u_{x-1}}{u_{x-1}}\right) + {}^2A . u_x . \Delta . \left(\frac{{}^2u_{x-1}}{u_{x-1}}\right) \ldots\ldots + {}^{n-1}A . u_x . \Delta . \left(\frac{{}^{n-1}u_{x-1}}{u_{x-1}}\right).$$

Présentement si je sais intégrer l'équation *(D')* en y supposant X_x, quelconque, je pourrai, dans la même supposition, intégrer l'équation *(B)*, puisque l'on a, par ce qui précède, $y_x = u_x \left[A + \Sigma . \frac{T_{x+1}}{u_{x+1}}\right]$; donc la difficulté d'intégrer l'équation

$$y_x = H_x . y_{x-1} + {}^1H_x . y_{x-2} \ldots + {}^{n-1}H_x . y_{x-n} + X_x . (B),$$

lorsqu'on sait intégrer celle-ci

$$y_x = H_x . y_{x-1} + {}^1H_x . y_{x-2} \ldots + {}^{n-1}H_x . y_{x-n} . (b);$$

se réduit à intégrer l'équation

$$T_x = (H - \delta_x) . T_{x-1} + \&c\ldots - \frac{{}^{n-1}H_x}{\delta_{x-n+1}} . T_{x-n+1} + X_x \; (D')$$

qui est du degré $n - 1$, & que l'on sait intégrer en y supposant $X_x = 0$: on fera pareillement dépendre l'intégration de *(D')* de l'intégration d'une équation du degré $n - 2$, & ainsi de suite; d'où il résulte que l'équation

$$y_x = H_x . y_{x-1} + {}^1H_x . y_{x-2} \ldots\ldots + {}^{n-1}H_x . y_{x-n} + X_x$$

est intégrable dans les mêmes cas que celle-ci;

$$y_x = H_x . y_{x-1} + \&c\ldots\ldots + {}^{n-1}H_x . y_{x-n}$$

VI.

Le procédé que je viens d'indiquer pour ramener l'intégrale de l'équation *(B)* à celle de l'équation *(b)*, peut servir à démontrer la liaison qu'ont entre elles ces deux intégrales; mais il seroit fort pénible de l'employer à intégrer l'équation *(B)*. Il seroit donc très-utile d'avoir immédiatement l'expression générale de y_x dans l'équation *(B)*, lorsqu'on a celle de l'équation *(b)*.

Je reprends pour cela l'équation $y_x = u_x \left[A + \Sigma . \frac{T_{x+1}}{u_{x+1}}\right]$,

T_x étant ſuppoſé être l'expreſſion complète de T_x dans l'équation *(D')*. Or, cette équation *(D')* étant de la même forme que l'équation *(B)*, ſi l'on nomme $\overset{1}{u}_x$, $'\overset{1}{u}_x$, $^2\overset{1}{u}_x$, &c. les intégrales particulières de T_x dans l'équation *(D')*, lorſqu'on y ſuppoſe $X_x = 0$, on aura de la même manière, & quel que ſoit X_x.

$$T_x = \overset{1}{u}_x \left['A + \Sigma \frac{'T_{x+1}}{\overset{1}{u}_{x+1}} \right]$$

$'T_x$ étant l'expreſſion complète de $'T_x$ dans une équation de l'ordre $n - 2$, que je nomme *(D'')*, & qui réſulte de l'équation *(D')* de la même manière que celle-ci réſulte de l'équation *(B)*, on aura ſemblablement

$$'T_x = \overset{2}{u}_x . \left[^2A + \Sigma . \frac{^2T_{x+1}}{\overset{2}{u}_{x+1}} \right];$$

& ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on parvienne à l'équation du premier ordre.

$$^{n-2}T_x = S_x . {}^{n-2}T_{x-1} + X_x$$

dont l'intégrale eſt $^{n-2}T_x = \overset{n-1}{u}_x \left[^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{\overset{n-1}{u}_{x+1}} \right]$

Si l'on ſubſtitue préſentement dans l'expreſſion de y_x la valeur de T_x en $'T_x$, celle de $'T_x$ en ^2T_x, &c. on aura

$$y_x = u_x \left[A + \Sigma \left[\frac{\overset{1}{u}_{x+1}}{u_{x+1}} . \left['A + \Sigma . \left[\frac{\overset{2}{u}_{x+2}}{\overset{1}{u}_{x+2}} . \left[^2A \ldots \right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \Sigma \left[\frac{\overset{n-1}{u}_{x+n-1}}{\overset{n-2}{u}_{x+n-1}} . \left[^{n-1}A + \Sigma \left(\frac{X_{x+n}}{\overset{n-1}{u}_{x+n}} \right) \right] \right] \right] \right. (K).$$

Il faut préſentement déterminer $\overset{1}{u}_x$, $\overset{2}{u}_x$, &c. or, on a par l'article précédent

$\overset{1}{u}_x = R_x = u_x . \Delta . \left(\frac{^1u_{x-1}}{u_{x-1}} \right)$ pareillement $'\overset{1}{u}_x = u_x . \Delta . \left(\frac{^2u_{x-1}}{u_{x-1}} \right)$

$$^2\overset{1}{u}_x = u_x . \Delta . \left(\frac{^3u_{x-1}}{u_{x-1}} \right)$$

&c.

on

on aura de même $\overset{2}{u}_x = \overset{1}{u}_x \,.\, \Delta \,.\, \left(\dfrac{{}^{1}\overset{1}{u}_{x-1}}{\overset{1}{u}_{x-1}}\right)$

$${}^{1}\overset{2}{u}_x = \overset{1}{u}_x \,.\, \Delta \,.\, \left(\frac{{}^{2}\overset{1}{u}_{x-1}}{\overset{1}{u}_{x-1}}\right)$$

$${}^{2}\overset{2}{u}_x = \overset{1}{u}_x \,.\, \Delta \,.\, \left(\frac{{}^{3}\overset{1}{u}_{x-1}}{\overset{1}{u}_{x-1}}\right)$$

&c.

la formule *(K)* deviendra

$$y_x = u_x \,.\, [A + \Sigma \,.\, [\Delta\left(\frac{{}^{1}u_x}{u_x}\right) \,.\, [{}^{1}A + \Sigma[\Delta\left(\frac{{}^{1}\overset{1}{u}_{x+1}}{\overset{1}{u}_{x+1}}\right) \,.\, [{}^{2}A \ldots$$

$$+ \Sigma\,[\Delta\left(\frac{{}^{1}\overset{n-2}{u}_{x+n-2}}{\overset{n-2}{u}_{x+n-2}}\right) \,.\, ({}^{n-1}A + \Sigma \,.\, \frac{X_{x+n}}{\overset{n-1}{u}_{x+n}})]]\ (O);$$

si l'on ne connoissoit que le nombre $n - 1$ d'intégrales particulières de y_x, dans l'équation

$$y_x = H_x \,.\, y_{x-1} + {}^{1}H_x \,.\, y_{x-2} \ldots + {}^{n-1}H_x \,.\, y_{x-n},$$

l'intégration n'auroit pas plus de difficulté; je suppose que ce soit l'intégrale ${}^{n-1}u_x$, qui soit inconnue; puisque l'on connoît u_x, ${}^{1}u_x \ldots {}^{n-2}u_x$; on connoîtra $\overset{1}{u}_x$, $\overset{2}{u}_x$, &c. jusques à $\overset{n-1}{u}_x$ exclusivement. Pour déterminer $\overset{n-1}{u}_x$, il faut intégrer l'équation ${}^{n-2}T_x = S_x \,.\, {}^{n-2}T_{x-1} + X_x$, en supposant $X_x = 0$; ce qui seroit facile par le Problème I.er si l'on connoissoit S_x. Pour le trouver, j'observe que dans l'équation *(D')*, le coëfficient de T_{x-1}, est $H_x - \delta_x = H_x - \dfrac{u_x}{u_{x-1}}$, à cause de $\delta_x = \dfrac{u_x}{u_{x-1}}$. Pareillement celui de ${}^{1}T_{x-1}$, dans l'équation *(D'')*, est $H_x - \dfrac{u_x}{u_{x-1}} - \dfrac{\overset{1}{u}_x}{\overset{1}{u}_{x-1}}$, & ainsi de suite; partant

$$S_x = H_x - \frac{u_x}{u_{x-1}} - \frac{\overset{1}{u}_x}{\overset{1}{u}_{x-1}} \cdots - \frac{\overset{n-2}{u}_x}{\overset{n-2}{u}_{x-1}};$$

si au lieu de connoître l'intégrale de l'équation

$$y_x = H_x . y_{x-1} \ldots \ldots + {}^{n-1}H_x . y_{x-n},$$

on connoissoit un nombre n ou $n - 1$ de valeurs pour α_x, dans l'équation *(E)* les formules précédentes serviroient également, car, δ_x, ${}'\delta_x$ &c. étant ces valeurs, on a

$$u_x = \nabla . \delta_x, \quad {}'u_x = \nabla . {}'\delta_x, \text{ \&c.}$$

VII.

La formule *(O)* n'a point encore tout le degré de simplicité que peut avoir l'intégrale complète de y_x; car on a vu *(art. IV)* que cette intégrale a la forme suivante

$$y_x = A . u_x + {}'A . {}'u_x + \text{\&c.} \ldots + {}^{n-1}A . {}^{n-1}u_x + L_x$$

il faut donc ramener l'équation *(O)* à cette forme : pour cela je divise l'equation *(O)* par u_x, & j'en conclus en la différentiant,

$$\Delta\left[\frac{y_{x-1}}{u_{x-1}}\right] = \Delta\left(\frac{{}'u_{x-1}}{u_{x-1}}\right) . \left[{}'A + \Sigma\left[\Delta\left(\frac{{}^1u_x}{{}^1u_x}\right)\left[{}^2A \ldots\right.\right.\right.$$

$$+ \Sigma\left[\Delta\left(\frac{{}^{n-2}_{\;\;1}u_{x+n-3}}{{}^{n-2}u_{x+n-3}}\right)\left[{}^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x+n-1}}{{}^{n-1}u_{x+n-1}}\right)\right]$$

d'où l'on conclura, en divisant par $\Delta\left(\frac{{}'u_{x-1}}{u_{x-1}}\right)$ & différentiant

$$\Delta \left\{ \frac{\Delta\left(\frac{y_{x-2}}{u_{x-2}}\right)}{\Delta\left(\frac{{}'u_{x-2}}{u_{x-2}}\right)} \right\} \quad \Delta\left(\frac{{}^1_{\,1}u_{x-1}}{{}^1u_{x-1}}\right) . \left[{}^2A + \text{\&c.}\right.$$

on aura donc en continuant de différentier ainsi, une équation de cette forme.

$${}^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x-1}}{{}^{n-1}u_{x-1}} = \gamma_x . y_x + {}'\gamma_x . y_{x-1} + {}^2\gamma_x . y_{x-2} \ldots + {}^{n-1}\gamma_x . y_{x-n+1},$$

γ_x, ${}'\gamma_x$, &c. étant des fonctions de u_x, ${}'u_x$ &c. & de

leurs différences finies. J'obſerve maintenant que pour former les valeurs de $\overset{1}{u}_x$, $\overset{2}{u}_x$, $\overset{3}{u}_x$, &c. j'ai conſidéré *(article précedent)* les quantités u_x, ${}^1u_x$, ${}^2u_x$, &c. dans cet ordre

$$u_x,\ {}^1u_x,\ {}^3u_x \ldots\ldots {}^{n-1}u_x;$$

mais ſi au lieu de cela, je les euſſe conſidéré dans l'ordre ſuivant

$${}^1u_x,\ u_x,\ {}^2u_x \ldots\ldots {}^{n-1}u_x,$$

je ſerois parvenu à l'équation ſuivante.

$${}^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{\left(\overset{n-1}{u}_{x+1}\right)} = (\gamma_x) . y_x + ({}^1\gamma_x) . y_{x-1} \ldots + ({}^{n-1}\gamma_x) . y_{x-n+1}$$

$\left(\overset{n-1}{u}_x\right)$, (γ_x) &c. étant ce que deviennent $\overset{n-1}{u}_x$, γ_x, &c. lorſqu'on y change u_x en ${}^1u_x$, & ${}^1u_x$ en u_x. Si j'avois ſuppoſé $X_{x+1} = 0$, je ſerois parvenu aux deux équations

$${}^{n-1}A = \gamma_x . y_x + {}^1\gamma_x . y_{x-2} \ldots\ldots + {}^{n-1}\gamma_x . y_{x-n+1}$$
$${}^{n-1}A = (\gamma_x) . y_x + ({}^1\gamma_x) . y_{x-2} \ldots\ldots + ({}^{n-1}\gamma_x) . y_{x-n+1}$$

dans leſquelles la conſtante ${}^{n-1}A$ eſt viſiblement la même, puiſque j'ai ſuppoſé pour former l'une & l'autre équation, que la valeur complète de y_x eſt

$$y_x = A . u_x + {}^1A . {}^1u_x \ldots\ldots\ldots + {}^{n-1}A . {}^{n-1}u_x.$$

On aura donc, en comparant ces deux équations

$$\gamma_x . y_x + {}^1\gamma_x . y_{x-1} \ldots\ldots\ldots + {}^{n-1}\gamma_x . y_{x-n+1}$$
$$= (\gamma_x) . y_x + ({}^1\gamma_x) . y_{x-1} \ldots + ({}^{n-1}\gamma_x) . y_{x-n+1},$$

équation qui doit être identique; car ſi elle ne l'étoit pas, cette équation étant différentielle de l'ordre $n - 1$, auroit cependant pour intégrale complète

$$y_x = A . u_x \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{n-1}A . {}^{n-1}u_x,$$

équation qui renferme n, conſtantes arbitraires, ce qui ſeroit abſurde *(art. II)*.

On a donc

$$^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{\left(\overset{n-1}{u}_{x+1}\right)} = {}^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{\overset{n-1}{u}_{x+1}};$$

partant $\left(\overset{n-1}{u}_{x+1}\right) = \overset{n-1}{u}_{x+1}$. Ainsi l'expression de $\overset{n-1}{u}_x$ reste toujours la même, soit qu'on y change u_x en ${}^1u_x$, & ${}^1u_x$ en u_x; on s'assurera de la même manière que si dans $\overset{n-1}{u}_x$ on change u_x en ${}^2u_x$, & ${}^2u_x$ en u_x; ou ${}^1u_x$ en ${}^2u_x$, & ${}^2u_x$ en ${}^1u_x$, & généralement, ${}^ku_x$ en ${}^iu_x$, & ${}^iu_x$ en ${}^ku_x$, k & i étant moindres que $n - 1$, l'expression $\overset{n-1}{u}_x$ restera toujours la même, & qu'ainsi, quelqu'ordre que l'on donne aux quantités u_x, ${}^1u_x$, ${}^2u_x$, &c. pour former $\overset{n-1}{u}_x$, cette expression restera toujours la même, pourvu que ${}^{n-1}u_x$ soit considérée comme la dernière de ces quantités.

Je fais $\overset{n-1}{u}_{x+1} = {}^{n-1}z_{x+1}$, ensuite, au lieu de considérer ${}^{n-1}u_x$, comme la dernière des quantités u_x, ${}^1u_x$, &c. je suppose actuellement que ${}^{n-2}u_x$, soit cette dernière; soit ${}^{n-2}z_{x+1}$, ce que devient alors ${}^{n-1}z_{x+1}$, c'est-à-dire lorsqu'on y change ${}^{n-2}u_x$ en ${}^{n-1}u_x$, & ${}^{n-1}u_x$ en ${}^{n-2}u_x$. On aura, par un procédé semblable au précédent,

$$^{n-2}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{^{n-2}z_{x+1}} = \underline{\gamma_x} . y_x + {}^1\underline{\gamma_x} . y_{x-1} \ldots + {}^{n-1}\underline{\gamma_x} . y_{x-n+1};$$

$\underline{\gamma_x}$, ${}^1\underline{\gamma_x}$, &c. étant ce que deviennent γ_x, ${}^1\gamma_x$, &c. lorsqu'on y change ${}^{n-1}u_x$ en ${}^{n-2}u_x$, & ${}^{n-2}u_x$ en ${}^{n-1}u_x$; on aura pareillement,

$$^{n-3}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{^{n-3}z_{x+1}} = \underline{\underline{\gamma_x}} . y_x + {}^1\underline{\underline{\gamma_x}} . y_{x-1} \ldots + {}^{n-1}\underline{\underline{\gamma_x}} . y_{x-n+1};$$

${}^{n-3}z_{x+1}$, $\underline{\underline{\gamma_x}}$, ${}^1\underline{\underline{\gamma^x}}$, étant ce que deviennent ${}^{n-1}z_{x+1}$, γ_x, ${}^1\gamma_x$, &c. lorsqu'on y change ${}^{n-1}u_x$ en ${}^{n-3}u_x$, & ${}^{n-3}u_x$

en ${}^{n-1}u_x$. Cela posé, en disposant dans l'ordre suivant toutes les équations que l'on peut former ainsi,

$$
\begin{aligned}
{}^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{{}^{n-1}z_{x+1}} &= \gamma_x . y_x + {}^1\gamma_x . y_{x-1} + {}^2\gamma_x . y_{x-2} \ldots + {}^{n-1}\gamma_x . y_{x-n+1} \\
{}^{n-2}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{{}^{n-2}z_{x+1}} &= \gamma_x . y_x + {}^1\gamma_x . y_{x-1} + {}^2\gamma_x . y_{x-2} \ldots + {}^{n-1}\gamma_x . y_{x-n+1} \quad (>) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{z_{x+1}} &= \frac{\gamma_x}{n-1} . y_x + \frac{{}^1\gamma_x}{n-1} . y_{x-1} + \frac{{}^2\gamma_x}{n-1} . y_{x-2} \ldots + \frac{{}^{n-1}\gamma_x}{n-1} y_{x-n+1}
\end{aligned}
$$

& les ajoutant ensemble, après avoir multiplié la première par ${}^{n-1}u_x$, la seconde, par ${}^{n-2}u_x$, &c. enfin, la dernière, par u_x; on aura une équation de cette forme

$$
\begin{aligned}
\lambda_x . y_x \ldots + {}^{n-1}\lambda_x . y_{x-n+1} = u_x . [\quad A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{z_{x+1}}] \\
+ {}^1u_x . [\quad {}^1A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{{}^1z_{x+1}}] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ {}^{n-1}u_x . [{}^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{{}^{n-1}z_{x+1}}],
\end{aligned}
$$

ce qui donne, en faisant $X_{x+1} = 0$,

$$
\begin{aligned}
\lambda_x . y_x + {}^1\lambda_x . y_{x-1} \ldots\ldots\ldots + {}^{n-1}\lambda_x . y_{x-n+1} \\
= A . u_x + {}^1A . {}^1u_x \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{n-1}A . {}^{n-1}u_x ;
\end{aligned}
$$

mais on a dans ce cas

$$y_x = A . u_x + {}^1A . {}^1u_x + \&c.$$

partant

$$y_x = \lambda_x . y_x + {}^1\lambda_x . y_{x-1} \ldots\ldots + {}^{n-1}\lambda_x . y_{x-n+1}.$$

Or, cette équation doit être identique, car autrement, quoique de l'ordre $n-1$, son intégrale renfermeroit les n constantes arbitraires que renferme l'expression complète de y_x : on a donc pour l'intégrale complète de l'équation *(B)* du problème II, quel que soit X_x,

$$\begin{aligned} y_x = & \quad u_x \cdot \left[\quad A + \Sigma \cdot \frac{X_{x+1}}{z_{x+1}} \right] \\ & + \; {}^1u_x \cdot \left[\; {}^1A + \Sigma \cdot \frac{X_{x+1}}{{}^1z_{x+1}} \right] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \; {}^{n-1}u_x \cdot \left[{}^{n-1}A + \Sigma \cdot \frac{X_{x+1}}{{}^{n-1}z_{x+1}} \right] \end{aligned}$$

De-là résulte cette règle fort simple, pour avoir l'intégrale complète de l'équation

$$y_x = H_x \cdot y_{x-1} + {}^1H_x \cdot y_{x-2} \cdots + {}^{n-1}H_x \cdot y_{x-n} + X_x.$$

lorsqu'on sait intégrer celle-ci,

$$y_x = H_x \cdot y_{x-1} + {}^1H_x \cdot y_{x-2} \cdots + {}^{n-1}H_x \cdot y_{x-n}.$$

soit $y_x = A \cdot u_x + {}^1A \cdot {}^1u_x + {}^2A \cdot {}^2u_x \cdots + {}^{n-1}A \cdot {}^{n-1}u_x$ l'intégrale de cette dernière, & que l'on fasse

$$\left.\begin{array}{l} \overset{1}{u}_x = u_x \cdot \Delta \left(\frac{{}^1u_{x-1}}{u_{x-1}} \right) \\ {}^1\overset{1}{u}_x = u_x \cdot \Delta \left(\frac{{}^2u_{x-1}}{u_{x-1}} \right) \\ {}^2\overset{1}{u}_x = u_x \cdot \Delta \left(\frac{{}^3u_{x-1}}{u_{x-1}} \right) \\ \quad \&c. \end{array}\right\} \cdot \left\{\begin{array}{l} \overset{2}{u}_x = \overset{1}{u}_x \cdot \Delta \left(\frac{{}^1\overset{1}{u}_{x-1}}{\overset{1}{u}_{x-1}} \right) \\ {}^1\overset{2}{u}_x = \overset{1}{u}_x \cdot \Delta \left(\frac{{}^2\overset{1}{u}_{x-1}}{\overset{1}{u}_{x-1}} \right) \\ {}^2u_x = \overset{1}{u}_x \cdot \Delta \left(\frac{{}^3\overset{1}{u}_{x-1}}{\overset{1}{u}_{x-1}} \right) \\ \quad \&c. \end{array}\right\} \cdot \left\{\begin{array}{l} \overset{3}{u}_x = \overset{2}{u}_x \cdot \Delta \left(\frac{{}^1\overset{2}{u}_{x-1}}{\overset{2}{u}_{x-1}} \right) \\ \quad \&c. \end{array}\right.$$

jusqu'à ce que l'on parvienne à former $\overset{n-1}{u}_x$, soit $\overset{n-1}{u}_x = {}^{n-1}z_x$; si dans l'expression de ${}^{n-1}z_x$, on change ${}^{n-1}u_x$ en ${}^{n-2}u_x$, & ${}^{n-2}u_x$ en ${}^{n-1}u_x$, on formera ${}^{n-2}z_x$, si dans la même expression de ${}^{n-1}z_x$ on change ${}^{n-1}u_x$ en ${}^{n-3}u_x$, & réciproquement ${}^{n-3}u_x$ en ${}^{n-1}u_x$, on formera ${}^{n-3}z_x$ & ainsi de suite; l'intégrale complète de l'équation

$$y_x = H_x \cdot y_{x-1} + {}^1H_x \cdot y_{x-2} \cdots + {}^{n-1}H_x \cdot y_{x-n} + X_x \; (B),$$

fera

$$\left.\begin{array}{l} y_x = u_x.[A + \Sigma.\frac{X_{x+1}}{z_{x+1}}] \\ + {}^1u_x.[{}^1A + \Sigma.\frac{X_{x+1}}{{}^1z_{x+1}}] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + {}^{n-1}u_x.[{}^{n-1}A + \Sigma.\frac{X_{x+1}}{{}^{n-1}z_{x+1}}] \end{array}\right\} (\Pi)$$

VIII.

Je reprends maintenant les équations (>) de l'article précedent; elles donnent

$${}^{n-1}A + \Sigma.\frac{X_{x+2}}{{}^{n-1}z_{x+2}} = \gamma_{x+1}.y_{x+1}\ldots + {}^{n-1}\gamma_{x+1}y_{x-n+2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A + \Sigma.\frac{X_{x+2}}{z_{x+2}} = \frac{\gamma_{x+1}}{n-1}.y_{x+1}\ldots + \frac{{}^{n-1}\gamma_{x+1}}{n-1}y_{x-n+2}$$

si l'on multiplie la première par ${}^{n-1}u_x$, la seconde par ${}^{n-2}u_x$, &c. on aura en les ajoutant ensemble, une équation de cette forme.

$$\lambda_x.y_{x+1} + {}^1\lambda_x.y_{x+2}\ldots + {}^{n-1}\lambda_x.y_{x-n+2} = A'u_x + {}^1A.{}^1u_x\ldots + {}^{n-1}A.{}^{n-1}u_x$$

donc

$$\lambda_x.y_{x+1} + {}^1\lambda_x.y_{x+2}\ldots + {}^{n-1}\lambda_x.y_{x-n+2} = y_x,$$

équation qui doit être identique; partant

$$\begin{array}{l} y_x = u_x[A + \Sigma\frac{X_{x+2}}{z_{x+2}}] \\ + {}^1u_x[{}^1A + \Sigma.\frac{X_{x+2}}{{}^1z_{x+2}}]; \\ + \&c. \end{array}$$

On trouvera pareillement

$$\begin{array}{l} y_x = u_x[A + \Sigma.\frac{X_{x+3}}{z_{x+3}}], \\ + {}^1u_x[{}^1A + \Sigma.\frac{X_{x+3}}{{}^1z_{x+3}}], \\ + \&c. \end{array}$$

& ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à cette dernière équation inclusivement,

$$y_x = u_x [A + \Sigma . \frac{X_{x+n}}{z_{x+n}}],$$
$$+ {}'u_x [{}'A + \Sigma . \frac{X_{x+n}}{{}'z_{x+n}}],$$
$$+ \&c.$$

Toutes ces équations étant l'intégrale complète de l'équation *(B)* sont identiquement les mêmes, en les comparant ensemble on formera les équations suivantes

$$\frac{u_x}{z_{x+1}} + \frac{{}'u_x}{{}'z_{x+1}} + \&c. \ldots + \frac{{}^{n-1}u_x}{{}^{n-1}z_{x+1}} = 0$$
$$\frac{u_x}{z_{x+2}} + \frac{{}'u_x}{{}'z_{x+2}} + \&c. \ldots + \frac{{}^{n-1}u_x}{{}^{n-1}z_{x+2}} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{u_x}{z_{x+n-1}} + \frac{{}'u_x}{{}'z_{x+n-1}} + \&c. \ldots + \frac{{}^{n-1}u_x}{{}^{n-1}z_{x+n-1}} = 0.$$

IX.

L'intégration de l'équation *(B)* du Problème II étant réduite à l'intégration de cette même équation lorsque $X_x = 0$, il ne s'agit plus pour résoudre le Problème, que d'intégrer celle-ci ; mais cela paroît très-difficile en général ; ainsi je me bornerai aux cas particuliers, En voici un fort étendu, dans lequel l'intégration réussit, & qui embrasse tous les cas déjà connus ; c'est celui dans lequel on a

$$y_x = C . \varphi_x . y_{x-1} + {}'C . \varphi_x . \varphi_{x-1} . y_{x-2} \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ {}^{n-1}C . \varphi_x . \varphi_{x-1} \ldots\ldots\ldots . \varphi_{x-n+1} . y_{x-n} \quad (B'),$$

si $\varphi_x = 1$, on aura l'équation des suites récurrentes.

L'équation *(E)* de l'*article IV* devient dans ce cas

$$0 = 1 - \frac{C . \varphi_x}{\alpha_x} - \frac{{}_{1}C . \varphi_x . \varphi_{x-1}}{\alpha_x . \alpha_{x-1}} \ldots - \frac{{}^{n-1}C . \varphi_x \ldots \varphi_{x-n+1}}{\alpha_x \ldots \alpha_{x-n+1}} \quad (E').$$

Or *(article VI)*, il suffit, pour intégrer l'équation *(B')* de connoître un nombre n de valeurs pour α_x dans l'équation *(E')*. Soit donc $\alpha_x = a . \varphi_x$, a étant constant, & l'équation

l'équation (E') donnera

$$a^n = C.a^{n-1} + {}^1C.a^{n-2} + {}^2C.a^{n-3} \ldots + {}^{n-1}C; \quad (h)$$

d'où l'on aura un nombre n de valeurs pour a, & par conséquent pour α_x, puisque $\alpha_x = a.\varphi_x$.

Soient p, ${}^1p$, ${}^2p \ldots\ldots {}^{n-1}p$, les différentes valeurs de a, dans l'équation (h). On aura *(article IV)*,

$$\delta_x = p.\varphi_x, \quad {}^1\delta_x = {}^1p.\varphi_x, \quad {}^2\delta_x = {}^2p.\varphi_x, \text{ \&c.}$$

Or, on a *(article V)*,

$$u_x = \nabla.\delta_x = \varphi_1.\varphi_2.\varphi_3 \ldots\ldots\ldots \varphi_x.p^x$$

$${}^1u_x = \nabla.{}^1\delta_x = \varphi_1.\varphi_2.\varphi_3 \ldots\ldots\ldots \varphi_x.{}^1p^x, \text{ \&c.}$$

L'intégrale complète de l'équation (B') est donc

$$y_x = \varphi_1.\varphi_2.\varphi_3 \ldots \varphi_x.[A.p^x + {}^1A.{}^1p^x \ldots + {}^{n-1}A.{}^{n-1}p^x].$$

On déterminera les constantes arbitraires, A, ${}^1A$, ${}^2A$, &c. au moyen de n, valeurs de y_x, dans autant de suppositions particulières pour x. Soit

$$y_1 = M; \quad y_2 = {}^1M; \quad y_3 = {}^3M \ldots \text{ \&c.} \quad y_n = {}^{n-1}M,$$

& l'on aura

$$\frac{M}{\varphi_1} = A.p + {}^1A.{}^1p + {}^2A.{}^2p \ldots + {}^{n-1}A.{}^{n-1}p,$$

$$\frac{{}^1M}{\varphi_1.\varphi_2} = A.p^2 + {}^1A.{}^1p^2 + {}^2A.{}^2p^2 \ldots + {}^{n-1}A.{}^{n-1}p^2,$$

$$\frac{{}^2M}{\varphi_1.\varphi_2.\varphi_3} = A.p^3 + {}^1A.{}^1p^3 + {}^2A.{}^2p^3 \ldots + {}^{n-1}A.{}^{n-1}p^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{{}^{n-1}M}{\varphi_1.\varphi_2 \ldots \varphi_n} = A.p^n + {}^1A.{}^1p^n + {}^2A.{}^2p^n \ldots + {}^{n-1}A.{}^{n-1}p^n.$$

pour résoudre ces équations, on peut faire usage des méthodes ordinaires d'élimination; mais en voici une qui me paroît plus simple.

Je multiplie la première équation par ${}^{n-1}p$, & je la retranche de la seconde; je multiplie pareillement la seconde, par ${}^{n-1}p$, & je la retranche de la troisième, & ainsi de suite, ce qui produit les équations suivantes:

$$\frac{{}^1M}{\varphi_1 . \varphi_2} - \frac{M}{\varphi_1} . {}^{n-1}p = A p\,(p - {}^{n-1}p) + {}^1A . {}^1p\,({}^1p - {}^{n-1}p) \ldots + {}^{n-2}A . {}^{n-2}p({}^{n-2}p - {}^{n-1}p)$$

$$\frac{{}^2M}{\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3} - \frac{{}^1M}{\varphi_1 . \varphi_2} . {}^{n-1}p = A . p^2(p - {}^{n-1}p) + {}^1A . {}^1p^2({}^1p - {}^{n-1}p) \ldots + {}^{n-2}A . {}^{n-2}p^2({}^{n-2}p - {}^{n-1}p)$$

. . . .

$$\frac{{}^{n-1}M}{\varphi_1 \ldots \varphi_n} - \frac{{}^{n-2}M}{\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}} . {}^{n-1}p = A . p^{n-1}(p - {}^{n-1}p) \ldots \ldots \ldots \ldots + {}^{n-2}A . {}^{n-2}p^{n-1}({}^{n-2}p - {}^{n-1}p).$$

Je multiplie encore la première de ces équations par ${}^{n-2}p$, & je la retranche de la seconde; je multiplie pareillement la feconde, par ${}^{n-2}p$, & je la retranche de la troisième, ce qui donne

$$\frac{{}^2M}{\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3} - \frac{{}^1M}{\varphi_1 . \varphi_2}({}^{n-1}p + {}^{n-2}p) + \frac{M}{\varphi_1} . {}^{n-1}p . {}^{n-2}p = A . p(p - {}^{n-1}p)(p - {}^{n-2}p) + {}^1A . {}^1p({}^1p - {}^{n-1}p)({}^1p - {}^{n-2}p) + \&c. + {}^{n-3}A . {}^{n-3}p({}^{n-3}p - {}^{n-1}p)({}^{n-3}p - {}^{n-2}p)$$

$$\frac{{}^3M}{\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 . \varphi_4} - \frac{{}^2M}{\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3} . ({}^{n-1}p + {}^{n-2}p) + \frac{{}^1M}{\varphi_1 . \varphi_2}\, {}^{n-1}p . {}^{n-2}p = Ap^2(p - {}^{n-1}p)(p - {}^{n-2}p) + \&c. + {}^{n-3}A . {}^{n-3}p^2({}^{n-3}p - {}^{n-1}p)({}^{n-3}p - {}^{n-2}p)$$

&c.

en opérant fur ces dernières équations, comme fur les précédentes, on aura

$$\frac{{}^3M}{\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 . \varphi_4} - \frac{{}^2M}{\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3}({}^{n-1}p + {}^{n-2}p + {}^{n-3}p) + \frac{{}^1M}{\varphi_1 . \varphi_2} . [({}^{n-2}p + {}^{n-1}p) . {}^{n-3}p + {}^{n-1}p . {}^{n-2}p] - \frac{M}{\varphi_1} . {}^{n-1}p . {}^{n-2}p . {}^{n-3}p = Ap . (p - {}^{n-1}p)(p - {}^{n-2}p)(p - {}^{n-3}p) + \&c.$$

& ainfi de fuite.

De-là il eft aifé de conclure que fi l'on nomme f la fomme des quantités ${}^1p$, ${}^2p$, ${}^3p \ldots\ldots {}^{n-1}p$.

h, la ſomme de leurs produits deux à deux.

i, la ſomme de leurs produits trois à trois.

q, la ſomme de leurs produits quatre à quatre, &c.

${}^{1}f$, la ſomme des quantités p, ${}^{2}p$, ${}^{3}p$ . . . . . ${}^{n-1}p$.

${}^{1}h$, la ſomme de leurs produits deux à deux.

${}^{1}i$, la ſomme de leurs produits trois à trois, &c.

& ainſi de ſuite on aura

$$A = \frac{{}^{n-1}M - \varphi_n . f . {}^{n-2}M + \varphi_n . \varphi_{n-1} . h . {}^{n-3}M - \varphi_n . \varphi_{n-1} . \varphi_{n-2} . i . {}^{n-4}M + \&c.}{\varphi_1 . \varphi_2 . 3 \dots \dots \varphi_n . p (p - {}^{1}p) . (p - {}^{2}p) . (p - {}^{3}p) . \&c.}$$

$${}^{1}A = \frac{{}^{n-1}M - \varphi_n . {}^{1}f . {}^{n-2}M + \varphi_n . \varphi_{n-1} {}^{1}h . {}^{n-3}M - \&c.}{\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 \dots \dots \varphi_n . {}^{1}p ({}^{1}p - p) ({}^{1}p - {}^{2}p) ({}^{1}p - {}^{3}p) . \&c.}$$

&c.

on peut déterminer d'une manière fort ſimple les quantités $f, h, i, q, {}^{1}f, {}^{1}h, {}^{1}i, {}^{1}q$, &c. je reprends pour cela l'équation

$a^n - C . a^{n-1} - {}^{1}C . a^{n-2} - \&c. \dots - {}^{n-1}C = 0$, (h);

je la diviſe par $a - p$, & l'équation réſultante ſera

$a^{n-1} + f . a^{n-2} + h . a^{n-3} + i . a^{n-4} + q . a^{n-5} + \&c. = 0.$

je multiplie cette réſultante par $a - p$, & j'aurai l'équation ſuivante.

$a^n + (p + f) . a^{n-1} + (pf + h) a^{n-2} + (ph + i) a^{n-3} + \&c. = 0$;

je la compare avec l'équation (h), & j'en conclus

$$f = - C - p$$
$$h = - {}^{1}C - pf$$
$$i = - {}^{2}C - ph$$

&c.

& par conſéquent ${}^{1}f = - C - {}^{1}p$

$${}^{1}h = - {}^{1}C - {}^{1}p {}^{1}f$$

&c.

J'ai ſuppoſé juſqu'ici que toutes les racines de l'équation (h) ſont inégales, mais il peut arriver qu'une ou pluſieurs de ces racines ſoient égales entr'elles; voici dans ce cas la méthode qu'il faut ſuivre.

Je suppose que l'on ait $p = {}'p$; on fera $'p = p + dp$, & l'équation

$$y_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots . \varphi_x . [A . p^x + {}'A . {}'p^x + {}^2A . {}^2p^x \ldots . + {}^{n-1}A . {}^{n-1}p^x]$$

donnera en réduisant $(p + dp)^x$ en séries;

$$y_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x \left\{ \begin{array}{l} p^x [A + {}'A(1 + \frac{x\,dp}{p} + \frac{x.x-1}{1.2} . \frac{dp^2}{p^2} + \&c.)] \\ + {}^2A . {}^2p^x + \&c. \end{array} \right\}$$

soit $A + {}'A = B$, & ${}'A . \frac{dp}{p} = D$, B & D étant des constantes arbitraires & finies, $'A$ sera donc infiniment grand de l'ordre $\frac{1}{dp}$; ${}'A . \frac{dp^2}{p^2}$, ${}'A . \frac{dp^3}{p^3}$, &c. seront infiniment petits. Partant

$$y_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x [p^x(B + Dx) + {}^2A . {}^2p^x + {}^3A . {}^3p^x + \&c.]$$

si de plus on a $p = {}^2p$, on fera dans cette expression de y_x ${}^2p = p + dp$; & l'on aura $y_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \ldots \ldots \varphi_x$

$$\left\{ \begin{array}{l} p^x [B + {}^2A + (D + {}^2A . \frac{dp}{p})x + {}^2A . \frac{dp^2}{p^2} . \frac{x.x-1}{1.2} + \&c.] \\ + {}^3A . {}^3p^x + \&c. \end{array} \right\}$$

Soit ${}^2A + B = {}'B$, $D + {}^2A . \frac{dp}{p} = {}'D$; & ${}^2A . \frac{dp^2}{p^2} = {}'E$; ${}'B$, ${}'D$ & ${}'E$ étant des constantes arbitraires & finies, on aura

$$y_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x [p^x({}'B + {}'Dx + {}'E . \frac{x.(x-1)}{1.2}) + {}^3A . {}^3p^x + \&c.]$$

si de plus on avoit $p = {}^3p$, on auroit

$$y_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x \left\{ \begin{array}{l} p^x({}^2B + {}^2D.x + {}^2E . \frac{x.(x-1)}{1.2} + {}^2F . \frac{x.(x-1).(x-2)}{1.2.3}) \\ + {}^4A . {}^4p^x + \&c. \end{array} \right\}$$

& ainsi de suite; on détermineroit les constantes arbitraires, au moyen de n, valeurs particulières de y_x.

Si l'équation (h) a deux racines imaginaires, p & $'p$, on

fera $p = a + b\sqrt{-1}$, & $'p = a - b\sqrt{-1}$.

Soit $\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}} = \text{cof.}\, q$, & $\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}} = \text{fin.}\, q$, on aura

$$'A.p^x + 'A.'p^x = (aa+bb)^{\frac{x}{2}}.[A.(\text{cof.}\, q + \sqrt{-1}.\text{fin.}\, q)^x$$

$$+ 'A.(\text{cof.}\, q - \sqrt{-1}.\text{fin.}\, q)^x] = (aa+bb)^{\frac{x}{2}}$$

$$[(A + 'A).\text{cof.}\, qx + (A - 'A\sqrt{-1}).\text{fin.}\, qx],$$

parce que

$$(\text{cof.}\, q \pm \sqrt{-1}.\text{fin.}\, q)^x = \text{cof.}\, qx \pm \sqrt{-1}.\text{fin.}\, qx.$$

Soit $A + 'A = B$, & $(A - 'A)\sqrt{-1} = 'B$, B & $'B$ étant réels, on aura

$$'Ap^x + 'A.'p^x = (aa+bb)^{\frac{x}{2}}(B.\text{cof.}\, qx + 'B.\text{fin.}\, qx)$$

on aura donc alors

$$y^x = \varphi_1.\varphi_2 \ldots \varphi_x[(aa+bb)^{\frac{x}{2}}(B.\text{cof.}\, qx + 'B.\text{fin.}\, qx) + {}^2A.{}^2p^x + \&c.];$$

ce feroit le même procédé, s'il y avoit un plus grand nombre d'imaginaires.

Si l'on fuppofe, dans les calculs précédens, $\varphi_x = 1$, on aura le cas des fuites récurrentes. De-là réfulte ce théorème.

Si l'on nomme Y_x le terme général d'une fuite récurrente, telle que l'on ait

$$Y_x = C.Y_{x-1} + 'C.Y_{x-2} \ldots \ldots + {}^{n-1}C.Y_{x-n},$$

le terme général d'une fuite telle que l'on ait

$$y = C.\varphi_x.y_{x-1} + 'C.\varphi_x.\varphi_{x-1}.y_{x-2} \ldots + {}^{n-1}C.\varphi_x \ldots \varphi_{x-n+1}.y_{x-n},$$

& dans laquelle les conftantes arbitraires qui viennent en intégrant font les mêmes que dans la précédente fera

$$y_x = \varphi_1.\varphi_2 \ldots \ldots \varphi_x.Y_x;$$

c'eft ce dont il eft facile de s'affurer d'ailleurs, car fi l'on fubftitue cette valeur de y_x dans l'équation

$$y_x = C.\varphi_x.y_{x-1} + \&c.$$

On aura

$$\varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . Y_x = C . \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . Y_x + \&c.$$

partant

$$Y_x = C . Y_{x-1} + {}'C . Y_{x-2} + \&c.$$

équation qui a lieu par la ſuppoſition.

X.

Lorſqu'on a, par l'*article précédent*, l'intégrale de l'équation

$$y_x = C . \varphi_x . y_{x-1} + {}^1C . \varphi_x . \varphi_{x-1} . y_{x-2} \ldots\ldots\ldots + {}^{n-1}C . \varphi_x \ldots \varphi_{x-n+1} . y_{x-n} + X_x$$

en y ſuppoſant $X_x = 0$, il eſt facile de conclure cette même intégrale, X_x étant quelconque. Pour cela j'obſerve que puiſque X_x, étant nul, on a

$$y_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . [Ap^x + {}^1A . {}^1p^x \ldots + {}^{n-1}A . {}^{n-1}p^x],$$

on aura, par l'*article V,*

$$u_x = \varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 \ldots \varphi_x . p^x$$

$${}^1u_x = \varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 \ldots \varphi_x . {}^1p^x$$

$${}^2u_x = \varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 \ldots \varphi_x . {}^2p^x$$

&c.

d'où l'on conclura, par l'*article VII,*

$$\overset{1}{u}_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . p_x \Delta\left(\frac{{}^1p^{x-1}}{p^{x-1}}\right) = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . ({}^1p - p) . {}^1p^{x-1}$$

$${}^1\overset{1}{u}_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . ({}^2p - p) . {}^2p^{x-1}$$

$${}^2\overset{1}{u}_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . ({}^3p - p) . {}^3p^{x-1}$$

&c.

$$\overset{2}{u}_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . ({}^2p - p) . ({}^2p - {}^1p)^2 p^{x-2}$$

$${}^1\overset{2}{u}_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . ({}^3p - p) . ({}^3p - {}^1p) . {}^3p^{x-2}$$

&c.

$$ {}^{,}u_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x \ ({}^{,}p - p)\ ({}^{,}p - {}^{1}p)\ ({}^{,}p - {}^{2}p) . {}^{3}p^{x-3} $$
&c.

& ainſi de ſuite, partant

$$ {}^{n-1}u_{x+1} = {}^{n-1}z_{x+1} = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_{x+1} ({}^{n-1}p - p)({}^{n-1}p - {}^{1}p)({}^{n-1}p - {}^{2}p) \text{ \&c.. } {}^{n-1}p^{x-n+2}; $$

pareillement

$$ {}^{n-2}z_{x+1} = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_{x+1} . ({}^{n-2}p - p)({}^{n-2}p - {}^{1}p) \text{ \&c... } {}^{n-2}p^{x-n+2}, $$
&c.

d'où l'on conclura en ſubſtituant ces valeurs dans la formule (Π) de l'*article VII*, & faiſant pour abréger

$$ {}^{\prime}X_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \ldots \varphi_x . X_x, $$

$$ y_x = \frac{\varphi_1 . \varphi_2 \ldots \ldots \varphi_x}{(p - {}^{1}p)\ (p - {}^{2}p)\ (p - {}^{3}p) . \&c.} . p^{x+n-1} \left[G + \Sigma . \frac{{}^{\prime}X_{x+1}}{p^{x+1}}\right] $$
$$ + \frac{\varphi_1 . \varphi_2 \ldots \ldots \varphi_x}{({}^{1}p - p)\ ({}^{1}p - {}^{2}p) . \&c.} . {}^{1}p^{x+n-1} \left[{}^{1}G + \Sigma . \frac{{}^{\prime}X_{x+1}}{{}^{1}p^{x+1}}\right] $$
$$ + \&c. $$

ſi $p = {}^{1}p$, on fera ${}^{1}p = p + dp$. Soit $K = \frac{1}{(p - {}^{2}p)\ (p - {}^{3}p) . \&c.}$ & l'on aura

$$ y_x = \varphi_1 . \varphi_2 . . \varphi_x . p^{x+1n-1} \left\{ \begin{array}{l} B + Dx - \frac{K}{p} . \Sigma . \frac{{}^{\prime}X_{x+1} x + 1}{p^{x+1}} \\ + \left(\frac{dK}{dp} + \frac{K}{p} . \overline{x + n - 1}\right) \Sigma . \frac{{}^{\prime}X_{x+1}}{p^{x+1}} \end{array} \right\} $$
$$ \frac{+ \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \ldots \varphi_x . {}^{2}p^{x+n-1}}{({}^{2}p - p)^2 . ({}^{2}p - {}^{3}p) . \&c.} \left[{}^{2}G + \Sigma . \frac{{}^{\prime}X_{x+1}}{{}^{2}p^{x+1}}\right] $$

B & *D* étant deux conſtantes arbitraires.

Si de plus on a $p = {}^{2}p$, on fera dans cette dernière expreſſion de y_x, ${}^{2}p = p + dp$, & ainſi de ſuite.

On peut donc intégrer généralement toutes les équations différentielles compriſes dans la forme ſuivante.

$$ y_x = C . \varphi_x . y_{x-1} + {}^{\prime}C . \varphi_x . \varphi_{x-1} . y_{x-2} + \&c. + X_x; $$

d'où il réſulte que ſi l'on déſigne par θ_x une fonction

quelconque de x, l'équation ſuivante

$$\theta_x \cdot y_x = C \cdot \theta_{x-1} \cdot \varphi_x \cdot y_{x-1} + 'C \cdot \theta_{x-2} \, \varphi_x \cdot \varphi_{x-1} \cdot y_{x-2} + \&c. + X_x$$

eſt généralement intégrable, puiſqu'en faiſant $\theta_x \cdot y_x = t_x$, cette équation eſt de même forme que la précédente.

XI.

Voici maintenant une autre eſpèce d'équations différentielles linéaires, dont l'ordre dépend de la variable x; ſoit, par exemple,

$$\begin{aligned} y_x = {} & a_{x-1} \cdot y_{x-1} + b_{x-2} \cdot y_{x-2} + f_{x-3} \cdot y_{x-3} + X_x \\ & + a_{x-4} \cdot y_{x-4} + b_{x-5} \cdot y_{x-5} + f_{x-6} \cdot y_{x-6} \\ & + a_{x-7} \cdot y_{x-7} + b_{x-8} \cdot y_{x-8} + \&c. \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_3 \cdot y_3 + b_2 \cdot y_2 + f_1 \cdot y_1 \end{aligned}$$

Il eſt facile de ramener ces équations à la forme de l'équation *(B)* du problème II; car on a

$$\begin{aligned} y_{x-3} = {} & a_{x-4} \cdot y_{x-4} + b_{x-5} \cdot y_{x-5} + f_{x-6} \cdot y_{x-6} + X_{x-3} \\ & + a_{x-7} \cdot y_{x-7} + b_{x-8} \cdot y_{x-8} + \&c. \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_3 \cdot y_3 + b_2 \cdot y_2 + f_1 \cdot y_1 ; \end{aligned}$$

Si l'on retranche cette dernière équation de la précédente, on aura

$$y_x = a_{x-1} \cdot y_{x-1} + b_{x-2} \cdot y_{x-2} + (f_{x-3} + 1) \cdot y_{x-3} + X_x - X_{x-3}$$

équation compriſe dans l'équation *(B)*.

XII.

Préſentement voici un uſage fort étendu du calcul intégral aux différences finies, pour déterminer directement l'expreſſion générale des quantités aſſujetties à une certaine loi qui ſert à les former, expreſſion que juſqu'ici il me ſemble que l'on a toujours cherché à tirer par voie d'induction, méthode non-ſeulement indirecte, mais qui de plus doit être ſouvent en défaut.

Pour

Pour me faire mieux entendre, je prends l'exemple ſuivant.

Soit x le ſinus d'un angle z, & u ſon coſinus; on a généralement, comme l'on ſait

$$\text{ſin.}\, nz = 2u\,.\,\text{ſin.}(n-1)z - \text{ſin.}(n-2)z,$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
\text{ſin.}\; z &= x, \\
\text{ſin.}\, 2z &= x(2u), \\
\text{ſin.}\, 3z &= x(4u^2 - 1), \\
\text{ſin.}\, 4z &= x(8u^3 - 4u), \\
\text{ſin.}\, 5z &= x(16u^4 - 12u^2 + 1), \\
&\&c.
\end{aligned}$$

Il faut maintenant déterminer l'expreſſion générale de ſin. nz.

On peut y parvenir par voie d'induction, en continuant plus loin ces expreſſions & cherchant à découvrir la loi des différens coëfficiens des puiſſances de u; mais il arrivera, ſi ce n'eſt pas dans cet exemple, au moins dans une infinité d'autres, que cette loi ſera très-compliquée & très-difficile à ſaiſir: il importe conſéquemment d'avoir une méthode générale & ſûre pour la trouver dans tous les cas poſſibles.

Soit pour cela l'équation différentielle

$$\begin{aligned}
y_n = {} & y_{n-1}\,.\,[a_n\,.\,u + b_n], \\
& + y_{n-2}\,.\,[{}^1a_n\,.\,u^2 + {}^1b_n\,.\,u + {}^1c_n], \qquad (\nabla) \\
& + y_{n-3}\,.\,[{}^2a_n\,.\,u^3 + {}^2b_n\,.\,u^2 + {}^2c_n + {}^2f_n], \\
& + \&c.
\end{aligned}$$

Je ſuppoſe que l'on ait

$$\begin{aligned}
y_1 &= \alpha u + \beta, \\
y_2 &= \delta u^2 + \gamma u + \Omega, \\
y_3 &= \varpi\,.\,u^3 + \pi\,.\,u^2 + \theta u + \sigma, \ \&c.
\end{aligned}$$

Voici comme je conclus l'expreſſion générale de y_n.

Je fais

$$y_n = A_n . u^n + B_n . u^{n-1} + C_n . u^{n-2} + \&c.$$

Partant

$$y_{n-1} = A_{n-1} . u^{n-1} + B_{n-1} . u^{n-2} + C_{n-1} . u^{n-3} + \&c.$$
$$y_{n-2} = A_{n-2} . u^{n-2} + B_{n-2} . u^{n-3} + C_{n-2} . u^{n-4} + \&c.$$

& ainſi de ſuite; ſi l'on ſubſtitue ces valeurs de y_{n-1}, y_{n-2}, &c. dans l'équation (∇), on aura

$$\begin{aligned} y_n = u^n . [& a_n . A_{n-1} + {}'a_n . A_{n-2} + {}^2a_n . A_{n-3} + \&c.] \\ + u^{n-1} . \Big\{ & \begin{array}{l} a_n . B_{n-1} + {}'a_n . B_{n-2} + {}^2a_n . B_{n-3} + \&c. \\ + b_n . A_{n-1} + {}'b_n . A_{n-2} + {}^2b_n . A_{n-3} + \&c. \end{array} \Big\} \\ + u^{n-2} . \Big\{ & \begin{array}{l} a_n . C_{n-1} + {}'a_n . C_{n-2} + {}^2a_n . C_{n-3} + \&c. \\ + b_n . B_{n-1} + {}'b_n . B_{n-2} + {}^2b_n . B_{n-3} + \&c. \\ + {}'c_n . A_{n-2} + {}^2c_n . A_{n-3} + {}^2c_n . A_{n-4} + \&c. \end{array} \Big\} \\ + \&c. \end{aligned}$$

En comparant cette expreſſion de y_n avec la précédente, on aura les équations ſuivantes

$$\begin{aligned} A_n &= a_n . A_{n-1} + {}'a_n . A_{n-2} + {}^2a_n . A_{n-3} + \&c. \\ B_n &= a_n . B_{n-1} + {}'a_n . B_{n-2} + {}^2a_n . B_{n-3} + \&c. \\ &\quad + b_n . A_{n-1} + {}'b_n . A_{n-2} + {}^2b_n . A_{n-3} + \&c. \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

au moyen deſquelles on déterminera par les méthodes précédentes A_n, B_n, &c. & l'on aura ainſi l'expreſſion générale de y_n.

Je ſuppoſe que l'on veuille avoir l'expreſſion générale de ſin. nz, il eſt aiſé de voir, par ce qui précède, qu'elle aura cette forme.

$$\text{ſin. } nz = x [A_n . u^{n-1} + B_n . u^{n-3} + C_n . u^{n-5} + D_n . u^{n-7} + \&c.]$$

donc,

$$\text{ſin. } (n-1)z = x [A_{n-1} . u^{n-2} + B_{n-1} . u^{n-4} + C_{n-1} . u^{n-6} + \&c.]$$
$$\text{ſin. } (n-2)z = x [A_{n-2} . u^{n-3} + B_{n-2} . u^{n-5} + C_{n-2} . u^{n-7} + \&c.]$$

Si l'on ſubſtitue ces valeurs de ſin. $(n - 1)z$, & ſin. $(n - 2)z$ dans l'équation

$$\text{ſin.}\, nz = 2u \,.\, \text{ſin.}\,(n - 1)z - \text{ſin.}\,(n - 2)z,$$

on aura

$$\text{ſin.}\, nz = x \,.\left\{\begin{matrix} 2A_{n-1}\,.\,u^{n-1} + 2B_{n-1}\,.\,u^{n-3} + 2C_{n-1}\,.\,u^{n-5} + \&c. \\ - A_{n-2}\,.\,u^{n-3} - B_{n-2}\,.\,u^{n-5} \end{matrix}\right\}$$

& ſi l'on compare cette expreſſion avec la précédente, on aura

$$\begin{aligned} A_n &= 2\,.\,A_{n-1} \\ B_n &= 2\,.\,B_{n-1} - A_{n-2} \quad (\text{A}) \\ C_n &= 2\,.\,C_{n-1} - B_{n-2} \\ \&c. \end{aligned}$$

Au moyen de ces équations on déterminera A_n, B_n, C_n, &c. mais on doit faire ici une obſervation à laquelle il eſt néceſſaire de faire attention dans toutes les recherches qui dépendent du calcul intégral aux différences finies ; ce qui rend ſon uſage fort délicat. Cette obſervation conſiſte en ce que les équations précédentes (A), ne commencent point à exiſter toutes à la fois, c'eſt-à-dire, lorſque n a une même valeur dans ces équations. Pour le faire voir, j'obſerve que l'équation fondamentale ſin. $nz = 2u$. ſin. $(n - 1)z$ — ſin. $(n - 2)z$, au moyen de laquelle j'ai conclu ſin. $2z$, ſin. $3z$, ſin. $4z$, &c. ſuppoſe connus les deux premiers ſinus, ſin. $0.z$ & ſin. $1.z$; elle ne peut donc commencer à avoir lieu que lorſque $n = 2$; partant auſſi, les équations (A) ne peuvent commencer à exiſter que lorſque $n = 2$. La première de ces équations commence à exiſter lorſque $n = 2$, auquel cas on a $A_2 = 2A_1$; ainſi, le plus petit indice de A_n, c'eſt-à-dire, la moindre valeur que puiſſe avoir n dans cette expreſſion, eſt l'unité ; la ſeconde équation ne peut donc commencer à avoir lieu que lorſque $n = 3$; auquel cas on a $B_3 = 2B_2 - A_1$, partant le plus petit indice de B_n eſt 2 ; la troiſième équation ne peut donc commencer à avoir lieu que lorſque $n = 4$, auquel cas on a $C_4 = 2C_3 - B_2$;

partant, le plus petit indice de C_n eſt 3, & ainſi de ſuite. Cela poſé :

Si l'on intègre la première équation, on aura $A_n = 2^n . H$, H étant arbitraire; or, poſant $n = 1$, $A_n = 1$; donc, $H = \frac{1}{2}$ & $A_n = 2^{n-1}$, partant $A_{n-1} = 2^{n-3}$. Si l'on ſubſtitue cette valeur de A_{n-1} dans la ſeconde équation, & qu'enſuite on l'intègre, on aura $B_n = -2^{n-3}(n + H)$, puiſque l'équation différentielle en B_n commence à exiſter lorſque $n = 3$, la conſtante arbitraire H doit être déterminée par la valeur de B_n, lorſque $n = 2$; or, u ne pouvant avoir d'expoſant négatif dans l'expreſſion de ſin. nz, il ſuit que $B_2 = 0$; partant $H = -2$; donc, $B_n = -2^{n-3}.(n-2)$, & $B_{n-2} = -2^{n-5}(n-4)$. Si l'on ſubſtitue cette valeur de B_{n-2} dans la troiſième équation, & qu'enſuite on l'intègre, on aura $C_n = 2^{n-5}\left(\frac{nn-7n}{2} + H\right)$; or poſant $n = 3$, $C_n = 0$, donc, $H = 6$ & $C_n = 2^{n-5} . \frac{(n-3).(n-4)}{1.2}$, & ainſi du reſte. Donc,

$$\text{ſin. } nz = x\left\{\begin{array}{l} 2^{n-1}.u^{n-1} - \frac{n-2}{1}.2^{n-3}.u^{n-3} + \frac{n-3.n-4}{1.2}.2^{n-5}.u^{n-5} \\ - \frac{(n-4).(n-5).(n-6)}{1.2.3}.2^{n-7}.u^{n-7} + \&c. \end{array}\right\}$$

Soit encore $z =$ ang. ſin. x, on aura en différentiant

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$$

& je veux avoir l'expreſſion générale de $\frac{d^n z}{dx^n}$, dx étant ſuppoſé conſtant. Pour cela ſoit $u = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, on aura

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{2x^2+1}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{6.x^3+9x}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

&c.

Il est aisé de voir en considérant la loi de ces expressions de du, d^2u, &c. que l'expression générale de $\frac{d^n u}{dx^n}$ a la forme suivante,

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{A_n . x^n + B_n . x^{n-2} + C_n . x^{n-4} + D_n . x^{n-6} + \&c.}{(1 - xx)^{n+\frac{1}{2}}}$$

en différentiant cette expression on a

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = \frac{\begin{matrix}(n+1)A_n . x^{n+1} + (n+3)B_n . x^{n-1} + (n+5).C_n . x^{n-3} + (n+7)D_n . x^{n-5} + \&c. \\ + n . A_n \quad + (n-2)\ B_n \quad + (n-4).C_n \quad + \&c.\end{matrix}}{(1 - xx)^{n+\frac{3}{2}}}$$

mais on a

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = \frac{A_{n+1} . x^{n+1} + B_{n+1} . x^{n-1} + C_{n+1} . x^{n-3} + D_{n+1} . x^{n-5} + \&c.}{(1 - xx)^{n+\frac{3}{2}}}$$

en comparant ces deux expressions de $\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}$, on aura les équations suivantes.

$$A_{n+1} = (n+1)\ A_n,$$
$$B_{n+1} = (n+3)\ B_n + n . A_n,$$
$$C_{n+1} = (n+5)\ C_n + (n-2)B_n,$$
&c.

Toutes ces équations commencent à exister à la fois, & lorsque $n = 1$; cela posé, la première donne

$$A_n = 1 . 2 . 3 \ldots\ldots n;$$

la seconde donne

$$B_n = 1.2.3.4.5.6\ldots n.(n+1).(n+2)\left[H + \Sigma . \frac{n}{(n+1).(n+2).(n+3)}\right],$$

ou

$$B_n = 1 . 2 . 3 \ldots n . (n+1) . (n+2) . \left[Q + \tfrac{1}{2} . \frac{1}{(n+1).(n+2)} - \frac{1}{n+2}\right].$$

On déterminera la constante Q, par cette condition que B_n soit zéro, lorsque $n = 1$, on a donc $Q = \frac{1}{2.3}$.

Donc, $B_n = 1.2.3\ldots n.\frac{1}{2}.\frac{n.(n-1)}{1.2}$.

La troiſième équation donne, en intégrant & ajoutant les conſtantes convenables,

$$C_n = 1\ 2.3\ldots n\frac{1.3}{2.4}.\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4};$$

on trouvera pareillement

$$D_n = 1.2.3\ldots n.\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5)}{1.2.3.4.5.6},$$

& ainſi de ſuite. Partant

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1-xx)^{n-\frac{1}{2}}}.\left\{\begin{array}{l} x^{n-1} + \frac{1}{2}.\frac{(n-1).(n-2)}{1.2}.x^{n-3} \\ + \frac{1.3}{2.4}.\frac{(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4}.x^{n-5} \\ + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5).(n-6)}{1.2.3.4.5.6}.x^{n-7} \\ + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{(n-1).(n-2)\ldots\ldots n-8}{1.2.3\ldots\ldots 8}.x^{n-9} \\ + \&c. \end{array}\right\}$$

J'ai ſuppoſé, dans les deux exemples précédens, la loi des expoſans connue, parce qu'elle étoit très-facile à apercevoir, mais s'il arrivoit qu'elle fût compliquée, ce qui doit être extrêmement rare; on pourra la déterminer par la méthode précédente.

XIII.

Voici encore un uſage remarquable du calcul intégral aux différences finies, pour déterminer la nature des fonctions d'après des conditions données, ce qui eſt ſouvent utile, principalement dans le calcul des différences partielles *(a)*.

(a) J'avois trouvé cette méthode ſur la fin de 1772, à l'occaſion de quelques Problèmes que me propoſa M. Monge, habile Profeſſeur de Mathématiques aux écoles du Génie à Mézières; je lui en fis part alors: dans le même temps je l'envoyai à M. de la Grange; & je l'ai préſentée à l'Académie au mois de Février 1773. Depuis ce temps, M. le Marquis de Condorcet a fait

On propose de trouver une fonction de x, telle qu'en y faisant successivement $x = \varphi(x)$ & $x = \psi(x)$, on ait

$$\text{fonct.}\,[\varphi(x)] = H_x \cdot \text{fonct.}\,[\psi(x)] + X_x \quad (\sigma),$$

$\varphi(x)$, $\psi(x)$, H_x & X_x étant des fonctions données de x.

Soit pour cela $u_z = \psi(x)$, & $u_{z+1} = \varphi(x)$. De la première de ces équations, je conclus $x = \Gamma(u_z)$, & $\varphi(x) = \Pi(u_z)$; $\Gamma(u_z)$ & $\Pi(u_z)$ représentant des fonctions connues de u_z. Partant, $u_{z+1} = \Pi(u_z)$, équation différentielle dont la différence constante est égale à l'unité, & que l'on peut intégrer dans plusieurs cas.

L'intégrale de cette équation donnera u_z en fonction de z, & l'équation $x = \Gamma(u_z)$ donnera x en fonction de z. Substituant cette valeur de x dans H_x & X_x, ces quantités deviendront des fonctions de z, que je désigne par L_z & Z_z. De plus, on a

fonct. $[\varphi(x)] =$ fonct. (u_{z+1}), & fonct. $[\psi(x)] =$ fonct. (u_z);

l'équation (σ) deviendra donc, en supposant fonct. $(u_z) = y_z$,

$$y_{z+1} = L_z \cdot y_z + Z_z,$$

équation intégrable par le Problème I.er

On doit observer ici, conformément à une remarque dûe à M. Euler, que les constantes qui viennent en intégrant les équations finies différentielles dont la variable est z, & dont la différence constante est l'unité, peuvent être supposées des fonctions quelconques de sin. $2\pi z$, & de cos. $2\pi z$, π exprimant le rapport de la circonférence au diamètre.

Présentement, si l'on remet dans l'expression de y_z au lieu de z sa valeur en x, on aura fonct. $[\psi(x)]$, & si l'on change $\psi(x)$ en x, on aura la fonction de x, qui satisfait au Problème. Les exemples suivans éclairciront cette méthode.

---

imprimer dans le volume de l'Académie pour l'année 1771, un fort beau Mémoire sur cet objet; mais la route que je suis diffère de la sienne en ce qu'il ne se propose pas, comme je le fais, de ramener la question aux équations différentielles dont la différence soit constante & égale à l'unité.

Il s'agit de trouver une fonction de x, telle qu'en y changeant successivement x en x^q & en mx, on ait fonct. (x^q) $=$ fonct. $(mx) + p$; m & p étant constans. Je fais $u_z = mx$, & $u_{z+1} = x^q$. Partant, $u_{z+1} = \left(\frac{u_z}{m}\right)^q$. Pour intégrer cette équation, je fais $u_1 = a$; donc, $u_2 = \frac{a^q}{m^q}$, $u_3 = \frac{a^{q^2}}{m^{q^2+q}}$, &c. Soit $u_z = \frac{a^{g_z}}{m^{f_z}}$; donc.......

$$u_{z+1} = \frac{a^{q \cdot g_z}}{m^{qf_z + q}} = \frac{a^{g_{z+1}}}{m^{f_{z+1}}}.$$ Donc, $g_{z+1} = q \cdot g_z$, ce qui donne $g_z = A \cdot q^z$. Or, posant $z = 2$, $g_z = q$. Donc, $A = \frac{1}{q}$, & $g_z = q^{z-1}$. De plus, on a $f_{z+1} = q \cdot f_z + q$. Donc, $f_z = A \cdot q^z + \frac{q}{1-q}$. Or, posant $z = 2$, $f_z = q$, donc, $A = \frac{1}{q-1}$, & $f_z = \frac{1}{q-1}$ $[q^z - q]$; donc, $u_z = \frac{a^{q^{z-1}}}{m^{\frac{1}{q-1}(q^z - q)}}$. Cette expression de u_z est complète, puisque a est arbitraire; maintenant l'équation fonct. (x^q) $=$ fonct. $(mx) + p$, deviendra $y_{z+1} = y_z + p$. Donc, $y_z = C + p \cdot z =$ fonct. (mx).

Il faut présentement avoir la valeur de z en x; or, puisqu'on a $u_z = mx$, on aura $mx = \frac{a^{q^{z-1}}}{m^{\frac{1}{q-1}(q^z - q)}}$, d'où l'on tire $l.mx = q^z . \frac{l.a}{q} - \frac{1}{q-1}(q^z - q).l.m$, ou $q^z \left[\frac{l.a}{q} - \frac{l.m}{q-1}\right] = l.\left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)$; soit

$l.a$

$\frac{l.a}{q} - \frac{lm}{q-1} = K$, & l'on trouvera

$$z = \frac{l.l.\left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q} - \frac{l.K}{l.q},$$

partant

$$y_z = A + p.\frac{l.l.\left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q},$$

A, étant une conſtante arbitraire qui peut être une fonction quelconque de ſin. $2\pi z$, & de coſ. $2\pi z$. Soit $\Gamma\left[\begin{smallmatrix}\text{ſin.}\,2\pi z\\ \text{coſ.}\,2\pi z\end{smallmatrix}\right]$, cette fonction; en y ſubſtituant au lieu de z, ſa valeur, on aura

$$A = \Gamma'.\left\{\begin{matrix}\text{ſin.}\left(2\pi.\frac{l.l.\left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}\right)\\ \text{coſ.}\left(2\pi.\frac{l.l.\left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}\right)\end{matrix}\right\}$$

Donc

$$y_z = \text{fonct.}(mx) = \Gamma'.\left\{\begin{matrix}\text{ſin.}\left(2\pi.\frac{l.l.\left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}\right)\\ \text{coſ.}\left(2\pi.\frac{l.l.\left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}\right)\end{matrix}\right\} + p.\frac{l.l.\left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}$$

ainsi la fonction de x, demandée, est

$$\text{fonct.}\,(x) = \Gamma'.\left\{\begin{array}{l}\text{sin.}\left(2\pi.\dfrac{l.l.\left(\dfrac{x}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}\right)\\ \text{cos.}\left(2\pi.\dfrac{l.l.\left(\dfrac{x}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}\right)\end{array}\right\} + p.\dfrac{l.l.\left(\dfrac{x}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}$$

Il s'agit encore de trouver fonct. (x), telle que

$$[\text{fonct.}\,(x)]^2 = \text{fonct.}\,(2x) + 2:$$

on pourroit d'abord penser qu'il est impossible de satisfaire à cette équation, à moins que de supposer fonct. (x) égale à une constante; c'est en effet ce qu'ont cru d'habiles Géomètres, *(Voyez le second Volume des Mémoires de Turin, page 320)*; mais on va voir qu'il y a une infinité d'autres moyens d'y satisfaire. Soit $u_z = x$, & $u_{z+1} = 2x$, donc $u_{z+1} = 2.u_z$, & $u_z = A.2^z = x$. De plus on a fonct. $(2x) =$ fonct. (u_{z+1}), que je désigne par t_{z+1}, & fonct. $(x) =$ fonct. $(u_z) = t_z$; on aura donc $t_{z+1} = (t_z)^2 - 2$. Pour intégrer cette équation je suppose $t_1 = a + \frac{1}{a}$, donc $t_2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$; $t_3 = a^4 + \frac{1}{a^4}$, & généralement $t_z = a^{2^{z-1}} + \frac{1}{a^{2^{z-1}}}$, expression complète de t_z, puisque a est arbitraire; or on a $2^{z-1} = \frac{x}{2A}$, donc $t_z = a^{\frac{x}{2A}} + a^{-\frac{x}{2A}}$, ou $t_z = b^x + b^{-x}$, b étant une constante arbitraire; or cette constante peut être supposée une fonction quelconque de sin. $2\pi z$, & de cos. $2\pi z$, & puisque $z = H + \frac{l.x}{l.2}$, H étant une constante quelconque, on aura

$$b = \text{fonct.}\begin{cases}\text{sin.}\left(2\pi.\frac{l.x}{l.2}\right)\\ \text{cos.}\left(2\pi.\frac{l.x}{l.2}\right)\end{cases}$$

partant la fonction de x, demandée, est

$$\left\{\text{fonct.}\begin{bmatrix}\text{sin.}\left(2\pi.\frac{l.x}{l.2}\right)\\ \text{cos.}\left(2\pi.\frac{l.x}{l.2}\right)\end{bmatrix}\right\}^{x} + \left\{\text{fonct.}\begin{bmatrix}\text{sin.}\left(2\pi.\frac{l.x}{l.2}\right)\\ \text{cos.}\left(2\pi.\frac{l.x}{l.2}\right)\end{bmatrix}\right\}^{-x}$$

Il s'agit enfin de trouver fonct. $(x - y\sqrt{-1})$, telle que l'on ait

$$\text{fonct.}(x + y\sqrt{-1}) - \text{fonct.}(x - y\sqrt{-1} = 2M.\sqrt{-1},$$

en supposant $y = f + hx$; on aura

$$\text{fonct.}[f\sqrt{-1} + x(1 + h\sqrt{-1})] - \text{fonct.}[x(1 - h\sqrt{-1}) - f\sqrt{-1}] = 2M.\sqrt{-1}.$$

Soit $x(1 + h\sqrt{-1}) + f\sqrt{-1} = u_{z+1}$, & $x(1 - h\sqrt{-1}) - f\sqrt{-1} = u_z$; on aura donc $x = \frac{u_z + f.\sqrt{-1}}{1 - h\sqrt{-1}}$; donc

$$u_{z+1} = \left(\frac{1 + h\sqrt{-1}}{1 - h\sqrt{-1}}\right).u_z + \frac{2f\sqrt{-1}}{1 - h\sqrt{-1}},$$

équation dont l'intégrale est

$$u_z = A\left[\frac{1 + h\sqrt{-1}}{1 - h\sqrt{-1}}\right]^z - \frac{f}{h} = x(1 - h\sqrt{-1}) - f\sqrt{-1};$$

partant,

$$z.l.\left(\frac{1 + h\sqrt{-1}}{1 - h\sqrt{-1}}\right) = l.(f + hx) + K.$$

Or, si l'on nomme $\varpi\pi$ l'angle dont la tangente est h, & π le rapport de la demi-circonférence au rayon, on aura $l.\left(\frac{1 + h\sqrt{-1}}{1 - h\sqrt{-1}}\right) = 2\sqrt{-1}.\varpi\pi$; donc, $z = \frac{l.(f + hx)}{2\sqrt{-1}.\varpi\pi} + K'$.

Maintenant on a,

$$\text{fonct.}(u_{z+1}) - \text{fonct.}(u_z) = 2M.\sqrt{-1};$$

& en représentant fonct. (u_z) par t_z, $t_{z+1} = t_z + 2M\sqrt{-1}$, donc, $t_z = H + 2Mz\sqrt{-1}$; substituant au lieu

de z, sa valeur, on aura $t_z = M . \frac{l(f+hx)}{\varpi \pi} + L$, L étant une constante arbitraire, laquelle peut être fonction quelconque de sin. $2 \pi z$ & de cos. $2 \pi z$, ou de sin. $\frac{l(f+hx)}{\varpi \sqrt{-1}}$ & de cos. $\frac{l.(f+hx)}{\varpi \sqrt{-1}}$, & par conséquent de $e^{\frac{l.(f+hx)}{\varpi}}$; or, $e^{l(f+hx)} = f + hx$; donc, L peut être fonction de $(f+hx)^{\frac{1}{\varpi}}$; partant,

$$\text{fonct.} (x - y\sqrt{-1}) = M . \frac{l.(f+hx)}{\varpi \pi} + \Gamma \left[(f+hx)^{\frac{1}{\varpi}}\right].$$

XIV.

Des Équations aux différences finies, lorsqu'on a plusieurs Équations entre plusieurs variables.

Je suppose que l'on ait les deux équations suivantes entre les trois variables y_x, $'y_x$ & x,

$$y_x + A_x . y_{x-1} = B_x . 'y_x + C_x . 'y_{x-1} \quad (1)$$
$$y_x + 'A_x . y_{x-1} = 'B_x . 'y_x + 'C_x . 'y_{x-1} \quad (2)$$

La manière la plus simple de les intégrer est de les réduire par élimination à deux autres équations, l'une entre y_x & x, l'autre entre $'y_x$ & x; pour cela, je multiplie la première par $'C_x$, la seconde par C_x, & je les retranche l'une de l'autre; ce qui donne

$$('C_x - C_x) . y_x + ['C_x . A_x - C_x . 'A_x] . y_{x-1} = ['C_x . B_x - C_x . 'B_x] . 'y_x,$$

partant,

$$['C_{x-1} - C_{x-1}] . y_{x-1} + ['C_{x-1} . A_{x-1} - C_{x-1} . 'A_{x-1}] y_{x-2} = ['C_{x-1} . B_{x-1} - C_{x-1} . 'B_{x-1}] . 'y_{x-1} \quad (3).$$

Je multiplie l'équation (1) par α, l'quation (2) par $'\alpha$, &

je les ajoute avec l'équation (3), ce qui donne,

$$(\alpha + {}'\alpha)y_x + [\alpha A_x + {}'\alpha . {}'A_x + {}'C_x - C_{x-1}] . y_{x-1}$$
$$+ [{}'C_{x-1} . A_{x-1} - C_{x-1} . {}'A_{x-1}] . y_{x-2} =$$
$$= [\alpha B_x + {}'\alpha_x . {}'B_x] . {}'y_x$$
$$+ [\alpha C_x + {}'\alpha . {}'C_x + {}'C_{x-1} . B_{x-1} - C_{x-1} . {}'B_{x-1}] . {}'y_{x-1}$$

je fais disparoître ${}'y_x$ & ${}'y_{x-1}$, au moyen des équations

$$\alpha B_x + {}'\alpha . {}'B_x = 0$$
$$\alpha C_x + {}'\alpha . {}'C_x + {}'C_{x-1} . B_{x-1} - C_{x-1} . {}'B_{x-1} = 0;$$

& j'ai de cette manière une équation différentielle entre y_x & x seules; par un procédé entièrement semblable, on en trouvera une entre ${}'y_x$ & x; & ce seroit la même chose si l'on avoit un plus grand nombre d'équations & de variables.

Il est aisé de voir que s'il y avoit dans chaque équation des termes tels que T_x, X_x, &c. T_x, X_x étant des fonctions quelconques de x, elles seroient intégrables dans les mêmes cas où elles le sont, ces termes n'y étant pas.

Lorsqu'on a $n - 1$ équations entre n variables, celle-ci pouvant avoir une infinité de rapports différens entr'elles, l'intégration de ces équations présente ainsi un grand nombre de recherches curieuses; mais il est un cas qui mérite une attention particulière, en ce qu'il se rencontre quelquefois & principalement dans l'analyse des hasards; c'est le cas dans lequel ces équations rentrent en elles-mêmes.

X V.

Des équations différentielles rentrantes en elles-mêmes.

Si l'on a les équations suivantes entre les n variables, $\overset{1}{y}_x$, $\overset{2}{y}_x$, $\overset{3}{y}_x$, &c.

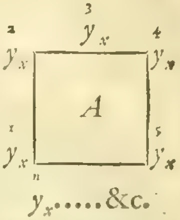
$$\overset{1}{y}_x = A . \overset{2}{y}_{x-1}$$
$$\overset{2}{y}_x = A . \overset{3}{y}_{x-1}$$

$$\overset{3}{y}_x = A\cdot\overset{4}{y}_{x-1};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{n}{y}_x = A\cdot\overset{1}{y}_{x-1};$$

Ces équations sont ce que j'appelle *équations rentrantes en elles-mêmes.*



En général, si l'on dispose sur le périmètre de la figure *A*, les *n* variables $\overset{1}{y}_x, \overset{2}{y}_x, \overset{3}{y}_x$, &c. ainsi que la figure les représente, & qu'alors une fonction quelconque d'une de ces variables & de ses différences finies, soit constamment égale à une fonction quelconque de celles qui la suivent, & de leurs différences finies, l'équation qui en résulte est ce que je nomme *équation rentrante en elle-même.* Si, par exemple, chacune de ces variables est égale à deux fois celle qui la suit, lorsqu'on y suppose x diminuer d'une unité, plus à trois fois celle qui suit cette dernière, lorsqu'on y suppose x diminuer de deux unités, on aura

$$\overset{1}{y}_x = 2\cdot\overset{2}{y}_{x-1} + 3\cdot\overset{3}{y}_{x-2};$$

$$\overset{2}{y}_x = 2\cdot\overset{3}{y}_{x-1} + 3\cdot\overset{4}{y}_{x-2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{n}{y}_x = 2\cdot\overset{1}{y}_{x-1} + 3\cdot\overset{2}{y}_{x-2}.$$

On voit par-là que bien que dans l'ordre des calculs, la variable $\overset{1}{y}_x$ soit la première; on auroit pu cependant également commencer par une quelconque de ces variables, & les équations auroient été absolument les mêmes, ce qui est le caractère particulier de ce genre d'équations. Cela posé.

XVI.

PROBLEME III.

Je suppose que l'on ait les équations *rentrantes*

$$\overset{1}{y}_x + A.\overset{1}{y}_{x-1} + {}^1A.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c.$$
$$= B.\overset{2}{y}_x + {}^1B.\overset{2}{y}_{x-1} + {}^2B.\overset{2}{y}_{x-2} + \&c. + X_x$$
$$\overset{2}{y}_x + A.\overset{2}{y}_{x-1} + {}^1A.\overset{2}{y}_{x-2} + \&c.$$
$$= B.\overset{3}{y}_x + {}^1B.\overset{3}{y}_{x-1} + {}^3B.\overset{3}{y}_{x-2} + \&c. + X_x$$

....

$$\overset{n}{y}_x + A.\overset{n}{y}_{x-1} + {}^1A.\overset{n}{y}_{x-2} + \&c.$$
$$= B.\overset{1}{y}_x + {}^1B.\overset{1}{y}_{x-1} + {}^2B.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c. + X_x$$

il faut déterminer $\overset{1}{y}_x$, $\overset{2}{y}_x$, &c.

La première équation donne

$$\overset{1}{y}_x + A.\overset{1}{y}_{x-1} + {}^1A.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c.$$
$$+ A.\overset{1}{y}_{x-1} + A^2.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c.$$
$$+ {}^1A.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c.$$
$$= B\,[\overset{2}{y}_x + A.\overset{2}{y}_{x-1} + {}^1A.\overset{2}{y}_{x-2} + \&c.]$$
$$+ {}^1B\,[\overset{2}{y}_{x-1} + A.\overset{2}{y}_{x-2} + {}^1A.\overset{2}{y}_{x-3} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ X_x + A.X_{x-1} + {}^1A.X_{x-2} + \&c.$$

Je substitue au lieu de $\overset{2}{y}_x + A.\overset{2}{y}_{x-1} + \&c.$ $\overset{2}{y}_{x-1} + A.\overset{2}{y}_{x-2} + \&c.$ leurs valeurs que donne la seconde équation, ce qui me donne une équation entre $\overset{1}{y}_x$, $\overset{1}{y}_{x-1}$, &c. & $\overset{3}{y}_x$, $\overset{3}{y}_{x-1}$, &c. en opérant sur celle-ci

comme sur la première, j'aurai une équation entre $\overset{1}{y}_x$, $\overset{1}{y}_{x-}$ $\overset{4}{y}_x$, $\overset{4}{y}_{x-1}$, &c. & en continuant d'opérer ainsi jusqu'à la variable $\overset{q}{y}_x$, je parviendrai à une équation de cette forme

$$\begin{aligned}&\overset{1}{y}_x + b_q.\overset{1}{y}_{x-1} + {}'b_q.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c.\\ = {} & a^q.[\overset{q}{y}_x + A.\overset{q}{y}_{x-1} + {}'A.\overset{q}{y}_{x-2} + \&c.]\\ & + {}'a_q.[\overset{q}{y}_{x-1} + A.\overset{q}{y}_{x-2} + \&c.]\\ & + \&c.\\ & + \overset{q}{u}_x.\end{aligned}$$

Il faut maintenant déterminer b_q, $'b_q$, &c. a_q, $'a_q$, &c. $\overset{q}{u}_x$.

Pour cela, je substitue dans l'équation précédente, au lieu de $\overset{q}{y}_x + A.\overset{q}{y}_{x-1} + \&c.$ $\overset{q}{y}_{x-1} + A.\overset{q}{y}_{x-2} + \&c.$ leurs valeurs que donne la $q.^{ieme}$ des équations rentrantes, ce qui donne

$$\begin{aligned}&\overset{1}{y}_x + b_q.\overset{1}{y}_{x-1} + {}'b_q.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c.\\ = {} & a_q.[B.\overset{q+1}{y}_x + {}'B.\overset{q+1}{y}_{x-1} + \&c. + X_x]\\ + {} & {}'a_q.[B.\overset{q+1}{y}_{x-1} + {}'B.\overset{q+1}{y}_{x-2} + \&c. + X_{x-1}]\\ + {} & \&c.\\ + {} & \overset{q}{u}_x.\end{aligned}$$

d'où je conclus

$$\begin{aligned}&\overset{1}{y}_x + b_q.\overset{1}{y}_{x-1} + {}'b_q.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c.\\ &\qquad\; + A \qquad\quad + A.b_q\\ &\qquad\qquad\qquad\quad\; + {}'A\\ = {} & a_qB.[\overset{q+1}{y}_x + A.\overset{q+1}{y}_{x-1} + {}'A.\overset{q+1}{y}_{x-2} + \&c.]\\ + {} & [{}'a_qB + a_q.{}'B].[\overset{q+1}{y}_{x-1} + A.\overset{q+1}{y}_{x-2} + \&c.]\\ & +\end{aligned}$$

$$+ [{}^2a_q B + {}^1a_q . {}^1B + a_q . {}^2B] . [\overset{q+1}{y}_{x-2} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ X_x . a_q$$
$$+ X_{x-1} [{}^1a_q + A . a_q]$$
$$+ X_{x-2} . [{}^2a_q + A . {}^1a_q + {}^1A . a_q]$$
$$+ \&c.$$
$$+ \overset{q}{u}_x + A . \overset{q}{u}_{x-1} + {}^1A . \overset{q}{u}_{x-2} + \&c.$$

mais on a

$$\overset{1}{y}_x + b_{q+1} . \overset{1}{y}_{x-1} + {}^1b_{q+1} . \overset{1}{y}_{x-2} + \&c.$$
$$= a_{q+1} . [\overset{q+1}{y}_x + A . \overset{q+1}{y}_{x-1} + \&c.]$$
$$+ {}^1a_{q+1} . [\overset{q+1}{y}_{x-1} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ \overset{q+1}{u}_x$$

d'où l'on a en comparant

$$b_{q+1} = b_q + A$$
$${}^1b_{q+1} = {}^1b_q + A . b_q + {}^1A$$
$$\&c.$$
$$a_{q+1} = a_q . B$$
$${}^1a_{q+1} = {}^1a_q . B + a_q . {}^1B$$
$$\&c.$$

$$\overset{q+1}{u}_x = \overset{q}{u}_x + A . \overset{q}{u}_{x-1} + {}^1A . \overset{q}{u}_{x-2} + \&c.$$
$$+ X_x . a_q + X_{x-1} . [{}^1a_q + A . a_q] \quad (A)$$
$$+ X_{x-2} . [{}^2a_q + A . {}^1a_q + {}^1A . a_q]$$
$$+ \&c.$$

Au moyen de ces équations, on déterminera facilement a_q, ${}^1a_q$, &c. b_q, ${}^1b_q$, &c. pour déterminer $\overset{q}{u}_x$, j'obſerve

que l'on a

$$\overset{q}{u}_x = f_q . X_x + {}'f_q . X_{x-1} + {}^2f_q . X_{x-2} + \&c.$$

je substitue cette valeur dans l'équation (A), ce qui donne

$$\begin{aligned}\overset{q+1}{u}_x = X_x [f_q + a_q] + X_{x-1} . [{}^1f_q + {}^1a_q + A . a_q + A . f_q] \\ + X_{x-2} \left\{ {}^2f_q + {}^2a_q + A . {}^1a_q + {}^1A . a_q \atop + {}^1A . f_q + A . {}^1f_q \right\} \\ + \&c.\end{aligned}$$

mais on a

$$\overset{q+1}{u}_x = f_{q+1} . X_x + {}^1f_{q+1} . X_{x-1} + {}^2f_{q+1} . X_{x-2} + \&c.$$

donc

$$\begin{aligned} f_{q+1} &= f_q + a_q \\ {}^1f_{q+1} &= {}^1f_q + {}^1a_q + A . f_q \\ &\&c. \end{aligned}$$

Au moyen de ces équations on déterminera f_q, ${}'f_q$. &c. & partant, $\overset{q}{u}_x$.

Je suppose maintenant $q = n$, & l'on aura

$$\begin{aligned}\overset{2}{y}_x + b_n . \overset{1}{y}_{x-1} + \&c. = a_n . [\overset{n}{y}_x + A . \overset{n}{y}_{x-1} + \&c.] \\ + {}^1a_n . [\overset{n}{y}_{x-1} + {}^1A . \overset{n}{y}_{x-2} + \&c.] \\ + \&c. \\ + \overset{n}{u}_x\end{aligned}$$

mais on a

$$\overset{n}{y}_x + A . \overset{n}{y}_{x-1} + \&c. = B . \overset{1}{y}_x + {}'B . \overset{1}{y}_{x-1} + \&c. + X_x ;$$

donc,

$$\begin{aligned}\overset{1}{y}_x + b_n . \overset{2}{y}_{x-1} + \&c. = a_n . [B . \overset{1}{y}_x + {}'B . \overset{1}{y}_{x-1} + \&c.] + a_n . X_x \\ + {}'a_n . [B . \overset{1}{y}_{x-1} + \&c.] \qquad + {}'a_n . X_{x-1} \\ + \&c. \qquad + \&c. \\ + \overset{n}{u}_x\end{aligned}$$

& en ordonnant les différens termes de cette équation,

$$\left.\begin{array}{l}\overset{1}{y}_x.[1 - a_n.B] + \overset{1}{y}_{x-1}.[b_n - a_n.{}'B - {}'a_n.B] \\ + \overset{1}{y}_{x-2}.[{}'b_n - a_n.{}^2B - {}'a_n.{}'B - {}^2a_n.B] + \&c. \\ - \overset{n}{u}_x - a_n.X_x - {}'a_n.X_{x-1} - \&c.\end{array}\right\} = 0$$

on aura une équation entièrement semblable pour $\overset{2}{y}_x, \overset{3}{y}_x$, &c.

XVII.

PROBLEME IV.

Je suppose maintenant que les équations rentrantes renferment trois variables, & que l'on ait

$$\begin{array}{l}\overset{1}{y}_x + .A.\overset{1}{y}_{x-1} + {}'A.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c. \\ = B.\overset{2}{y}_x + {}'B.\overset{2}{y}_{x-1} + {}^2B.\overset{2}{y}_{x-2} + \&c. \\ + C.\overset{3}{y}_x + {}'C.\overset{3}{y}_{x-1} + {}^2C.\overset{3}{y}_{x-2} + \&c. \\ + X_x\end{array}$$

. . . .

$$\begin{array}{l}\overset{n}{y}_x + A.\overset{n}{y}_{x-1} + {}'A.\overset{n}{y}_{x-2} + \&c. \\ = B.\overset{1}{y}_x + {}'B.\overset{1}{y}_{x-1} + {}^2B.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c. \\ + C.\overset{2}{y}_x + {}'C.\overset{2}{y}_{x-1} + \&c. \\ + X_x.\end{array}$$

il faut déterminer $\overset{1}{y}_x$, $\overset{2}{y}_x$, &c.

En suivant le procédé du Problème précédent, on arrivera à une équation de cette forme

$$\begin{array}{l}\overset{1}{y}_x + b_q.\overset{1}{y}_{x-1} + {}'b_q.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c. \\ = a_q.[\overset{q}{y}_x + A.\overset{q}{y}_{x-1} + {}'A.\overset{q}{y}_{x-2} + \&c.] \\ + {}'a_q.[\overset{q}{y}_{x-1} + A.\overset{q}{y}_{x-2} + {}'A.\overset{q}{y}_{x-3} + \&c.] \\ + \&c.\end{array}$$

$$+ c_q . [\overset{q+1}{y}_x + A.\overset{q+1}{y}_{x-1} + {}'A.\overset{q+1}{y}_{x-2} + \&c.]$$
$$+ {}'c_q . [\overset{q+1}{y}_{x-1} + A.\overset{q+1}{y}_{x-2} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ \overset{q}{u}_x$$

Je substitue maintenant dans cette équation au lieu de $\overset{q}{y}_x + A.\overset{q}{y}_{x-1} + \&c.$ $\overset{q}{y}_{x-1} + A.\overset{q}{y}_{x-2} + \&c.$ leurs valeurs que donne la $q.^{ième}$ équation, ce qui produit la suivante,

$$\overset{1}{y}_x + b_q.\overset{1}{y}_{x-1} + {}'b_q.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c.$$
$$= a_q.[B.\overset{q+1}{y}_x + {}'B.\overset{q+1}{y}_{x-1} + {}^2B.\overset{q+1}{y}_{x-2} + \&c.]$$
$$+ {}'a_q.[B.\overset{q+1}{y}_{x-1} + {}'B.\overset{q+1}{y}_{x-2} + {}^2B.\overset{q+1}{y}_{x-3} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ a_q.[C.\overset{q+2}{y}_x + {}'C.\overset{q+2}{y}_{x-1} + \&c.]$$
$$+ {}'a_q.[C.\overset{q+2}{y}_{x-1} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ c_q.[\overset{q+1}{y}_x + A\overset{q+1}{y}_{x-1} + \&c.]$$
$$+ {}'c_q.[\overset{q+1}{y}_{x-1} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ a_q.X_x + {}'a_q.X_{x-1} + \&c. + \overset{q}{u}_x$$

d'où l'on conclura facilement,

$$\begin{array}{llll} \overset{1}{y}_x & + b_q.\overset{1}{y}_{x-1} & + b_q.\overset{1}{y}_{x-2} & + \&c. \\ & + A & + A.b_q & + \&c. \\ & & + {}'A & + \&c. \end{array}$$

$$= [a_q.B + c_q] . [\overset{q+1}{y}_x + A.\overset{q+1}{y}_{x-1} + \&c.]$$
$$+ \left\{\begin{array}{l} {}'a_q\, B + a_q.{}'B \\ + {}'c_q + A.c_q \end{array}\right\} . [\overset{q+1}{y}_{x-1} + A.\overset{q+1}{y}_{x-2} + \&c.]$$

$$+ \left\{\begin{matrix} {}^{2}a_q . B + {}^{1}a_q . {}^{1}B + a_q . {}^{2}B \\ + {}^{2}c_q + A . {}^{1}c_q + {}^{1}A . c_q \end{matrix}\right\} . [\overset{q+1}{y}_{x-2} + A . \overset{q+1}{y}_{x-3} + \&c.]$$

$$+ \&c.$$

$$+ a_q . C . [\overset{q+2}{y}_x + A . \overset{q+2}{y}_{x-1} + \&c.]$$

$$+ [{}^{1}a_q . C + a_q . {}^{1}C] . [\overset{q+2}{y}_{x-1} + A . \overset{q+2}{y}_{x-2} + \&c.]$$

$$+ [{}^{2}a_q . C + {}^{1}a_q . {}^{1}C + a_q . {}^{2}C] . [\overset{q+2}{y}_{x-2} + A . \overset{q+2}{y}_{x-3} + \&c.]$$

$$+ \&c.$$

$$+ \overset{q}{u}_x + A . \overset{q}{u}_{x-1} + {}^{1}A . \overset{q}{u}_{x-2} + \&c.$$

$$+ X_x . a_q + X_{x-1} . [{}^{1}a_q + A . a_q] + \&c.$$

or, on a,

$$\begin{aligned} \overset{1}{y}_x + b_{q+1} . \overset{1}{y}_{x-1} + \&c. = {} & a_{q+1} [\overset{q+1}{y}_x + A . \overset{q+1}{y}_{x-1} + \&c.] \\ & + \&c. \\ & + c_{q+1} [\overset{q+2}{y}_x + A . \overset{q+2}{y}_{x-1} + \&c.] \\ & + \&c. \\ & + \overset{q+1}{u}_x \end{aligned}$$

d'où l'on aura en comparant

$$\begin{aligned} b_{q+1} &= b_q + A \\ {}^{1}b_{q+1} &= {}^{1}b_q + A . b_q + {}^{1}A \\ &\&c. \end{aligned}$$

ainſi l'on déterminera b_q, ${}^{1}b_q$, &c. enſuite

$$a_{q+1} = a_q . B + c_q, \ \& \ c_{q+1} = a_q . C,$$

partant, $a_{q+1} = a_q . B + a_{q-1} . C$; d'où l'on aura a_q & c_q.

De plus, on aura

$$\begin{aligned} {}^{1}a_{q+1} &= {}^{1}a_q . B + a_q . {}^{1}B + {}^{1}c_q + A . c_q \\ {}^{1}c_{q+1} &= {}^{1}a_q . C + a_q . {}^{1}C. \end{aligned}$$

Donc,

$'a_{q+1} = 'a_q . B + a_q . 'B + 'a_{q-1} . 'C + a_{q-1} . 'C + A . c_q;$ d'où l'on aura $'a_q$ & $'c_q$, & ainſi du reſte; enfin, on déterminera $\overset{q}{u}_x$, comme dans le Problème précédent.

Si l'on ſuppoſe préſentement $q = n$, on aura

$$\begin{aligned}\overset{1}{y}_x [1 - c_n] + \overset{1}{y}_{x-1} . [1 - A . c_n - 'c_n] + \&c. \\ = a_n . [\overset{n}{y}_x + A . \overset{n}{y}_{x-1} + \&c.] \\ + 'a_n [\overset{n}{y}_{x-1} + A . \overset{n}{y}_{x-2} + \&c.] \\ + \&c. \\ + \overset{n}{u}_x\end{aligned}$$

On formera des équations entièrement ſemblables entre $\overset{n-1}{y}_x$ & $\overset{n}{y}_x$, $\overset{n-2}{y}_x$ & $\overset{n-1}{y}_x$, &c. & l'on aura un nombre n d'équations rentrantes à deux variables, telles que je les ai conſidérées dans le Problème précédent.

La même méthode réuſſiroit également, ſi les équations rentrantes renfermoient quatre ou un plus grand nombre de variables.

X V I I I.

Du Calcul intégral aux différences finies & partielles.

Je ſuppoſe que $_n y_x$ repréſente une fonction quelconque des deux variables x & n, je puis dans cette fonction faire varier n en regardant x comme conſtant; je puis faire varier x, en regardant n comme conſtant; enfin, je puis faire varier n & x à la fois, leurs variations étant dans un rapport quelconque; or, s'il exiſte entre $_n y_x$ & ces différentes variations une équation quelconque, elle ſera ce que je nomme *équation aux différences finies & partielles.*

$_n y_x$ repréſentant toujours une fonction de deux variables x & n.

${}_{n-1}y_x$, ${}_{n-2}y_x$, &c. ſignifient que n a diminué d'une de deux, &c. unités dans cette fonction.

${}_ny_{x-1}$, ${}_ny_{x-2}$, &c. ſignifient que x a diminué de une, de deux, &c. unités dans cette fonction.

${}_{n-1}y_{x-2}$, &c. ſignifie que n a diminué d'une unité, & x de deux unités, & ainſi de ſuite.

Une équation aux différences partielles, eſt donc une équation entre ces différentes quantités; telle eſt celle-ci,

$${}_ny_x = a \cdot {}_ny_{x-1} + b \cdot {}_{n-1}y_{x-1}.$$

Les équations aux différences finies ont été trouvées par la conſidération des ſuites *(article II)*. C'eſt pareillement la conſidération de certaines ſuites que j'ai nommées *récurro-récurrentes (voyez le tome VI des Savans étrangers)*, qui m'a conduit aux différences finies & partielles, voici comment; je ſuppoſe que l'on ait les ſuites,

$$\left.\begin{array}{l}
{}_1y_1 \cdot {}_1y_2 \cdot {}_1y_3 \cdot {}_1y_4 \cdot {}_1y_5 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; {}_1y_x \cdot \text{ \&c.} \\
{}_2y_1 \cdot {}_2y_2 \cdot {}_2y_3 \cdot {}_2y_4 \cdot {}_2y_5 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; {}_2y_x \cdot \text{ \&c.} \\
{}_3y_1 \cdot {}_3y_2 \cdot {}_3y_3 \cdot {}_3y_4 \cdot {}_3y_5 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; {}_3y_x \cdot \text{ \&c.} \\
\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
{}_ny_1 \cdot {}_ny_2 \cdot {}_ny_3 \cdot {}_ny_4 \cdot {}_ny_5 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; {}_ny_x \cdot \text{ \&c.}
\end{array}\right\} (i)$$

Si un terme quelconque ${}_ny_x$ de ces ſuites eſt conſtamment égal à un nombre quelconque de termes précédens pris dans pluſieurs de ces ſuites, & multipliés chacun par une fonction de x & de n; ces ſuites ſont celles que j'ai nommées *récurro-récurrentes*, & l'équation qui exprime la loi d'après laquelle elles ſont formées, eſt une équation aux différences finies & partielles.

J'obſerverai ici que les ſuites *(i)* peuvent être conſidérées non-ſeulement dans le ſens horizontal, mais encore dans le ſens vertical, & au lieu que dans le premier ſens, x eſt leur indice, n le ſera dans le ſecond.

Je ſuppoſerai dans la ſuite, comme je l'ai fait ci-deſſus

dans les équations aux différences ordinaires, que les différences de x & de n ſont conſtantes & égales à l'unité; ſi elles ſont conſtantes ſans être égales à l'unité, il ſera toujours poſſible de les rendre telles, par l'introduction de nouvelles variables; je ſuppoſerai de plus (ce qui eſt encore permis) que les plus petites valeurs que puiſſent recevoir x & n, ſont l'unité; & toutes les fois que je m'écarterai de cette ſuppoſition, l'état de la queſtion le ſera connoître. Cela poſé:

Si l'on a une équation aux différences partielles telle que

$$ {}_{n}y_{x} = 2 \cdot {}_{n}y_{x-1} + 2 \cdot {}_{n-1}y_{x-1}, $$

elle ne commence à avoir lieu que lorſque x & n ſont plus grands que l'unité, comme dans les différences ordinaires l'équation ${}_{1}y_{x} = a \cdot {}_{1}y_{x-1}$, n'a lieu que lorſque x eſt plus grand que 1; en ſorte que ${}_{1}y_{1}$ reſte arbitraire, & l'on ne détermine au moyen de cette équation que les valeurs de ${}_{1}y_{2}$, ${}_{1}y_{3}$, &c. de même dans l'équation

$$ {}_{n}y_{x} = 2 \cdot {}_{n}y_{x-1} + 2 \cdot {}_{n-1}y_{x-1}; $$

${}_{1}y_{x}$, ou ${}_{n}y_{1}$, ſont arbitraires, ainſi l'expreſſion générale de ${}_{n}y_{x}$ renferme une fonction arbitraire.

En général, le nombre des fonctions arbitraires que renferme l'intégrale d'une équation aux différences partielles ſe déterminera par le degré de la différence de celle des deux quantités x & n qui varie le moins; ainſi dans l'équation

$$ {}_{n}y_{x} = {}_{n}y_{x-1} + 3 \cdot {}_{n-1}y_{x-1}, $$

le nombre des fonctions arbitraires que renferme l'intégrale eſt 1, parce que n étant ici celle des deux variables, dont la différence eſt la plus petite, elle ne varie que d'une unité; en effet, il eſt clair que ſi l'on connoît ${}_{1}y_{x}$, on peut déterminer ${}_{2}y_{x}$, ${}_{3}y_{x}$, ${}_{4}y_{x}$, &c. au moyen de l'équation

$$ {}_{n}y_{x} = {}_{n}y_{x-1} + 3 \cdot {}_{n-1}y_{x-2}: $$

il n'y a donc alors que ${}_{1}y_{x}$ d'arbitraire.

XIX.

XIX.

PROBLEME V.

L'équation aux différences finies & partielles

$${}_{n}y_{x} = {}_{n}H_{x} \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + {}_{n}^{1}H_{x} \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + {}_{n}^{2}H_{x} \cdot {}_{n-1}y_{x-3} + \&c... + {}_{n}P_{x},$$

étant donnée, on propose de l'intégrer.

Puisque dans chaque terme de cette équation, la variable n décroît suivant la même loi que la variable x, je puis supposer $x = n + K$, K étant une constante quelconque; ${}_{n}y_{x}$, ${}_{n}H_{x}$, ${}_{n}^{1}H_{x}$, &c. deviennent alors fonctions de x & de K; je représente dans ce cas, ${}_{n}y_{x}$, par u_{x}; ${}_{n}H_{x}$, ${}_{n}^{1}H_{x}$, &c. par L_{x}, ${}^{1}L_{x}$, &c. enfin, ${}_{n}P_{x}$ par X_{x}; l'équation proposée devient donc

$$u_{x} = L_{x} \cdot u_{x-1} + {}^{1}L_{x} \cdot u_{x-2} + {}^{2}L_{x} \cdot u_{x-3} + \&c... + X_{x},$$

équation aux différences ordinaires, & dont l'intégrale a cette forme par les articles précédens, en y restituant au lieu de K, sa valeur $x - n$,

$$u_{x} = C \cdot {}_{n}z_{x} + {}^{1}C \cdot {}_{n}^{1}z_{x} + {}^{2}C \cdot {}_{n}^{2}z_{x} + \&c... + {}_{n}R_{x};$$

C, ${}^{1}C$, ${}^{2}C$, &c. sont des constantes arbitraires, lesquelles peuvent être fonctions de K, ou de $x - n$; on aura donc

$${}_{n}y_{x} = {}_{n}z_{x} \cdot \varphi(x - n) + {}_{n}^{1}z_{x} \cdot {}^{1}\varphi(x - n) + {}_{n}^{2}z_{x} \cdot {}^{2}\varphi(x - n) + \&c. + {}_{n}R_{x};$$

on déterminera les fonctions arbitraires $\varphi(x - n)$, ${}^{1}\varphi(x - n)$, &c. au moyen des valeurs de ${}_{n}y_{x}$, dans autant de suppositions particulières pour x qu'il y a de ces fonctions arbitraires.

L'équation proposée aux différences partielles est donc généralement intégrable, ce qui vient de ce que dans chaque terme, n & x varient de la même manière; mais si l'on excepte ce cas, & quelques autres fort rares, il est impossible d'avoir une intégrale entièrement débarrassée de tout signe d'intégration; pour le faire voir par un exemple fort simple, je suppose que l'on ait à intégrer l'équation

${}_{n}y_{x} = {}_{n}y_{x-1} + {}_{n-1}y_{x-1}$; en supposant ${}_{1}y_{x} = \varphi(x)$,

on aura $y_x - {}_2y_{x-1} = \varphi(x-1)$ ou $\Delta . {}_2y_x = \varphi(x)$. Partant, ${}_2y_x = \Sigma . \varphi(x)$; on trouvera pareillement ${}_3y_x = \Sigma . \Sigma . \varphi(x)$, ${}_4y_x = \Sigma^3 . \varphi(x)$, & généralement, ${}_ny_x = \Sigma^{n-1} . \varphi(x)$; telle eſt donc la valeur complète de ${}_ny_x$, en ayant ſoin d'ajouter à chaque intégration une conſtante arbitraire.

On peut ſimplifier cette valeur & la réduire à des quantités affectées du ſimple ſigne d'intégration, de la manière ſuivante.

Il faut réduire la double intégrale $\Sigma^2 . \varphi(x)$ à des ſimples intégrales; je fais pour cela

$$\Sigma^2 . \varphi(x) = z_x . \Sigma . \varphi(x) - \Sigma . t_x . \varphi(x);$$

en différenciant il vient

$$\Sigma . \varphi(x) = (z_x + \Delta . z_x)[\varphi(x) + \Sigma . \varphi(x)] - z_x . \Sigma . \varphi(x) - t_x . \varphi(x),$$

ou

$$\Sigma . \varphi(x) = [z_x + \Delta . z_x - t_x] . \varphi(x) + \Delta . z_x . \Sigma . \varphi(x).$$

Donc $\Delta . z_x = 1$, & $t_x = z_x + \Delta . z_x$. Je puis donc ſuppoſer $z_x = x$, & $t_x = x + 1$; ce qui donne

$$\Sigma^2 . \varphi(x) = x . \Sigma . \varphi(x) - \Sigma . (x + 1) . \varphi(x);$$

ou réduira, par un procédé ſemblable, $\Sigma^3 . \varphi(x)$, à des quantités affectées d'un ſeul ſigne d'intégration; mais il ſera impoſſible de l'en débarraſſer entièrement.

Voici maintenant une méthode d'intégrer les équations aux différences partielles, dans laquelle l'inconvénient des quantités affectées de pluſieurs ſignes d'intégration n'eſt point à craindre.

X X.

PROBLEME VI.

L'équation aux différences finies & partielles

$$\begin{aligned} {}_ny_x = {} & A_n . {}_ny_{x-1} + {}^1A_n . {}_ny_{x-2} + {}^2A_n . {}_ny_{x-3} + \&c. + N_x \\ & + B_n . {}_{n-1}y_x + {}^1B_n . {}_{n-1}y_{x-1} + {}^2B_n . {}_{n-1}y_{x-2} + \&c. \qquad (h) \end{aligned}$$

étant donnée, on propoſe de l'intégrer.

Pour cela je cherche à ramener l'intégration à celle d'une équation aux différences ordinaires. Je suppose donc que l'on ait ${}_1y_x = \varphi(x)$; l'équation (h) donnera la suivante,

$$ {}_2y_x = A_2 \cdot {}_2y_{x-1} + {}'A_2 \cdot {}_2y_{x-2} + \&c. \ldots + N_2 + B_2 \cdot \varphi(x) + {}'B_2 \cdot \varphi(x-1) + \&c. \qquad (1) $$

ensuite

$$ {}_3y_x = A_3 \cdot {}_3y_{x-1} + {}'A_3 \cdot {}_3y_{x-2} + \&c. \ldots + N_3 + B_3 \cdot {}_2y_x + {}'B_3 \cdot {}_2y_{x-1} + \&c. $$

d'où il est facile de conclure

$$ \begin{aligned} {}_3y_x - A_3 \cdot {}_3y_{x-1} - {}'A_3 \cdot {}_3y_{x-2} &- \&c. \\ - A_2 [{}_3y_{x-1} - A_3 \cdot {}_3y_{x-2} &- \&c.] \\ - {}'A_2 [{}_3y_{x-2} &- \&c.] \\ = B_3 \cdot [{}_2y_x - A_2 \cdot {}_2y_{x-1} &- \&c.] \\ + {}'B_3 \cdot [{}_2y_{x-1} - A_2 \cdot {}_2y_{x-2} &- \&c.] \\ + \&c. & \\ + N_3 \cdot [1 - A_2 - {}'A_2 &- \&c.] \end{aligned} $$

Si l'on substitue au lieu de $\begin{matrix} {}_2y_x - A_2 \cdot {}_2y_{x-1} - \&c. \\ {}_2y_{x-1} - A_2 \cdot {}_2y_{x-2} - \&c. \\ \&c. \end{matrix}$

leurs valeurs tirées de l'équation (1), on aura une équation de cette forme:

$$ {}_3y_x - a_3 \cdot {}_3y_{x-1} - {}'a_3 \cdot {}_3y_{x-2} - \&c. = {}_3u_x; $$

cette équation est aux différences ordinaires; pour l'intégrer par les articles précédens, il faut connoître ${}_3u_x$ & les racines de l'équation

$$ 1 = \frac{a_3}{f} + \frac{{}'a_3}{ff} + \frac{{}^2a_3}{f^3} + \&c. $$

or, cette équation est la même que celle-ci

$$ 0 = 1 - \frac{A_3}{f} - \frac{{}'A_3}{ff} - \&c. $$

$$- \frac{A_2}{f} \cdot [1 - \frac{A_1}{f} - \&c.]$$

$$- \frac{{}'A_2}{ff} \cdot [1 - \frac{A_1}{f} - \&c.]$$

& partant, elle est égale à la suivante;

$$o = [1 - \frac{A_2}{f} - \frac{{}'A_2}{ff} - \frac{{}^2A_2}{f^3} - \&c.] \cdot [1 - \frac{A_1}{f} - \frac{{}'A_1}{ff} - \&c.]$$

En suivant le même procédé pour ${}_4y_x$, ${}_5y_x$, & généralement pour ${}_ny_x$, on transformera l'équation *(h)* du Problème dans la suivante.

$${}_ny_x = a_n \cdot {}_ny_{x-1} + {}'a_n \cdot {}_ny_{x-2} + \&c. + {}_nu_x \ (2)$$

qu'il sera facile d'intégrer lorsqu'on connoîtra ${}_nu_x$ & les racines de l'équation

$$o = 1 - \frac{a_n}{f} - \frac{{}'a_n}{ff} - \frac{{}^2a_n}{f^3} - \&c.$$

or, on verra facilement que cette équation est la même que celle-ci,

$$o = [1 - \frac{A_2}{f} - \frac{{}'A_2}{ff} - \frac{{}^2A_2}{f^3} - \&c.] \cdot [1 - \frac{A_1}{f} - \frac{{}'A_1}{ff} - \&c.] \&c.$$

$$\ldots\ldots [1 - \frac{A_n}{f} - \frac{{}'A_n}{ff} - \&c.]$$

d'où il est facile de conclure a_n, ${}'a_n$, &c.

Pour déterminer présentement la valeur de ${}_nu_x$, j'observe que de l'équation

$${}_ny_x = a_n \cdot {}_ny_{x-1} + {}'a_n \cdot {}_ny_{x-2} + \&c. + {}_nu_x \ (2),$$

on tire,

$$B_n \cdot {}_{n-1}y_x = B_n \cdot a_{n-1} \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + B_n \cdot {}'a_{n-1} \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + \&c. + B_n \cdot {}_{n-1}u_x$$

$${}'B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-1} = {}'B_n \cdot a_{n-1} \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + {}'B_n \cdot {}'a_{n-1} \cdot {}_{n-1}y_{x-3} + \&c. + {}'B_n \cdot {}_{n-1}u_{x-1}$$

&c.

Si l'on ajoute toutes ces équations membre-à-membre,

on aura,

$$B_n \cdot {}_{n-1}y_x + {}^1B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + \&c.$$
$$= a_{n-1} \cdot [B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + {}^1B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + \&c.]$$
$$+ {}^1a_{n-1} \cdot [B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ B_n \cdot {}_{n-1}u_x + {}^1B_n \cdot {}_{n-1}u_{x-1} + \&c.$$

Or, si l'on substitue au lieu de

$$B_n \cdot {}_{n-1}y_x + {}^1B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + \&c.$$
$$B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + {}^1B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + \&c.$$

leurs valeurs données par l'équation du Problème, on aura

$$ {}_ny_x - A_n \cdot {}_ny_{x-1} - \&c. = a_{n-1} \cdot [{}_ny_{x-1} - A_n \cdot {}_ny_{x-2} - \&c. - N_n]$$
$$- N_n \qquad + {}^1a_{n-1} \cdot [{}_ny_{x-2} - \&c. - N_n]$$
$$+ \&c.$$
$$+ B_n \cdot {}_{n-1}u_x + {}^1B_n \cdot {}_{n-1}u_{x-1} + \&c.$$

en ordonnant les différens termes de cette équation, on aura

$$ {}_ny_x = {}_ny_{x-1} \cdot (a_{n-1} + A_n)$$
$$+ {}_ny_{x-2} \cdot ({}^1a_{n-1} - a_{n-1} \cdot A_n + {}^1A_n)$$
$$+ {}_ny_{x-3} \cdot ({}^2a_{n-1} - {}^1a_{n-1} \cdot A_n - a_{n-1} \cdot {}^1A_n + {}^2A_n)$$
$$+ \&c.$$
$$+ B_n \cdot {}_{n-1}u_x + {}^1B_n \cdot {}_{n-1}u_{x-1} + \&c.$$
$$+ N_n \cdot (1 - a_{n-1} - {}^1a_{n-1} - \&c.)$$

Si l'on compare maintenant terme-à-terme cette dernière équation avec l'équation (2), on aura les suivantes

$$a_n = a_{n-1} + A_n,$$
$${}^1a_n = {}^1a_{n-1} - a_{n-1} \cdot A_n + {}^1A_n,$$
$${}^2a_n = {}^2a_{n-1} - {}^1a_{n-1} \cdot A_n - a_{n-1} \cdot {}^1A_n + {}^2A_n.$$
&c.

on pourroit en intégrant ces équations, déterminer a_n, ${}^1a_n$, &c. s'il n'étoit pas beaucoup plus simple de les conclure par la méthode précédente.

Enfin on aura

$$ {}_nu_x = N_n(1 - a_{n-1} - {}'a_{n-1} - {}^2a_{n-1} - \&c.) + B_n \cdot {}_{n-1}u_x + {}'B_n \cdot {}_{n-1}u_{x-1} + \&c. \quad (3) $$

Pour intégrer cette dernière équation, j'obſerve que puiſque ${}_1y_x = \varphi(x)$, on aura ${}_1u_x = \varphi(x)$, d'où je conclus

$$ {}_2u_x = N_2[1 - a_1 - \&c.] + B_2 \cdot \varphi(x) + {}'B_2 \cdot \varphi(x-1) + \&c. $$

on auroit de la même manière ${}_3u_x$, ${}_4u_x$, &c. & l'on voit qu'en procédant ainſi, on aura généralement

$$ {}_nu_x = b_n \cdot \varphi(x) + {}'b_n \cdot \varphi(x-1) + {}^2b_n \cdot \varphi(x-2) + \&c. + C_n \quad (4) $$

donc,

$$ {}_{n-1}u_x = b_{n-1} \cdot \varphi(x) + {}'b_{n-1} \cdot \varphi(x-1) + \&c. + C_{n-1} $$

$$ {}_{n-1}u_{x-1} = b_{n-1} \cdot \varphi(x-1) + {}'b_{n-1} \cdot \varphi(x-2) + \&c. + C_{n-1} $$

&c.

ſi l'on ſubſtitue ces valeurs dans l'équation (3), on aura

$$ \begin{aligned} {}_nu_x = {} & N_n\,[1 - a_{n-1} - {}'a_{n-1} - \&c.] \\ & + C_{n-1}\,[B_n + {}'B_n + \&c.] \\ & + b_{n-1} \cdot B_n \cdot \varphi(x) + \varphi(x-1) \cdot [{}'b_{n-1} \cdot B_n + b_{n-1}\,{}'B_n] + \&c. \end{aligned} $$

d'où, en comparant avec l'équation (4), on aura

$$ \begin{aligned} b_n &= B_n \cdot b_{n-1} \\ {}'b_n &= B_n \cdot {}'b_{n-1} + {}'B_n \cdot b_{n-1} \\ &\&c. \end{aligned} $$

$$ C_n = C_{n-1} \cdot [B_n + {}'B_n + \&c.] + N_n \cdot [1 - a_{n-1} - {}'a_{n-1} - \&c.] $$

En intégrant ces différentes équations, & ajoutant les conſtantes convenables, on aura les valeurs de b_n, ${}'b_n$, &c. C_n, & partant celle de ${}_nu_x$. Les conſtantes doivent être telles qu'en ſuppoſant $n = 1$, on ait ${}_nu_x = \varphi(x)$; en ſorte que l'on doit avoir $C_1 = 0$, $b_1 = 1$, ${}'b_1 = 0$, ${}^2b_1 = 0$, &c.

En intégrant l'équation (2) à laquelle ſe réduit l'équation du Problème, cette opération introduit dans l'expreſſion de ${}_ny_x$ des conſtantes arbitraires, leſquelles peuvent être fonctions de n, mais ces fonctions ne ſont pas arbitraires, puiſque

l'intégrale de l'équation *(h)* ne peut renfermer d'autre fonction arbitraire que $\varphi(x)$, on les déterminera de cette manière.

Si l'on nomme p_n, ${}^1p_n$, ${}^2p_n$, &c. les racines de l'équation

$$1 = \frac{a_n}{f} + \frac{{}^1a_n}{f^2} + \frac{{}^2a_n}{f^3} + \text{\&c.}$$

on aura par l'*art. X*,

$$ {}_ny_x = C_n \cdot p_n^x + {}^1C_n \cdot {}^1p_n^x + {}^2C_n \cdot {}^2p_n^x + \text{\&c.} \ldots + {}_nL_x$$

Si l'on substitue cette expression de ${}_ny_x$ dans l'équation *(h)*, on en tirera, en comparant les termes homologues par rapport à x, autant d'équations différentielles qu'il y a de fonctions C_n, ${}^1C_n$, &c. & en intégrant ces équations on déterminera ces fonctions.

Au lieu de faire ${}_1y_x = \varphi(x)$, on peut imaginer une équation différentielle quelconque entre ${}_1y_x$ & x, je suppose que cette équation soit celle d'une suite récurrente, en sorte que l'on ait

$${}_1y_x = F \cdot {}_1y_{x-1} + {}^1F \cdot {}_1y_{x-2} + \text{\&c.} + L;$$ F, F^1 &c. & L, étant constans; en suivant la méthode du Problème, on parviendra à l'équation suivante.

$${}_ny_x = a_n \cdot {}_ny_{x-1} + {}^1a_n \cdot {}_ny_{x-2} + {}^2a_n \cdot {}_ny_{x-3} + \text{\&c.} + u_n \quad (5)$$

& l'on trouvera que l'équation

$$1 = \frac{a_n}{f} + \frac{{}^1a_n}{f^2} + \frac{{}^2a_n}{f^3} + \text{\&c.}$$

est la même que celle-ci,

$$0 = \left[1 - \frac{F}{f} - \frac{{}^1F}{f^2} - \text{\&c.}\right] \cdot \left[1 - \frac{A_2}{f} - \frac{{}^1A_2}{ff} - \text{\&c.}\right] \text{\&c.} \ldots\ldots \left[1 - \frac{A_n}{f} - \frac{{}^1A_n}{f^2} - \text{\&c.}\right]$$

on aura ensuite

$$u_n = u_{n-1} \cdot [B_n + {}^1B_n + \text{\&c.}] + N_n \cdot [1 - a_{n-1} - a_{n-1} - \text{\&c.}]$$

d'où il sera facile de conclure la valeur de ${}_ny_x$.

Le cas dans lequel l'équation entre ${}_1y_x$ & x, est celle

d'une ſuite récurrente, eſt celui qui ſe rencontre le plus fréquemment dans l'application de cette Théorie.

On peut obſerver ici que les quantités B_n, $'B_n$, &c. n'entrent point dans la formation de a_n, $'a_n$, &c. mais ſimplement dans celle de u_n; d'où il ſuit que lorſque cette quantité eſt nulle, (ce qui doit arriver très-ſouvent), l'équation (5) reſtera la même quelles que ſoient les quantités B_n, $'B_n$, &c. de-là, il réſulte que dans ce cas, ces quantités n'influent dans la ſolution du Problème, que ſur la détermination des conſtantes arbitraires qui viennent de l'intégration de l'équation (5).

XXI.

Pour éclaircir la Théorie précédente par quelques exemples, je ſuppoſe que l'on ait les deux équations

$$ {}_1y_x = 2 \cdot {}_1y_{x-1} $$
$$ {}_ny_x = 2 \cdot {}_ny_{x-1} + 2 \cdot {}_{n-1}y_{x-1} $$

Si dans la première équation on fait ${}_1y_1 = 1$, on formera à ſon moyen la ſérie ſuivante 1 . 2 . 4 . 8 . 16, &c. La ſeconde équation donne ${}_2y_x = 2 \cdot {}_2y_{x-1} + 2 \cdot {}_1y_{x-1}$; & ſi l'on ſuppoſe ${}_2y_1 = 0$, on aura ${}_2y_2 = 2$, ${}_2y_3 = 8$, &c. on formera de cette manière, la ſuite, 0 . 2 . 8 . 24, &c. en continuant ainſi, & ſuppoſant toujours ${}_3y_1 = 0$, ${}_4y_1 = 0$, ${}_5y_1 = 0$, &c. on formera les ſuites *récurro-récurrentes.*

	1	2	3	4	5	6	7	8..... *x.*
1	1 .	2 .	4 .	8 .	16 .	32 .	64 .	128 .&c.
2	0 .	2 .	8 .	24 .	64 .	160 .	384 .	896 .&c.
3	0 .	0 .	4 .	24 .	96 .	320 .	960 .	2688 .&c.
4	0 .	0 .	0 .	8 .	64 .	320 .	1280 .	4480 .&c.
5	0 .	0 .	0 .	0 .	16 .	160 .	960 .	4480 .&c.
⋮ *n*	&c.							

Il faut préſentement déterminer le terme général de ces ſuites, ou ce qui revient au même, l'expreſſion de ${}_n y_x$.

Pour cela j'obſerve que l'on a, par l'article précédent,

${}_n y_x = a_n \cdot {}_n y_{x-1} + {}^1a_n \cdot {}_n y_{x-2} + \&c \ldots + u_n$,

enſuite l'équation

$$1 = \frac{a_n}{f} + \frac{{}^1a_n}{f^2} + \&c.$$

eſt dans ce cas égale à celle-ci, $0 = \left(1 - \frac{2}{f}\right)^n$, dont toutes les racines ſont égales à 2 ; on a de plus $u_n = 2 . u_{n-1}$: donc $u_n = H . 2^n$, or poſant $n = 1$, $u_n = 0$, donc $H = 0$; on aura ainſi par l'*art. IX*,

$$ {}_n y_x = 2^{x-1} . \left\{ \begin{array}{l} C_n \cdot \frac{(x-1).(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)} + D_n \cdot \frac{(x-1).(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots(n-2)} \\ + E_n \cdot \frac{(x-1)\ldots(x-n+3)}{1.2.3\ldots(n-3)} + \&c. \end{array} \right. $$

Pour déterminer les conſtantes arbitraires C_n, D_n, &c. on ſubſtituera cette valeur de ${}_n y_x$ dans l'équation ${}_n y_x = 2 . {}_n y_{x-1} + 2 . {}_{n-1} y_{x-1}$; en obſervant que

$$\frac{(x-1).(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)} = \frac{(x-2).(x-3)\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)}$$

$$\frac{(x-1).(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots(n-2)} = \frac{(x-2)\ldots\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)} + \frac{(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots(n-3)}$$

&c.

& l'on aura

$$C_n \cdot \frac{(x-2).(x-3)\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)} + (C_n + D_n) \cdot \frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)}$$
$$+ (D_n + E_n) \cdot \frac{(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots(n-3)} + \&c.$$
$$= C_n \cdot \frac{(x-2)\ldots\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)} + (D_n + C_{n-1}) \cdot \frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)}$$
$$+ (E_n + D_{n-1}) \cdot \frac{(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots(n-3)} + \&c.$$

En comparant terme-à-terme, on aura 1.° $C_n = C_{n-1}$. Donc, $C_n = A$. Or, poſant $n = 1$, la quantité

$\frac{1.(x-1).(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}$ se réduit à son 1.er facteur 1, & les quantités suivantes, $\frac{(x-1).(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots(n-2)}$, &c. deviennent nulles; donc, ${}_1y_x = A \cdot 2^{x-1}$. Or, on a ${}_1y_1 = 1$; donc $A = 1 = C_n$.

2.° $D_n = D_{n-1}$, partant, $D_n = A$, & ${}_2y_x = 2^{x-1} \cdot [\frac{(x-1)}{1} + A]$. Or, posant $x = 1$, ${}_2y_1 = 0$, par la formation des suites précédentes; donc $A = 0$ & $D_n = 0$.

On trouvera semblablement $E_n = 0$, $F_n = 0$, &c. donc,

$$ {}_ny_x = 2^{x-1} \cdot [\frac{(x-1).(x-2)\ldots\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}]. $$

Soit par exemple, $x = 8$ & $n = 5$, on aura

$$ {}_5y_8 = 2^7 \cdot \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} = 4480. $$

Je prends encore pour exemple les deux équations

$$ {}_1y_x = 2 \cdot {}_1y_{x-1} $$
$$ {}_ny_x = (n+1) \cdot {}_ny_{x-1} + {}_{n-1}y_{x-1}. $$

Si l'on suppose

$$ {}_1y_1 = 0, \quad {}_2y_1 = 0, \quad {}_3y_1 = 0, \quad {}_4y_1 = 0, \quad \text{\&c.} $$

on formera les séries suivantes:

	1	2	3	4	5	6	7	8.... x
1	1	2	4	8	16	32	64	&c.
2	0	1	5	19	65	211	665	&c.
3	0	0	1	9	55	285	1351	&c.
4	0	0	0	1	14	125	910	&c.
5	0	0	0	0	1	20	245	&c.
⋮ n	&c.							

Pour trouver maintenant le terme général de ces suites, ou l'expression de ${}_{n}y_{x}$, j'observe que l'on a, par l'*art. précéd.*

$${}_{n}y_{x} = a_{n} \cdot {}_{n}y_{x-1} + {}^{1}a_{n} \cdot {}_{n}y_{x-2} + {}^{2}a_{n} \cdot {}_{n}y_{x-3} + \&c. \ldots + u_{n}$$

& que l'équation

$$1 = \frac{a_{n}}{f} + \frac{{}^{1}a_{n}}{f^{2}} + \frac{{}^{2}a_{n}}{f^{3}} + \&c.$$

est la même que celle-ci

$$0 = [1 - \tfrac{2}{f}] \cdot [1 - \tfrac{3}{f}] \cdot [1 - \tfrac{4}{f}] \ldots [1 - \tfrac{n+1}{f}];$$

enfin, que l'on a $u_{n} = 2 \cdot u_{n-1}$; d'où en intégrant $u_{n} = H \cdot 2^{n}$. Or posant $n = 1$, $u_{1} = 0$, donc $H = 0$ & $u_{n} = 0$.

En intégrant, on aura donc

$${}_{n}y_{x} = C_{n} \cdot 2^{x-1} + {}^{1}C_{n} \cdot 3^{x-1} + {}^{2}C_{n} \cdot 4^{x-1} \ldots \ldots + {}^{n-1}C_{n} \cdot (n+1)^{x-1},$$

équation dans laquelle il faut présentement déterminer les constantes arbitraires C_{n}, ${}^{1}C_{n}$, &c. Pour cela je substitue cette valeur de ${}_{n}y_{x}$ dans l'équation

$${}_{n}y_{x} = (n+1) \cdot {}_{n}y_{x-1} + {}_{n-1}y_{x-1},$$

ce qui me donne

$$C_{n} \cdot 2^{x-1} + {}^{1}C_{n} \cdot 3^{x-1} + \&c.$$
$$= (n+1) \cdot C_{n} \cdot 2^{x-2} + (n+1) \cdot {}^{1}C_{n} \cdot 3^{x-2} + \&c.$$
$$+ C_{n-1} \cdot 2^{x-2} + {}^{1}C_{n-1} \cdot 3^{x-2} + \&c.$$

d'où en comparant terme-à-terme, j'aurai

$$2 \cdot C_{n} = (n+1) \cdot C_{n} + C_{n-1}$$
$$3 \cdot {}^{1}C_{n} = (n+1) \cdot {}^{1}C_{n} + {}^{1}C_{n-1}$$
&c.

Il est visible que la première équation ne commence à avoir lieu que lorsque $n = 2$; la seconde, lorsque $n = 3$; la troisième, lorsque $n = 4$, &c. en intégrant la première, on aura $C_{n} = \frac{C_{1}}{(1-2)(1-3)(1-4)\ldots(1-n)}$. Or, puisque

l'on a ${}_1y_x = 2^{x-1}$, on aura $C_1 = 1$; donc...... $C_n = \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}$, le ſigne $+$ ayant lieu ſi n eſt impair, & le ſigne $-$ s'il eſt pair.

On aura pareillement ${}'C_n = \frac{{}'C_2}{(2-3).(2-4)\ldots(2-n)}$. Or, poſant $n = 2$, on a

${}_2y_x = C_2 . 2^{x-1} + {}'C_2 . 3^{x-1} = {}'C_2 . 3^{x-1} - 2^{x-1}$. Donc, puiſque ${}_2y_1 = 0$, on aura ${}'C_2 = 1$. Partant, ${}'C_n = \mp \frac{1}{1.2.3\ldots(n-2)}$, le ſigne $+$ ayant lieu ſi n eſt pair, & le ſigne $-$ s'il eſt impair. On trouvera, par un calcul ſemblable,

$$ {}^2C_n = \pm \frac{1}{1.2} . \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(n-3)} $$

$$ {}^3C_n = \mp \frac{1}{1.2.3} . \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(n-4)} $$

&c.

Donc,

$$ {}_ny_x = \pm . \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} . \left\{ \begin{array}{l} 2^{x-1} - \frac{(n-1)}{1} . 3^{x-1} + \frac{(n-1).(n-2)}{1.2} . 4^{x-1} \\ - \frac{(n-1).(n-2).n-3)}{1.2.3} . 5^{x-1} \ldots \pm (n+1)^{x-1} \end{array} \right\} $$

le ſigne $+$ ayant lieu ſi n eſt impair, & le ſigne $-$ s'il eſt pair. Soit $n = 4$ & $x = 7$, on aura

$$ {}_4y_7 = - \frac{1}{1.2.3} . [2^6 - 3 . 3^6 + 4 . 4^6 - 5^6] = 910. $$

XXII.

PROBLEME VII.

L'équation différentielle

$$ {}_ny_x + A_n . {}_ny_{x-1} + {}'A_n . {}_ny_{x-2} + \&c. + N_n $$
$$ = B_n . {}_{n-1}y_x + {}'B_n . {}_{n-1}y_{x-1} + \&c. $$
$$ + C_n . {}_{n-2}y_x + {}'C_n . {}_{n-2}y_{x-1} + \&c. $$

étant donnée, on propoſe de l'intégrer.

En suivant l'analyse du Problème précédent, je fais ${}_1y_x = \varphi(x)$ & ${}_2y_x = {}'\varphi(x)$; l'équation proposée donnera donc

$$\begin{aligned} {}_3y_x &+ A_3 . {}_3y_{x-1} + {}'A_3 . {}_3y_{x-2} + \&c.\ldots + N_3 \\ &= B_3 . {}'\varphi(x) + {}'B_3 . {}'\varphi(x-1) + \&c. \\ &+ C_3 . \varphi(x) + {}'C_3 . \varphi(x-1) + \&c. \end{aligned}$$

&

$$\begin{aligned} {}_4y_x &+ A_4 . {}_4y_{x-1} + {}'A_4 . {}_4y_{x-2} + \&c.\ldots + N_4 \\ &= B_4 . {}_3y_x + {}'B_4 . {}_3y_{x-1} + \&c. \\ &+ C_3 . {}'\varphi(x) + {}'C_3 . {}'\varphi(x-1) + \&c. \end{aligned}$$

d'où l'on tirera

$$\begin{aligned} {}_4y_x &+ A_4 . {}_4y_{x-1} + {}'A_4 . {}_4y_{x-2} + \&c.\ldots + N_4 \\ &+ A_3 . [{}_4y_{x-1} + A_4 . {}_4y_{x-2} + \&c.] \\ &+ \&c. \\ &= B_3 . [{}_3y_x + A_3 . {}_3y_{x-1} + \&c.] \\ &+ {}'B_3 . [{}_3y_{x-1} + A_3 . {}_3y_{x-2} + \&c.] \\ &+ \&c. \\ &+ C_3 . {}'\varphi(x) + {}'C_3 . {}'\varphi(x-1) + \&c. \\ &+ A_3 . C_3 . {}'\varphi(x-1) + \&c. \end{aligned}$$

Or, si l'on substitue dans cette équation au lieu de

$$\begin{aligned} &{}_3y_x + A_3 . {}_3y_{x-1} + \&c. \\ &{}_3y_{x-1} + A_3 . {}_3y_{x-2} + \&c. \end{aligned}$$

leurs valeurs, on aura une équation de cette forme

$${}_4y_x = a_4 . {}_4y_{x-1} + {}^1a_4 . {}_4y_{x-2} + {}^2a_4 . {}_4y_{x-3} + \&\ldots + {}_4u_x.$$

Cette équation s'intégrera par ce qui précède, dès que l'on connoîtra ${}_4u_x$ & les racines de l'équation

$$1 = \frac{a_4}{f} + \frac{{}^1a_4}{f^2} + \frac{{}^2a_4}{f^3} + \&c.$$

Or, il est aisé de voir que cette équation est la même que celle-ci,

$$o = [1 + \frac{A_3}{f} + \frac{{}^1A_3}{f^2} + \&c.] . [1 + \frac{A_4}{f} + \frac{{}^1A_4}{f^2} + \&c.]$$

En suivant le même procédé pour ${}_5y_x$, ${}_6y_x$, &c. & généralement pour ${}_ny_x$, on parviendra à une équation de cette forme

$${}_ny_x = a_n . {}_ny_{x-1} + {}^1a_n . {}_ny_{x-2} + {}^2a_n . {}_ny_{x-3} + \&c... + {}_nu_x \text{(A)},$$

équation qui sera facilement intégrable, lorsqu'on connoîtra ${}_nu_x$ & les racines de l'équation

$$1 = \frac{a_n}{f} + \frac{{}^1a_n}{f^2} + \frac{{}^2a_n}{f^3} + \&c.$$

Or, on trouvera facilement que cette équation est la même que celle-ci,

$$o = [1 + \frac{A_3}{f} + \frac{{}^1A_3}{f^2} + \&c.] . [1 + \frac{A_4}{f} + \frac{{}^1A_4}{f^2} + \&c.]...$$
$$[1 + \frac{A_n}{f} + \frac{{}^1A_n}{f^2} + \&c.]$$

d'où il est facile de conclure a_n, ${}^1a_n$, &c.

Pour déterminer présentement ${}_nu_x$, j'observe que l'équation (A), combinée avec celle du Problème, donne la suivante

$$\begin{aligned}{}_ny_x - a_n . {}_ny_{x-1} - {}^1a_n . {}_ny_{x-2} - \&c. + N_n [1 - a_n - {}^1a_n - \&c.]\\ + A_n . [{}_ny_{x-1} - {}^1a_n . {}_ny_{x-2} - \&c.]\\ + \&c.\\ = B_n [{}_{n-1}y_x - a_n . {}_{n-1}y_{x-1} - \&c.]\\ + \&c.\\ + C_n . [{}_{n-1}y_x - a_n . {}_{n-1}y_{x-1} - \&c.]\\ + \&c.\end{aligned}$$

Or, on a

$${}_ny_x - a_n . {}_ny_{x-1} - \&c. = {}_nu_x$$
$${}_ny_{x-1} - a_n . {}_ny_{x-2} - \&c. = {}_nu_{x-1}$$
&c.

de plus, $_{n-1}y_x - a_n \cdot _{n-1}y_{x-1} - {}'a_n \cdot _{n-1}y_{x-2} -$ &c.

$$= _{n-}y_x - a_{n-1} \cdot _{n-1}y_{x-1} - \&c.$$
$$+ A_n \cdot [_{n-1}y_{x-1} - a_{n-1} \cdot _{n-1}y_{x-2} - \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$= _{n-1}u_x + A_n \cdot _{n-1}u_{x-1} + \&c.$$

pareillement,

$$\left.\begin{array}{l} _{n-1}y_x - a_{n-1} \cdot _{n-2}y_{x-1} - \&c. \\ = _{n-2}y_x - a_{n-2} \cdot _{n-2}y_{x-1} - \&c. \\ + A_{n-1} [_{n-2}y_{x-1} - \&c.] \\ + \&c. \end{array}\right\} = _{n-2}u_x + A_{n-1} \cdot _{n-2}u_{x-1} + \&c.$$

$$\& \; _{n-1}y_x - a_n \cdot _{n-2}y_{x-1} - \&c. = _{n-2}y_x - a_{n-1} \cdot _{n-2}y_{x-1} - \&c.$$
$$+ A_n \cdot [_{n-2}y_{x-1} - \&c.]$$
$$+ \&c.$$

$$= _{n-2}u_x + A_{n-1} \cdot _{n-2}u_{x-1} + \&c.$$
$$+ A_n \cdot [_{n-2}u_{x-1} + A_{n-1} \cdot _{n-2}u_{x-2} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$

donc,

$$_nu_x + A_n \cdot _nu_{x-1} + {}'A_n \cdot _nu_{x-2} + \&c. + N_n [1 - a_n - {}'a_n - \&c.]$$
$$= B_n \cdot [_{n-1}u_x + A_n \cdot _{n-1}u_{x-1} + \&c.] + {}'B_n \cdot [_{n-1}u_{x-1} + \&c.] + \&c.$$
$$+ C_n \left\{\begin{array}{l} _{n-2}u_x + A_{n-1} \cdot _{n-2}u_{x-1} + \&c. \\ + A_n [_{n-2}u_{x-1} + A_{n-1} \cdot _{n-2}u_{x-2} + \&c.] \\ + \&c. \end{array}\right. \qquad (V)$$
$$+ \&c.$$

pour intégrer cette équation, on obſervera que la valeur de $_nu_x$ doit avoir cette forme,

$$_nu_x = b_n \cdot \varphi(x) + {}'b_n \cdot \varphi(x-1) + {}^2b_n \cdot \varphi(x-2) + \&c.$$
$$+ c_n \cdot {}'\varphi(x) + {}'c_n \cdot {}'\varphi(x-1) + {}^2c_n \cdot {}'\varphi(x-2) + \&c. + g_n$$

Il ne s'agit plus maintenant que de déterminer b_n, $'b_n$, &c. c_n, $'c_n$, &c. g_n. Pour cela, on ſubſtituera cette valeur de

${}_n u_x$ dans l'équation (V), ce qui donne

$$b_n . \varphi(x) + \varphi(x-1) . [{}'b_n + A_n . b_n] + \&c.$$
$$+ c_n . {}'\varphi(x) + {}'\varphi(x-1) . [{}'c_n + A_n . c_n] + \&c.$$
$$= \varphi(x) . [B_n . b_{n-1} + C_n . b_{n-2}]$$
$$+ \varphi(x-1) . \left\{ \begin{array}{l} B_n . {}'b_{n-1} + B_n . A_n . b_{n-1} \\ + {}'B_n . b_{n-1} + C_n . {}'b_{n-2} \\ + C_n . A_{n-1} . b_{n-1} + C_n . A_n . b_{n-2} \\ + {}'C_n . b_{n-2} \end{array} \right.$$
$$+ \&c.$$
$$+ {}'\varphi(x) . [B_n . c_{n-1} + C_n . c_{n-2}]$$
$$+ {}'\varphi(x-1) . \left\{ \begin{array}{l} B_n . {}'c_{n-1} + B_n . A_n . c_{n-1} + {}'B_n . c_{n-1} \\ + C_n . {}'c_{n-2} + C_n . A_{n-1} . c_{n-1} + C_n . A_n . c_{n-2} \\ + {}'C_n . c_{n-2} \end{array} \right.$$
$$+ \&c.$$

d'où l'on aura

$$b_n = B_n . b_{n-1} + C_n . b_{n-2}$$
$${}'b_n = B_n . {}'b_{n-1} + C_n . {}'b_{n-2} + b_{n-1} . [B_n . A_n + {}'B_n + C_n . A_{n-1}]$$
$$+ b_{n-2} . [C_n . A_n + \quad + {}'C_n]$$
$$\&c.$$
$$c_n = B_n . c_{n-1} + C_n . c_{n-2}$$
$$\&c.$$

en intégrant, on aura les valeurs de b_n, ${}'b_n$, &c. c_n, ${}'c_n$, &c.

Ces équations montant aux secondes différences, leur intégrale doit renfermer deux constantes arbitraires. Or, en supposant $n = 1$, ${}_n y_x = \varphi(x)$. On doit donc avoir alors

$$b_n = 1, \; {}'b_n = 0, \; {}^2b_n = 0, \; \&c.$$
$$c_n = 0, \; {}'c_n = 0, \; {}^2c_n = 0, \; \&c.$$

De plus, en supposant $n = 2$, ${}_n y_x = {}'\varphi(x)$. Donc alors

$$b_n = 0, \; {}'b_n = 0, \; {}^2b_n = 0, \; \&c.$$
$$c_n = 1, \; {}'c_n = 0, \; {}^2c_n = 0, \; \&c.$$

Au-

au moyen de ces conditions, il ſera facile de déterminer les conſtantes arbitraires. Connoiſſant ainſi l'expreſſion de ${}_n u_x$, il ne s'agira plus que d'intégrer l'équation (Λ), & les conſtantes arbitraires que l'intégration introduit, leſquelles peuvent être fonctions de n, ſe détermineront par la méthode que j'ai donnée *article XX.*

Si au lieu des deux équations

$$ {}_1y_x = \varphi(x) $$
$$ {}_2y_x = {}'\varphi(x) $$

on avoit les deux ſuivantes:

$$ {}_1y_x + E.{}_1y_{x-1} + {}'E.{}_1y_{x-2} + \&c. + K = 0. $$
$$ {}_2y_x + H.{}_2y_{x-1} + {}'H.{}_2y_{x-2} + \&c. + L $$
$$ = F.y_x + {}'F.{}_1y_{x-1} + \&c. $$

On parviendra, par la méthode précédente, à une équation de cette forme:

$$ {}_ny_x = a_n.{}_ny_{x-1} + {}'a_n.{}_ny_{x-2} + \&c. + {}_nu_x, $$

& l'on trouvera que l'équation

$$ 1 = \frac{a_n}{f} + \frac{{}'a_n}{f^2} + \&c. \text{ eſt la même que celle-ci.} $$

$$ 0 = \left[1 + \frac{E}{f} + \frac{{}'E}{f^2} + \&c.\right].\left[1 + \frac{H}{f} + \frac{{}'H}{f^2} + \&c.\right]. $$
$$ \left[1 + \frac{A_3}{f} + \&c.\right]\ldots\ldots\left[1 + \frac{A_n}{f} + \&c.\right] $$

Pour déterminer u_n, on doit obſerver que dans ce cas l'équation (V) devient

$$ u_n[1 + A_n + {}'A_n + \&c.] + N_n.[1 - a_n - {}'a_n - \&c.] $$
$$ = u_{n-1}[1 + A_n + \&c.].[B_n + {}'B_n + \&c.] $$
$$ + u_{n-2}[1 + A_{n-1} + \&c.].[1 + A_n + \&c.].[C_n + \&c.] $$

or, $1 - a_n - {}'a_n - \&c. = [1 - a_{n-1} - {}'a_{n-1} - \&c.].$
$$ [1 + A_n + {}'A_n + \&c.]. $$

donc, $u_n = N_n \left\{ \begin{matrix} a_{n-1} + 'a_{n-1} + \&c. \\ - 1 \end{matrix} \right\}$

$$+ u_{n-1} . [B_n + 'B_n + \&c.]$$

$$+ u_{n-2} . [1 + A_{n-1} + \&c.] . [C_n + 'C_n + \&c.]$$

cette équation étant différentielle du second ordre, renferme deux constantes arbitraires; elles se détermineront au moyen des valeurs de u_1 & u_2. Or, on a

$$u_1 = - L$$

$$\& \; u_2 = - L . [1 + E + 'E + \&c.] - K . [F + 'F + \&c.]$$

XXIII.

Quoique dans les deux derniers Problèmes, les équations aux différences partielles considérées par rapport à la variable n, ne passent pas le second ordre, on voit cependant que la méthode réussira généralement, quel que soit le degré de la différence des variables. Cette méthode suppose à la vérité que ${}_1y_x$, ou ${}_1y_x$ & ${}_2y_x$, &c. suivant le degré de la différence de n, sont données en fonctions de x, ou par des équations linéaires entre x & ces quantités; or, il peut arriver que cela ne soit pas. Je suppose, par exemple, que l'on ait les équations suivantes:

$${}_1y_x = {}_2y_{x-1}$$
$${}_2y_x = {}_1y_{x-1} + {}_3y_{x-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$${}_ny_x = {}_{n-1}y_{x-1} + {}_{n+1}y_{x-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$${}_my_x = {}_{m-1}y_{x-1}$$

L'équation ${}_ny_x = {}_{n-1}y_{x-1} + {}_{n+1}y_{x-1}$, est aux différences partielles; mais elle diffère des équations précédentes: 1.° en ce que ${}_1y_x$ & ${}_2y_x$ ne sont point données en fonctions de x, ou par deux équations différentielles. 2.° En ce qu'elle

cesse d'avoir lieu lorsque $n = m$. Comme ce genre d'équations se rencontre quelquefois, & principalement dans l'analyse des hasards, je vais donner ici la manière de les intégrer.

J'observe pour cela, que si l'on pouvoit réduire l'équation ${}_{n}y_{x} = {}_{n-1}y_{x-1} + {}_{n+1}y_{x-1}$, laquelle est du troisième ordre par rapport à n, à une autre du second ordre, le Problème seroit résolu; je suppose en effet que l'équation du second ordre soit

$$\begin{aligned} {}_{n}y_{x} = a_{n} \cdot {}_{n}y_{x-1} + {}^{1}a_{n} \cdot {}_{n}y_{x-2} + \&c. \ldots + u_{n} \\ + b_{n} \cdot {}_{n+1}y_{x} + {}^{1}b_{n} \cdot {}_{n+1}y_{x-1} + \&c. \end{aligned}$$

Dans le cas de $n = m - 1$, on aura

$$\begin{aligned} {}_{m-1}y_{x} = a_{m-1} \cdot {}_{m-1}y_{x-1} + {}^{1}a_{m-1} \cdot {}_{m-1}y_{x-2} + \&c. + u_{m-1} \\ + b_{m-1} \cdot {}_{m}y_{x} + \&c. \end{aligned}$$

d'où éliminant ${}_{m-1}y_{x}$, au moyen de l'équation ${}_{m}y_{x} = {}_{m-1}y_{x-1}$; on aura une équation aux différences ordinaires entre x & ${}_{m}y_{x}$.

Toute la difficulté consiste donc à abaisser l'équation du troisième ordre par rapport à n;

$${}_{n}y_{x} = {}_{n-1}y_{x-1} + {}_{n+1}y_{x-1}$$

à une du second ordre; c'est l'objet du Problème suivant.

PROBLEME VIII.

L'équation aux différences partielles du second ordre par rapport à n,

$$\begin{aligned} {}_{n}y_{x} = A_{n} \cdot {}_{n}y_{x-1} + {}^{1}A_{n} \cdot {}_{n}y_{x-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + N_{x} \\ + B_{n} \cdot {}_{n+1}y_{x} + {}^{1}B_{n} \cdot {}_{n+1}y_{x-1} + {}^{2}B_{n} \cdot {}_{n+1}y_{x-2} + \&c. \quad (\gamma) \\ + C_{n} \cdot {}_{n-1}y_{x} + {}^{1}C_{n} \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + {}^{2}C_{n} \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + \&c. \end{aligned}$$

étant donnée, il faut l'abaisser à une autre du premier ordre par rapport à n.

Il est nécessaire pour cela que dans une supposition particulière pour n, cette équation se réduise à une du premier ordre. Je suppose donc qu'en faisant $n = 2$, on ait celle-ci;

$$\left.\begin{array}{l} {}_1y_x = F \cdot {}_1y_{x-1} + {}'F \cdot {}_1y_{x-2} + \&c. + L \\ + H \cdot {}_2y_x \quad + {}'H \cdot {}_2y_{x-1} + \&c. \end{array}\right\} (\eta)$$

Il est aisé de voir, cela posé, que l'équation (γ) peut toujours être transformée dans la suivante (θ) du second ordre par rapport à n.

$$\begin{array}{l} {}_ny_x = a_n \cdot {}_ny_{x-1} + {}'a_n \cdot {}_ny_{x-2} + {}^2a_n \cdot {}_ny_{x-3} + \&c. \ldots + u_n \; (\theta) \\ + b_n \cdot {}_{n+1}y_x \quad + {}'b_n \cdot {}_{n+1}y_{x-1} + {}^2b_n \cdot {}_{n+1}y_{x-2} + \&c. \end{array}$$

dont on déterminera les coëfficiens a_n, $'a_n$, &c. b_n, $'b_n$, &c. de cette manière; l'équation (θ) donne celle-ci.

$$C_n \cdot {}_{n-1}y_x = C_n \cdot \left\{\begin{array}{l} a_{n-1} \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + {}'a_{n-1} \cdot {}_{n-1}y_{x-2} \\ + {}^2a_n \cdot {}_{n-1}y_{x-3} + \&c. \ldots + u_{n-1} \\ + b_{n-1} \cdot {}_ny_x + {}'b_{n-1} \cdot {}_ny_{x-1} \\ + {}^2b_{n-1} \cdot {}_ny_{x-2} + \&c. \end{array}\right.$$

$${}'C_n \cdot {}_{n-1}y_{x-1} = {}'C_n \cdot \left\{\begin{array}{l} a_{n-1} \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + {}'a_{n-1} \cdot {}_{n-1}y_{x-3} \\ + \&c. \ldots\ldots\ldots + u_{n-1} \\ + b_{n-1} \cdot {}_ny_{x-1} + {}'b_{n-1} \cdot {}_ny_{x-2} \\ + \&c. \end{array}\right.$$

&c.

Si l'on ajoute ces différentes équations membre-à-membre, & que l'on substitue dans leur somme, au lieu de

$$\begin{array}{l} C_n \cdot {}_{n-1}y_x \quad + {}'C_n \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + \&c. \\ C_n \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + {}'C_n \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + \&c. \end{array}$$

leurs valeurs que fournit l'équation (γ), on aura, après avoir ordonné

$$\begin{array}{l} {}_ny_x = {}_ny_{x-1} \cdot \dfrac{\left\{\begin{array}{l} a_{n-1} + A_n \\ + b_{n-1} \cdot {}'C_n + {}'b_{n-1} \cdot C_n \end{array}\right\}}{1 - b_{n-1} \cdot C_n} \\ + {}_ny_{x-2} \cdot \left\{\begin{array}{l} {}'a_{n-1} - a_{n-1} \cdot A_n + {}'A_n \\ + b_{n-1} \cdot {}^2C_n + {}'b_{n-1} \cdot {}'C_n + {}^2b_{n-1} \cdot C_n \end{array}\right\} \\ + {}_ny_{x-3} \cdot \dfrac{\left\{\begin{array}{l} {}^2a_{n-1} - {}'a_{n-1} \cdot A_n - a_{n-1} \cdot {}'A_n + {}^2A_n \\ + b_{n-1} \cdot {}^3C_n + {}'b_{n-1} \cdot {}^2C_n + {}^2b_{n-1} \cdot {}'C_n + {}^3b_{n-1} \cdot C_n \end{array}\right\}}{1 - b_{n-1} \cdot C_n} \\ + \&c. \end{array}$$

$$+ {}_{n+1}y_{x-1} \cdot \frac{B_n}{1 - b_{n-1} \cdot C_n}$$

$$+ {}_{n+1}y_{x-1} \cdot \frac{({}^1B_n - a_{n-1} \cdot B_n)}{1 - b_{n-1} \cdot C_n}$$

$$+ {}_{n+1}y_{x-2} \cdot \frac{({}^2B_n - a_{n-1} \cdot {}^1B_n - {}^1a_{n-1} B_n)}{1 - b_{n-1} \cdot C_n}$$

$$+ \&c.$$

$$+ \quad u_{n-1} \cdot \frac{C_n + {}^1C_n + {}^2C_n + \&c.}{1 - b_{n-1} \cdot C_n}$$

$$+ \quad N_n \cdot \frac{(1 - a_{n-1} - {}^1a_{n-1} - {}^2a_{n-1} - \&c.)}{1 - b_{n-1} \cdot C_n}$$

En comparant cette équation avec l'équation (θ), on aura

$$1.° \; b_n = \frac{B_n}{1 - C_n \cdot b_{n-1}}.$$

Pour intégrer cette équation, je fais $b_n = -\frac{z_{n-1}}{z_n}$; ce qui donne $0 = z_{n-1} + C_n \cdot z_{n-2} + B_n \cdot z_n$; équation linéaire aux différences ordinaires.

$$2.° \; {}^1b_n = \frac{{}^1B_n - a_{n-1} \cdot B_n}{1 - C_n \cdot b_{n-1}}$$

$$3.° \; a_n = \frac{A_n + a_{n-1} + {}^1b_{n-1} \cdot C_n + b_{n-1} \cdot {}^1C_n}{1 - C_n \cdot b_{n-1}}$$

de la première de ces équations on aura

$${}^1b_{n-1} = \frac{{}^1B_{n-1} - a_{n-2} B_{n-1}}{1 - C_{n-1} \cdot b_{n-2}};$$

substituant cette valeur de b_{n-1} dans la seconde, on aura

$$a_n = \frac{A_n + a_{n-1} + C_n \frac{({}^1B_{n-1} - a_{n-2} B_{n-1})}{1 - C_{n-1} \cdot b_{n-2}} + b_{n-1} \cdot {}^1C_n}{1 - C_{n-1} \cdot b_{n-1}}$$

d'où l'on aura a_n, partant ${}^1b_n$, & ainsi du reste.

Enfin, on déterminera u_n par cette équation

$$u_n = u_{n-1} \cdot \frac{(C_n + {}^1C_n + \&c.) + N_n \cdot (1 - a_{n-1} - {}^1a_{n-1} - \&c.)}{1 - C_n \cdot b_{n-1}}$$

L'équation (γ) du fecond ordre par rapport à n, fera donc abaiffée à une autre (θ) du premier ordre; & l'on voit que la méthode précédente réuffira généralement, quel que foit l'ordre de la propofée.

XXIV.

Des Équations aux différences finies & partielles à quatre variables.

Jufques ici j'ai confidéré les équations aux différences partielles entre trois variables ${}_{n}y_{x}$, n & x; je vais préfentement dire un mot de celles qui en renferment un plus grand nombre.

Je fuppofe que ${}_{(m)(n)}y_{x}$ repréfente une fonction des trois variables x, m & n, dont je regarde les différences comme conftantes & égales à l'unité, je puis dans cette fonction, faire varier m, n & x féparément, ou deux de ces quantités à la fois, ou toutes trois enfemble dans un rapport quelconque; or, s'il exifte une équation entre ces différentes variations, elle fera ce que je nomme équation aux différences partielles à quatre variables; cela pofé.

PROBLEME IX.

Je fuppofe que l'on ait l'équation aux différences partielles à quatre variables,

$$\begin{aligned} &{}_{(m)(n)}y_{x} + {}_{m}A_{n} \cdot {}_{(m)(n)}y_{x-1} + {}_{m}^{1}A_{n} \cdot {}_{(m)(n)}y_{x-2} + \text{\&c.} \ldots + {}_{m}N_{n} \\ &+ {}_{m}B_{n} \cdot {}_{(m)(n-1)}y_{x} + {}_{m}^{1}B_{n} \cdot {}_{(m)(n-1)}y_{x-1} + {}_{m}^{2}B_{n} \cdot {}_{(m)(n-1)}y_{x-2} + \text{\&c.} \quad (\Omega) \\ &= {}_{m}C_{n} \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x} + {}_{m}^{1}C_{n} \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-1} + {}_{m}^{2}C_{n} \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-2} + \text{\&c.} \end{aligned}$$

on propofe de déterminer ${}_{(m)(n)}y_{x}$

Je fuppofe que dans le cas de $n = 1$, on ait, ou l'on puiffe avoir, l'équation fuivante.

$${}_{(m)(1)}y_{x} + D_{m} \cdot {}_{(m)(1)}y_{x-1} + {}^{1}D_{m\,(m)(1)}y_{x-2} + \text{\&c.} + L_{m} = 0$$

& que dans le cas de $m = 1$ on ait, ou l'on puiffe avoir, celle-ci,

$${}_{(1)(n)}y_x + E_n \cdot {}_{(1)(n)}y_{x-1} + {}'E_n \cdot {}_{(1)(n)}y_{x-2} + \&c\ldots + {}'H_n = 0,$$

on pourra dans ce cas transformer l'équation (Ω) dans la ſuivante.

$${}_{(m)(n)}y_x = {}_m a_n \cdot {}_{(m)(n)}y_{x-1} + {}_m{}^1a_n \cdot {}_{(m)(n)}y_{x-2} + {}_m{}^2a_n \cdot {}_{(m)(n)}y_{x-3} + \&c\ldots + {}_m u_n \quad (\pi)$$

dont on déterminera les coëfficiens de cette manière.

Cette équation donne

$${}_mC_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_x = {}_mC_n \cdot [{}_{m-1}a_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-1} + {}_{m-1}{}^1a_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-2} + \&c\ldots + {}_{m-1}u_n]$$

$${}_mC_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-1} = {}_mC_n \cdot [{}_{m-1}a_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-2} + {}_{m-1}{}^1a_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-3} + \&c\ldots + {}_{m-1}u_n]$$

&c.

Si l'on ajoute toutes ces équations membre-à-membre, & qu'on élimine les quantités

$${}_mC_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_x + {}_m{}^1C_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-1} + \&c.$$

$${}_mC_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-1} + {}_m{}^1C_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-2} + \&c.$$

au moyen de l'équation (Ω), on aura

$$\begin{aligned}
{}_{(m)(n)}y_x = {} & {}_{(m)(n)}y_{x-1} \cdot [{}_{m-1}a_n - {}_mA_n] \\
& + {}_{(m)(n)}y_{x-2} \cdot [{}_{m-1}{}^1a_n + {}_{m-1}a_n \cdot {}_mA_n - {}_m{}^1A_n] \\
& + {}_{(m)(n)}y_{x-3} \cdot [{}_{m-1}{}^2a_n + {}_{m-1}{}^1a_n \cdot {}_mA_n + {}_{m-1}a_n \cdot {}_mA_n - {}_m{}^2A_n] \\
& + \&c. \\
& - {}_{(m)(n-1)}y_x \cdot {}_mB_n \qquad (\sigma) \\
& + {}_{(m)(n-1)}y_{x-1} \cdot [- {}_m{}^1B_n + {}_{m-1}a_n \cdot {}_mB_n] \\
& + {}_{(m)(n-1)}y_{x-2} \cdot [- {}_m{}^2B_n + {}_{m-1}{}^1a_n \cdot {}_mB_n + {}_{m-1}a_n \cdot {}_m{}^1B_n] \\
& + \&c. \\
& + {}_{m-1}u_n \cdot [{}_mC_n + {}_m{}^1C_n + \&c.] \\
& - {}_mN_n \cdot [1 - {}_{m-1}a_n - {}_{m-1}{}^1a_n - \&c.]
\end{aligned}$$

Cette équation eſt aux différences partielles entre trois variables en conſidérant m comme conſtante, & elle eſt compriſe dans celle du *Problème VI de l'article XX.* Or, puiſque l'équation (σ) peut être transformée dans l'équation (π), on aura par l'*art. XX*, les équations ſuivantes.

$${}_ma_x = {}_ma_{x-1} + {}_{m-1}a_n - {}_mA_n$$

$$_{m}{}^{1}a_{n} = {}_{m}{}^{1}a_{n-1} + {}_{m-1}{}^{1}a_{n} + {}_{m-1}a_{n} \cdot {}_{m}A_{n} - {}_{m}{}^{1}A_{x}$$
$$- {}_{m}a_{n-1} \cdot [{}_{m-1}a_{n} - {}_{m}A_{n}]$$

&c.

$${}_{m}u_{n} = {}_{m}n_{n-1} \cdot [- {}_{m}B_{n} - {}_{m}{}^{1}B_{n} + {}_{m-1}a_{n} \cdot {}_{m}B_{n} + \&c.]$$
$$+ {}_{m-1}u_{n} \cdot [{}_{m}C_{n} + {}_{m}{}^{1}C_{n} + \&c.] \cdot [1 - {}_{m}a_{n-1} - {}_{m}{}^{1}a_{n-1} - \&c.]$$
$$- {}_{m}N_{n} \cdot [1 - {}_{m-1}a_{n} - {}_{m-1}{}^{1}a_{n} - \&c.] \cdot [1 - {}_{m}a_{n-1} - {}_{m}{}^{1}a_{n-1} - \&c.]$$

Ces équations ſont aux différences partielles à trois variables; pour les intégrer, j'obſerve qu'elles ſont toutes compriſes dans celle-ci.

$${}_{n}y_{x} = {}_{n}R_{x} \cdot {}_{n}y_{x-1} + {}_{n}T_{x} \cdot {}_{n-1}y_{x} + {}_{n}M_{x} \ (b).$$

Je ſuppoſe donc que dans le cas de $n = 1$, on ait ${}_{1}y_{x} = \varphi\,(x)$. Cela poſé, on pourra toujours transformer l'équation *(b)* dans la ſuivante.

$${}_{n}y_{x} = {}_{n}b_{x} \cdot {}_{n}y_{x-1} + {}_{n}{}^{1}b_{x} \cdot {}_{n}y_{x-1} + {}_{n}{}^{2}b_{x} \cdot {}_{n}y_{x-2} + \&c. \ldots$$
$$+ {}_{n}z_{x} \ (l)$$

d'où l'on aura celle-ci;

$${}_{n-1}y_{x} \cdot {}_{n}T_{x} = {}_{n}T_{x} \cdot [{}_{n-1}b_{x} \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + {}_{n-1}{}^{1}b_{x} \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + \&c.]$$
$$+ {}_{n}T_{x} \cdot {}_{n-1}z_{x}$$

Si l'on y ſubſtitue au lieu de ${}_{n}T_{x} \cdot {}_{n-1}y_{x}$, ${}_{n}T_{x} \cdot {}_{n-1}y_{x-1}$, &c. leurs valeurs tirées de l'équation *(b)*, on aura

$${}_{n}y_{x} = {}_{n}R_{x} \cdot {}_{n}y_{x-1} + {}_{n}M_{x}$$
$$+ {}_{n-1}b_{x} \cdot [{}_{n}y_{x-1} - {}_{n}R_{x-1} \cdot {}_{n}y_{x-2} - {}_{n}M_{x-1}] \cdot \frac{{}_{n}T_{x}}{{}_{n}T_{x-1}}$$
$$+ {}_{n-1}{}^{1}b_{x} \cdot [{}_{n}y_{x-2} - {}_{n}R_{x-2} \cdot {}_{n}y_{x-1} - {}_{n}M_{x-2}] \cdot \frac{{}_{n}T_{x}}{{}_{n}T_{x-2}}$$
$$+ \&c.$$
$$+ {}_{n}T_{x} \cdot {}_{n-1}z_{x}$$

d'où l'on tirera, en comparant cette équation avec l'équation *(l)*,

$${}_{n}b_{x} = {}_{n-1}b_{x} \cdot \frac{{}_{n}T_{x}}{{}_{n}T_{x-1}} + {}_{n}R_{x}$$

&c.

${}_{n}z_{x}$

$$ {}_{n}z_{x} = {}_{n-1}z_{x} \cdot {}_{n}T_{x} + {}_{n}M_{x} - {}_{n-1}b_{x} \cdot {}_{n}M_{x-1} \cdot \frac{{}_{n}T_{x}}{{}_{n}T_{x-1}} $$
$$ - \&c. $$

équations qui s'intègrent facilement par le Problème I.^{er} en regardant *n* ſeule comme variable.

On pourroit faire des recherches analogues ſur les équations aux différences partielles à cinq, ſix, &c. variables, & l'on voit que la méthode précédente réuſſira généralement, quel que ſoit le nombre de ces variables.

X X V.

Application des Recherches précédentes à l'analyſe des Haſards.

L'état préſent du ſyſtème de la Nature eſt évidemment une ſuite de ce qu'il étoit au moment précédent, & ſi nous concevons une Intelligence qui, pour un inſtant donné, embraſſe tous les rapports des êtres de cet Univers, elle pourra déterminer pour un temps quelconque pris dans le paſſé ou dans l'avenir, la poſition reſpective, les mouvemens, & généralement les affections de tous ces êtres.

L'Aſtronomie-Phyſique, celle de toutes nos connoiſſances qui fait le plus d'honneur à l'eſprit humain, nous offre une idée, quoiqu'imparfaite, de ce que ſeroit une ſemblable Intelligence. La ſimplicité de la loi qui fait mouvoir les Corps céleſtes, les rapports de leurs maſſes & de leurs diſtances, permettent à l'analyſe de ſuivre, juſqu'à un certain point, leurs mouvemens; & pour déterminer l'état du ſyſtème de ces grands Corps dans les ſiècles paſſés ou futurs, il ſuffit au Géomètre que l'obſervation lui donne leur poſition & leur vîteſſe pour un inſtant quelconque: l'homme doit alors cet avantage à la puiſſance de l'inſtrument qu'il emploie, & au petit nombre de rapports qu'il embraſſe dans ſes calculs; mais l'ignorance des différentes cauſes qui concourent à la production des évènemens, & leur complication jointe à l'imperfection de l'analyſe, l'empêchent de

prononcer avec la même certitude ſur le plus grand nombre des phénomènes; il y a donc pour lui des choſes incertaines, il y en a de plus ou moins probables. Dans l'impoſſibilité de les connoître, il a cherché à s'en dédommager en déterminant leurs différens degrés de vraiſemblance, en ſorte que nous devons à la foibleſſe de l'eſprit humain, une des théories les plus délicates & les plus ingénieuſes des Mathématiques, ſavoir, la ſcience des haſards ou des probabilités.

Avant que d'aller plus loin, il importe de fixer le ſens de ces mots *haſard* & *probabilité.* Nous regardons une choſe comme l'effet du haſard, lorſqu'elle n'offre à nos yeux rien de régulier, ou qui annonce un deſſein, & que nous ignorons d'ailleurs les cauſes qui l'ont produite. Le haſard n'a donc aucune réalité en lui-même; ce n'eſt qu'un terme propre à déſigner notre ignorance ſur la manière dont les différentes parties d'un phénomène ſe coordonnent entr'elles & avec le reſte de la Nature.

La notion de probabilité tient à cette ignorance. Si nous ſommes aſſurés que ſur deux évènemens qui ne peuvent exiſter enſemble, l'un ou l'autre doit néceſſairement arriver, & que nous ne voyons aucune raiſon pour laquelle l'un arriveroit plutôt que l'autre, l'exiſtence & la non-exiſtence de chacun d'eux eſt également probable. Pareillement, ſi des trois évènemens qui s'excluent mutuellement, l'un doit néceſſairement arriver, & que nous ne voyons aucune raiſon pour laquelle l'un arriveroit plutôt que l'autre, leur exiſtence eſt également probable; mais la non-exiſtence de chacun d'eux eſt plus probable que ſon exiſtence, & cela dans le rapport de 2 à 1, parce que ſur trois cas également probables, il y en a deux qui lui ſont favorables, & un ſeul qui lui eſt contraire.

Le nombre des cas poſſibles reſtant le même, la probabilité d'un évènement croît avec le nombre des cas favorables; au contraire le nombre des cas favorables reſtant le même, elle diminue à meſure que le nombre des cas poſſibles augmente; en ſorte qu'elle eſt en raiſon directe du nombre des

cas favorables & dans l'inverse du nombre de tous les cas possibles.

La probabilité de l'existence d'un évènement n'est, ainsi que le rapport du nombre des cas favorables, à celui de tous les cas possibles, lorsque nous ne voyons d'ailleurs aucune raison pour laquelle l'un de ces cas arriveroit plutôt que l'autre. Elle peut être conséquemment représentée par une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, & le dénominateur, celui de tous les cas possibles.

Semblablement, la probabilité de la non-existence d'un évènement est le rapport du nombre des cas qui lui sont contraires à celui de tous les cas possibles, & doit être par conséquent exprimée par une fraction dont le numérateur est le nombre des cas contraires, & le dénominateur, celui de tous les cas possibles.

Il suit de-là, que la probabilité de l'existence d'un évènement ajoutée avec la probabilité de sa non-existence, fait une somme égale à l'unité qui représente conséquemment la certitude entière, car il est visible qu'un évènement doit nécessairement ou bien arriver ou manquer.

D'ailleurs, une chose arrive certainement, lorsque tous les cas possibles lui sont favorables, & la fraction qui exprime sa probabilité est alors l'unité elle-même. La certitude peut donc être représentée par l'unité, & la probabilité par une fraction de la certitude; elle peut approcher de plus en plus de l'unité, & même en différer moins que d'aucune quantité donnée; mais elle ne peut jamais devenir plus grande. La théorie des hasards a pour objet de déterminer ces fractions, & l'on voit par-là que c'est le supplément le plus heureux que l'on puisse imaginer à l'incertitude de nos connoissances.

La certitude & la probabilité telles que nous venons de les définir, sont évidemment comparables entr'elles, & peuvent être soumises à un calcul rigoureux; il n'en est pas ainsi des états différens de l'esprit humain, lorsqu'il voit que tous les cas possibles favorisent un évènement, ou, lorsque dans

ce nombre, il en aperçoit plusieurs qui lui sont contraires. Ces deux états sont absolument incomparables, & l'on ne peut dire du premier qu'il soit double, ou triple du second, parce que la vérité est indivisible. Il arrive ici la même chose que dans toutes les Sciences Physico-Mathématiques; nous mesurons l'intensité de la lumière, les différens degrés de chaleur des corps, leurs forces, leurs résistances, &c. Dans toutes ces recherches, les causes physiques de nos sensations, & non les sensations elles-mêmes, sont l'objet de l'analyse.

La probabilité des évènemens sert à déterminer l'espérance ou la crainte des personnes intéressées à leur existence, & c'est sous ce point de vue que la science des hasards est une des plus utiles de la vie civile. Ce mot *espérance* a différentes acceptions; il exprime ordinairement l'état de l'esprit humain lorsqu'il doit lui arriver un bien quelconque dans certaines suppositions qui ne sont que vraisemblables. Dans la théorie des chances, l'espérance est le produit de la somme espérée par la probabilité de l'obtenir. Pour distinguer les deux acceptions de ce terme, j'appellerai la première, *espérance morale*, & la seconde, *espérance mathématique*.

Concevons n personnes qui aient une égale probabilité d'obtenir la somme a, & que cette somme doive certainement appartenir à l'une d'entr'elles; la probabilité totale étant 1, ou égale à la certitude, il est visible que la probabilité de chacune de ces personnes $= \frac{1}{n}$, & conséquemment leur espérance mathématique $= \frac{a}{n}$. C'est aussi la somme qui devroit leur revenir, si elles vouloient, sans courir les risques de l'évènement, partager la somme entière a.

Si l'une de ces personnes p avoit une probabilité double de celle des autres, son espérance mathématique, & par conséquent la somme qui devroit lui revenir dans le partage, seroit pareillement deux fois plus grande; car si l'on conçoit $n + 1$ personnes qui aient une égale probabilité sur la

ſomme a, leur probabilité pour l'obtenir ſera $= \frac{1}{n+1}$, & leur eſpérance mathématique $= \frac{a}{n+1}$. Or on peut ſuppoſer que l'une d'entr'elles cède ſes prétentions & ſon eſpérance à p; celle-ci acquerra conſéquemment une double probabilité & une double eſpérance exprimée par $\frac{2a}{n+1}$; & dans le partage elle doit avoir une ſomme $\frac{2a}{n+1}$ double de celle des autres perſonnes.

On voit par-là que l'eſpérance mathématique n'eſt autre choſe que la ſomme partielle qui doit revenir, lorſqu'on ne veut point courir les riſques de l'évènement, en ſuppoſant que la répartition de la ſomme entière ſe faiſſe proportionnellement à la probabilité de l'obtenir; c'eſt en effet la ſeule manière équitable de la répartir, lorſqu'on fait abſtraction de toutes circonſtances étrangères, parce qu'avec un égal degré de probabilité, on a un droit égal ſur la ſomme eſpérée.

L'eſpérance morale dépend, ainſi que l'eſpérance mathématique, de la ſomme eſpérée & de la probabilité de l'obtenir; mais elle n'eſt pas toujours proportionnelle au produit de ces deux quantités; elle ſe règle ſur mille circonſtances variables, qu'il eſt preſque toujours impoſſible de définir, & encore plus d'aſſujettir à l'analyſe; ces circonſtances, il eſt vrai, ne ſervent qu'à augmenter ou à diminuer l'avantage que procure la ſomme eſpérée, & alors on peut regarder l'eſpérance morale elle-même, comme le produit de cet avantage par la probabilité de l'obtenir; mais on doit diſtinguer dans le bien eſpéré, ſa valeur relative de ſa valeur abſolue; celle-ci eſt abſolument indépendante du beſoin & des autres raiſons qui le font deſirer, au lieu que la première croît avec ces différens motifs.

On ne peut donner aucune règle déterminée pour apprécier cette valeur relative; en voici cependant une fort ingénieuſe que M. Daniel Bernoulli propoſe dans le volume

de Péterſbourg pour l'*année 1730*. La valeur relative d'une très-petite ſomme eſt, ſuivant cet illuſtre Géomètre, proportionnelle à ſa valeur abſolue diviſée par le bien total de la perſonne intéreſſée.

Cette règle n'eſt cependant pas générale, mais elle peut ſervir dans un fort grand nombre de circonſtances, & c'eſt tout ce que l'on peut deſirer dans cette matière.

La plupart de ceux qui ont écrit ſur les haſards, ont paru confondre l'eſpérance & la probabilité morale avec l'eſpérance & la probabilité mathématique, ou régler au moins l'une ſur l'autre; ils ont voulu ainſi donner à leurs théories une étendue dont elles ne ſont pas ſuſceptibles, ce qui les a rendues obſcures & peu propres à ſatisfaire les eſprits accoutumés à la clarté rigoureuſe de la Géométrie. M. d'Alembert a propoſé contre elles des objections très-fines, qui ont réveillé l'attention des Géomètres; il a fait ſentir l'abſurdité qu'il y auroit à ſe conduire dans un grand nombre de circonſtances, d'après les réſultats du calcul des probabilités, & par conſéquent la néceſſité d'établir dans ces matières une diſtinction entre le mathématique & le moral; cette partie des Sciences lui devra donc l'avantage d'être appuyée dorénavant ſur des principes clairs, & d'être reſſerrée dans ſes véritables bornes.

Qu'on me permette ici la digreſſion ſuivante ſur les difficultés dont l'analyſe des haſards a paru ſuſceptible : la probabilité des choſes incertaines, & l'eſpérance qui ſe trouve liée à leur exiſtence, ſont, comme je l'ai dit, les deux objets de cette analyſe ; la diſtinction établie précédemment entre l'eſpérance morale & l'eſpérance mathématique, répond ce me ſemble, à toutes les objections que l'on pourroit faire contre le ſecond de ces deux objets; examinons par conſéquent celles qui ont rapport au premier.

Dans la recherche de la probabilité des évènemens, on part de ce principe, ſavoir que la probabilité eſt le nombre des cas favorables diviſé par celui de tous les cas poſſibles, ce qui eſt évident; il ne peut donc y avoir de difficulté

qu'autant que l'on ſuppoſeroit une égale poſſibilité à deux cas inégalement poſſibles; or, on ne peut s'empêcher de convenir que les applications que l'on a faites juſqu'ici du calcul des probabilités aux objets de la vie civile ſont ſujettes à cette difficulté. Je ſuppoſe, par exemple, qu'au jeu de *croix* & de *pile,* la pièce que l'on jette en l'air ait plus de pente à retomber d'un côté que de l'autre, mais que les deux joueurs ignorent de quel côté eſt la plus grande pente, il eſt viſible qu'il y a autant à parier pour *croix* comme pour *pile;* on peut donc ſuppoſer au premier coup, comme on le fait ordinairement, que *croix* & *pile* ſont également probables; mais cette ſuppoſition n'eſt plus permiſe ſi, par exemple, l'un des joueurs parie que ſur deux coups il amènera *croix;* car alors on doit faire entrer en conſidération l'inégale poſſibilité de *croix* & de *pile,* puiſque bien que l'on ignore de quel côté ſe trouve la plus grande, cependant cette inégalité favoriſe toujours celui qui parie que *croix* n'arrivera pas en deux coups, en ſorte que ſa probabilité eſt plus grande que ſi *croix* & *pile* étoient également poſſibles; la cauſe de l'erreur dans laquelle on tombe, vient de ce qu'on ſuppoſe également poſſibles ces quatre cas; 1.° *croix* au 1.er coup, *croix* au ſecond, ce que je déſigne de cette manière, *(croix, croix);* 2.° *(croix, pile):* 3.° *(pile, croix);* 4.° *(pile, pile),* ce qui n'eſt pas; car ces deux-ci *(croix, croix), (pile, pile),* ſont plus probables que les deux autres; en effet je ſuppoſe que $\frac{1+\varpi}{2}$, repréſente la probabilité du côté qui a la plus grande pente, & $\frac{1-\varpi}{2}$, celle de l'autre côté; cela poſé, la probabilité de *(croix, croix),* ſeroit $\frac{1+2\varpi+\varpi\varpi}{4}$, ſi *croix* étoit le plus probable; & $\frac{1-2\varpi+\varpi\varpi}{4}$, s'il étoit le moins probable, mais comme il n'y a pas plus de raiſon pour le ſuppoſer l'un plutôt que l'autre, il faut ajouter enſemble ces deux probabilités, & en

prendre la moitié; ce qui donne $\frac{1+\varpi\varpi}{4}$ pour la probabilité de *(croix, croix),* & partant auſſi pour celle de *(pile, pile),* on trouvera pareillement, la probabilité de *(croix, pile),* ou de *(pile, croix),* égale à $\frac{1-\varpi\varpi}{4}$; on voit donc que ces quatre cas ne ſont pas également poſſibles, & que l'inégalité des probabilités de *croix* & de *pile,* pourvu que l'on ignore de quel côté eſt la plus grande, favoriſe le Joueur qui parie que ſur deux coups, *croix* n'arrivera pas.

Ce que je viens dire du jeu de *croix* & de *pile*, peut s'appliquer au jeu des dés, & généralement à tous les jeux dans leſquels les différens évènemens ſont ſuſceptibles d'une inégalité phyſique; mais ayant développé ailleurs cette remarque avec aſſez d'étendue, *(voyez dans le tome VI des Savans étrangers, un Mémoire ſur la probabilité des cauſes par les évènemens)* j'obſerverai ſeulement que bien que l'on ignore quels ſont les plus probables de ces évènemens, cependant il arrive ceci de remarquable, ſavoir, que l'on peut, dans preſque tous les cas, déterminer auxquels des Joueurs cette inégalité eſt avantageuſe.

La théorie des haſards ſuppoſe encore que ſi *croix* & *pile* ſont également poſſibles, il en ſera de même de toutes les combinaiſons *(croix, croix, croix,* &c.), *(pile, croix, pile,* &c.), &c. pluſieurs Philoſophes ont penſé que cette ſuppoſition eſt inexacte, & que les combinaiſons dans leſquelles un évènement arrive pluſieurs fois de ſuite, ſont moins poſſibles que les autres; mais il faudroit ſuppoſer pour cela, que les évènemens paſſés ont quelque influence ſur ceux qui doivent arriver; ce qui n'eſt point admiſſible. A la vérité, la marche ordinaire de la Nature eſt d'entremêler les évènemens, mais cela vient, ce me ſemble, de ce que les combinaiſons où ils ſont mêlés, ſont beaucoup plus nombreuſes. Voici cependant une difficulté ſpécieuſe, à laquelle il eſt bon de repondre. Si *croix* arrivoit, par exemple, vingt fois de ſuite, on ſeroit fort tenté de croire que cela n'eſt pas l'effet du haſard,

hasard, tandis que si *croix* & *pile* étoient entremêlés d'une manière quelconque, on n'en chercheroit point la cause. Or, pourquoi cette différence entre ces deux cas, si ce n'est parce que l'un est physiquement moins possible que l'autre? A cela, je réponds généralement que là où nous apercevons de la symétrie, nous croyons toujours y reconnoître l'effet d'une cause agissante avec ordre, & nous raisonnons en cela conformément aux probabilités, parce qu'un effet symétrique devant être nécessairement l'effet du hasard, ou celui d'une cause régulière, la seconde de ces suppositions est plus probable que la première. Soit $\frac{1}{m}$ la probabilité de son existence dans le cas où il seroit dû au hasard, & $\frac{1}{n}$, cette probabilité, s'il partoit d'une cause régulière, la probabilité de l'existence de cette cause sera (*voyez le tome VI des Savans étrangers*) . . . . .

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+\frac{n}{m}};$$ d'où l'on voit que plus m sera grand par rapport à n, plus aussi la probabilité que l'évènement symétrique est l'effet d'une cause régulière, augmentera. Ce n'est donc point parce que l'évènement symétrique est moins possible que les autres, mais parce qu'il y a beaucoup plus à parier qu'il est dû à une cause agissante avec ordre, qu'au pur hasard, que nous recherchons cette cause. Un exemple fort simple éclaircira cette remarque. Je suppose que l'on trouve sur une table, des caractères d'Imprimerie arrangés dans cet ordre, INFINITÉSIMAL; la raison qui nous porte à croire que cet arrangement n'est pas l'effet du hasard, ne peut venir de ce que, physiquement parlant, il est moins possible que les autres, parce que si le mot *infinitésimal* n'étoit employé dans aucune langue, cet arrangement ne seroit ni plus, ni moins possible, & cependant nous ne lui soupçonnerions alors aucune cause particulière. Mais, comme ce mot est en usage parmi nous, il est incomparablement

plus probable qu'une personne aura ainsi disposé les caractères précédens, qu'il ne l'est que cette disposition est dûe au hasard. Je reviens présentement à mon objet.

L'incertitude des connoissances humaines porte ou sur les évènemens, ou sur les causes des évènemens. Si l'on est assuré, par exemple, qu'une urne ne renferme que des billets blancs & noirs dans un rapport donné, & que l'on demande la probabilité qu'en prenant au hasard un de ces billets, il sera blanc; l'évènement est incertain, mais la cause dont dépend la probabilité de son existence, c'est-à-dire, le rapport des billets blancs aux noirs, est connu.

Dans le Problème suivant; *une urne étant supposée renfermer un nombre donné de billets blancs & noirs, si l'on en tire un billet blanc, déterminer la probabilité que la proportion des billets blancs aux noirs dans l'urne, est celle de* p *à* q; l'évènement est connu & la cause inconnue.

On peut ramener à ces deux classes de Problèmes, tous ceux qui dépendent de la théorie des hasards. Il en existe, à la vérité, un très-grand nombre dans lesquels la cause & l'évènement paroissent également iconnues; tel est celui-ci. *Une urne étant supposée pouvoir également renfermer tous les nombres de billets blancs & noirs depuis 2 jusqu'à* n *inclusivement, déterminer la probabilité qu'en tirant au hasard deux de ces billets, ils seront blancs.* Le rapport des billets blancs aux noirs, le nombre total des billets & l'évènement qui doit en résulter, sont inconnus; mais on doit regarder ici comme cause de l'évènement, l'égale possibilité de tous les nombres depuis 2 jusqu'à n, & l'indifférence des billets à être blancs ou noirs; ainsi ce problème est du genre de ceux dans lesquels la cause étant connue, l'évènement est inconnu.

Mon dessein n'étant point ici de donner un traité complet sur la théorie des hasards, je me contenterai d'appliquer les recherches précédentes à la solution de plusieurs problèmes relatifs à cette théorie; je me bornerai même ici à ceux dans lesquels la cause étant connue, il s'agit de déterminer les évènemens, ayant considéré dans un autre Mémoire

les cas où l'on se propose de remonter des évènemens aux causes. *(Voyez le tome VI des Savans étrangers.)*

XXVI.
PROBLEME X.

Si dans un tas de x pièces, on en prend un nombre au hasard, il faut déterminer la probabilité que ce nombre soit pair ou impair.

Je suppose que l'on puisse prendre indifféremment, ou une seule, ou plusieurs, ou toutes ces pièces à la fois, cela posé.

Soit y_x la somme des cas dans lesquels le nombre peut être pair, & $'y_x$ celle des cas dans lesquels il peut être impair, il est visible que si l'on augmente le nombre x de pièces d'une unité, la somme des cas pairs, représentée alors par y_{x+1} sera égale 1.° au nombre précédent des cas pairs; 2.° au nombre précédent des cas impairs, puisque chacun de ces cas, combiné avec la nouvelle pièce, donne un cas pair. On aura donc

$$y_{x+1} = y_x + {'y_x}. (1)$$

ensuite le nombre des cas impairs représenté par $'y_{x+1}$, sera égal 1.° au nombre précédent $'y_x$ des cas impairs; 2.° au nombre précédent des cas pairs; 3.° à l'unité, puisque la nouvelle pièce peut être prise seule. On aura conséquemment

$$'y_{x+1} = {'y_x} + y_x + 1. (2)$$

Pour intégrer ces deux équations, j'observe que l'équation (1) donne $\Delta . y_x = {'y_x}$, partant, $\Delta^2 . y_x = \Delta . {'y_x}$. Or, l'équation (2) donne $\Delta . {'y_x} = y_x + 1$; donc, $\Delta^2 . y_x = y_x + 1$; d'où il est facile de conclure $y_{x+1} = 2 . y_x + 1$; en intégrant cette équation par le Problème premier, on aura $y_x = A . 2^x - 1$, A étant une constante arbitraire; pour la déterminer, j'observe que x étant 1, on a $y_x = 0$; donc, $A = \frac{1}{2}$; partant, $y_x = 2^{x-1} - 1$.

Maintenant, puiſque l'on a, $'y_x = \Delta . y_x$, on aura, $'y_x = 2^{x-1}$. La ſomme de tous les cas poſſibles eſt viſiblement . . . . $y_x + 'y_x = 2^x - 1$. Si donc l'on nomme z_x la probabilité que le nombre de pièces eſt pair, & $_{1}z_x$ celle qu'il eſt impair, on aura $z_x = \frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1}$ & $_{1}z_x = \frac{2^{x-1}}{2^x - 1}$;

d'où il réſulte qu'il y a toujours plus d'avantage à parier pour les nombres impairs, que pour les pairs.

Je ſuppoſe que l'on ſoit aſſuré que le nombre x ne peut excéder le nombre n, mais que ce nombre & tous les inférieurs ſont également poſſibles, on aura la ſomme de tous les cas impairs $= 2^x + C$. Or, x étant 1, on doit avoir $2^x + C = 1$; donc, $C = -1$. On trouvera pareillement la ſomme de tous les cas pairs $= 2^x - x + C$; or, x étant 1, on a $2^x - x + C = 0$. Donc, $C = -1$; partant, la ſomme des cas impairs eſt $2^n - 1$, & la ſomme des cas pairs eſt $2^n - n - 1$; ainſi, la probabilité pour les impairs $= \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - n - 2}$, & la probabilité pour les pairs $= \frac{2^n - n - 1}{2^{n+1} - n - 2}$.

XXVII.

PROBLEME XI.

Soit a, une ſomme que Paul conſtitue en rente, de manière que l'intérêt ſoit $\frac{1}{m}$ de ce qui lui eſt dû, je ſuppoſe que pour des raiſons quelconques on retienne chaque année la fraction $\frac{1}{n}$ de cet intérêt, en ſorte que Paul, à la fin de la première année, par exemple, ne doive percevoir que la quantité $\frac{a}{m} - \frac{a}{mn}$; cela poſé, ſi on lui paye tous les ans la ſomme $\frac{a}{m}$, & par conſéquent plus qu'il ne lui eſt dû, &

que le surplus soit employé à amortir le capital, on demande ce que deviendra ce capital à la $x.^{ième}$ année.

Soit y_x ce capital à la $x.^{ième}$ année; il est visible qu'à la fin de l'année x, il ne sera dû à Paul que, $y_x\left[\frac{1}{m} - \frac{1}{mn}\right]$. Donc, puisqu'on lui paye la somme $\frac{a}{m}$, le capital sera diminué de la quantité $\frac{a}{m} - y_x \cdot \frac{n-1}{mn}$; partant, on aura $y_{x+1} = y_x - \frac{a}{m} + y_x \cdot \frac{n-1}{mn}$; & en intégrant par le Problème premier, $y_x = \frac{na}{n-1} + A\left[1 + \frac{n-1}{mn}\right]^{x-1}$; or, posant $x = 1$, $y_x = a$; donc, $A = -\frac{a}{n-1}$, partant, $y_x = \frac{a}{n-1} \cdot \left[n - \left(1 + \frac{n-1}{mn}\right)^{x-1}\right]$.

Si l'on demande l'année x, à laquelle ce capital sera zéro, on aura

$$\left(1 + \frac{n-1}{mn}\right)^{x-1} = n. \text{ donc, } x = 1 + \frac{l.n}{l.\left(1 + \frac{n-1}{mn}\right)}$$

Je suppose que l'intérêt soit de cinq pour cent, & que l'on retienne un dixième sur cet intérêt, on aura $m = 20$, & $n = 10$; partant, $x = 53, 3$.

On peut résoudre de la même manière le Problème suivant.

Une personne doit la somme a, & veut s'acquitter au bout de h années, en sorte qu'elle ne doive rien à l'année $h + 1$, l'intérêt étant toujours $\frac{1}{m}$ de la quantité dûe; il s'agit de trouver ce qu'elle doit donner pour cela chaque année.

Soit p cette quantité, & y_x ce qu'elle doit à la $x.^{ième}$ année, on aura, par la méthode précédente, $y_{x+1} = y_x \cdot \left[1 + \frac{1}{m}\right] - p$;

d'où je conclus en intégrant $y_x = mp + A . [1 + \frac{1}{m}]^{x-1}$ or, posant $x = 1$, $y_x = a$, donc, $a = mp + A$; partant, $y_x = mp + (a - mp).(1 + \frac{1}{m})^{x-1}$; mais en faisant $x = h + 1$, on a $y_x = 0$, par la supposition; donc,

$$p = \frac{a(1+\frac{1}{m})^h}{m[(1+\frac{1}{m})^h - 1]}.$$

XXVIII.

PROBLEME XII.

J'imagine un solide composé d'un nombre n de faces parfaitement égales, & que je désigne par les nombres 1, 2, 3 . . . n, je veux avoir la probabilité qu'en un nombre x de coups, j'amenerai ces n faces de suite dans l'ordre 1 . 2 . 3 . 4 . . . n.

Je nomme y_x cette probabilité, & u_x le nombre des cas favorables; le nombre de tous les cas possibles est n^x; car si l'on nomme t_x ce nombre au coup x, il sera t_{x-1} au coup $x - 1$. Or, le nombre des cas au coup $x - 1$, doit se combiner avec toutes les faces du solide, pour former tous les cas possibles au coup x; on a donc $t_x = n . t_{x-1}$; ce qui donne $t_x = A . n^x$. Or, posant $x = 1$, $t_x = n$, donc $A = 1$, & $t_x = n^x$. On aura donc $\frac{u_x}{n^x} = y_x$. Or, u_x est évidemment égal au nombre des cas favorables au coup $x - 1$, multiplié par le nombre des faces du solide, plus au nombre des cas dans lesquels la combinaison 1 . 2 . 3 ... n, peut arriver précisément au coup x; de plus, tous les cas dans lesquels cette combinaison n'est point arrivée au coup $x - n$, donnent chacun un cas dans lequel elle arrivera précisément au coup x. Le nombre de ces cas est $n^{x-n} - u_{x-n}$; on aura donc $u_x = n . u_{x-1} + n^{x-n} - u_{x-n}$; partant, $y_x = y_{x-1} - \frac{y_{x-n}}{n^n} + \frac{1}{n^n}$,

équation que l'on intègrera facilement par les méthodes précédentes.

Soit $n = 2$, on aura $y_x = y_{x-1} - \frac{y_{x-1}}{4} + \frac{1}{4}$; d'où je conclus, en intégrant $y_x = 1 + \frac{Ax+B}{2^{x-1}}$; or, posant $x = 1$, $y_x = 0$, & posant $x = 2$, $y_x = \frac{1}{4}$; donc, $A = -\frac{1}{2}$, & $B = -\frac{1}{2}$; partant, $y_x = 1 - \frac{(x+1)}{2^x}$.

XXIX.

PROBLEME XIII.

Je suppose un nombre n de joueurs (1), (2), (3) . . . (n), jouant de cette manière; (1) joue avec (2), & s'il gagne il gagne la partie; s'il ne perd ni gagne, il continue de jouer avec (2), jusqu'à ce que l'un des deux gagne. Que si (1) perd, (2) joue avec (3); s'il le gagne, il gagne la partie; s'il ne perd ni gagne, il continue de jouer avec (3); mais s'il perd, (3) joue avec (4), & ainsi de suite jusqu'à ce que l'un des joueurs ait vaincu celui qui le suit; c'est-à-dire que (1) soit vainqueur de (2), ou (2) de (3), ou (3) de (4) . . . ou ($n-1$) de (n), ou (n) de (1). De plus, la probabilité d'un quelconque des joueurs, pour gagner l'autre $= \frac{1}{3}$, & celle de ne gagner ni perdre $= \frac{1}{3}$. Cela posé, il faut déterminer la probabilité que l'un de ces joueurs gagnera la partie au coup x.

Soit $\overset{n}{u}_x$, la probabilité qu'au coup x, (n) sera vainqueur de ($n-1$), on aura

$$\overset{n}{u}_x = \frac{1}{3}\,\overset{n}{u}_{x-1} + \frac{1}{3}\,\overset{n-1}{u}_{x-1}.$$

Soit maintenant $\underset{1}{z}_x$, la probabilité que (n) au coup x, gagnera la partie; $\underset{2}{z}_x$, la probabilité que ce sera ($n-1$), & ainsi de suite, on aura $\underset{1}{z}_x = \frac{1}{3}\,.\,\overset{n}{u}_{x-1}$. Partant

$$\underset{1}{z}_x - \frac{1}{3}\,.\,\underset{1}{z}_{x-1} = \frac{1}{3}\,.\,\underset{2}{z}_{x-1}.$$

On aura de même

$$\overset{2}{z}_x - \tfrac{1}{3}\cdot\overset{2}{z}_{x-1} = \tfrac{1}{3}\cdot\overset{3}{z}_{x-1}$$
$$\overset{3}{z}_x - \tfrac{1}{3}\cdot\overset{3}{z}_{x-1} = \tfrac{1}{3}\cdot\overset{4}{z}_{x-1}$$
&c.

en ſorte que ces équations ſont rentrantes. Cela poſé, en ſuivant la méthode expoſée précédemment pour ce genre d'équations, on aura

$$\overset{1}{z}_x - \tfrac{2}{3}\cdot\overset{1}{z}_{x-1} + \frac{1}{3^2}\cdot\overset{1}{z}_{x-2} = \tfrac{1}{3}\cdot[\overset{2}{z}_{x-1} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{z}_{x-2}] = \frac{1}{3^2}\cdot\overset{3}{z}_{x-2};$$

partant,

$$\overset{1}{z}_x - \tfrac{3}{3}\cdot\overset{1}{z}_{x-1} + \frac{3}{3^2}\cdot\overset{1}{z}_{x-2} - \frac{1}{3^3}\cdot\overset{1}{z}_{x-3}$$
$$= \frac{1}{3^3}\cdot[\overset{3}{z}_{x-2} - \tfrac{1}{3}\overset{3}{z}_{x-3}] = \frac{1}{3^3}\overset{4}{z}_{x-3}$$

d'où, en continuant d'opérer ainſi, on aura

$$\overset{1}{z}_x - \frac{n}{3}\cdot\overset{1}{z}_{x-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\overset{1}{z}_{x-2} - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}\cdot$$
$$\frac{1}{3^3}\cdot\overset{1}{z}_{x-3} + \&c. = \frac{1}{3^n}\cdot\overset{1}{z}_{x-n}.$$

on aura pareillement

$$\overset{2}{z}_x - \frac{n}{3}\cdot\overset{2}{z}_{x-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\overset{2}{z}_{x-2}$$
$$- \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\overset{2}{z}_{x-3} + \&c. = \frac{1}{3^n}\cdot\overset{2}{z}_{x-n},$$

& ainſi de ſuite pour les autres variables $\overset{4}{z}_x$, $\overset{3}{z}_x$, &c.

Pour intégrer ces différentes équations, il faut réſoudre celle-ci: $(f - \frac{1}{3})^n = \frac{1}{3^n}$, ou en faiſant $f - \frac{1}{3} = q$, $q^n - \frac{1}{3^n} = 0$, ce qu'il eſt aiſé de faire, par le beau théorème de Cote. Il ne reſte plus ainſi de difficulté que dans la détermination

détermination des constantes arbitraires qui viennent par l'intégration. Pour cela, il est nécessaire d'avoir la probabilité de gagner de chaque joueur pour un nombre n de coups. Or, pour ce qui regarde le joueur (1), sa probabilité de gagner au premier coup est $\frac{1}{3}$; au second coup elle est $\frac{1}{3^2}$; au troisième coup, elle est $\frac{1}{3^3}$, &c. en sorte que l'on a

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & . & 2 & . & 3 & . & 4 & \ldots\ldots\ldots & n \\ \frac{1}{3} & . & \frac{1}{3^2} & . & \frac{1}{3^3} & . & \frac{1}{3^4} & \ldots\ldots\ldots & \frac{1}{3^n}. \end{array}$$

en mettant sous chaque coup la probabilité de gagner du Joueur (1) à ce coup; on formera de même pour le Joueur (2), la suite

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & . & 3 & . & 4 & . & 5 & \ldots\ldots\ldots & n+1 \\ \frac{1}{3^2} & . & \frac{2}{3^3} & . & \frac{3}{3^4} & . & \frac{4}{3^5} & \ldots\ldots\ldots & \frac{n}{3^{n+1}} \end{array}$$

& pour le Joueur (3), celle-ci:

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & . & 4 & . & 5 & . & 6 & \ldots\ldots\ldots & n+2 \\ \frac{1}{3^3} & . & \frac{3}{3^4} & . & \frac{6}{3^5} & . & \frac{10}{3^6} & \ldots\ldots\ldots & \frac{\frac{n.(n+1)}{1.2}}{3^{n+2}} \end{array}$$

& ainsi de suite pour les autres Joueurs.

XXX.

PROBLEME XIV.

Deux Joueurs A & B, dont les adresses respectives sont en raison de p, à q, jouent ensemble de manière que sur un nombre x de coups, il en manque n au Joueur A, & conséquemment $x - n$ au Joueur B, pour gagner; il s'agit de déterminer la probabilité respective de ces deux Joueurs.

Soit ${}_{n}y_{x}$ la probabilité de B pour gagner; il est clair qu'au coup suivant elle sera, ou ${}_{n-1}y_{x-1}$, si B perd, ou ${}_{n}y_{x-1}$, s'il gagne. Or, la probabilité qu'il gagnera est $\frac{q}{p+q}$, & celle

qu'il perdra, $= \frac{p}{p+q}$. On a donc

$$ {}_n y_x = \frac{q}{p+q} \cdot {}_n y_{x-1} + \frac{p}{p+q} \cdot {}_{n-1} y_{x-1} \quad (g). $$

Cette équation eſt aux différences partielles : pour l'intégrer, j'obſerve que lorſque $n = 1$, on a ${}_1 y_x = \frac{q}{p+q} \cdot {}_1 y_{x-1}$, puiſque dans ce cas ${}_{n-1} y_x = 0$; on aura donc par le Problème VI, *art. XX*,

$$ {}_n y_x = a_n \cdot {}_n y_{x-1} + {}'a_n \cdot {}_n y_{x-2} + {}''a_n \cdot {}_n y_{x-3} + \&c. + u_n, $$

& l'on trouvera que l'équation

$$ 0 = 1 - \frac{a_n}{f} - \frac{{}'a_n}{f^2} - \&c. $$

eſt la même que celle-ci; $0 = [f - \frac{q}{p+q}]^n$; on aura d'ailleurs $u_n = \frac{p}{p+q} \cdot u_{n-1}$; donc, $u_n = H \cdot (\frac{p}{p+q})^n$; or, poſant $n = 1$, $u_n = 0$; donc, $H = 0$, & $u_n = 0$. L'expreſſion de ${}_n y_x$ ſera donc par l'*article IX*,

$$ {}_n y_x = \frac{q^{x-1}}{(p+q)^{x-1}} \cdot [C_n + D_n \cdot (x-1) + E_n \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{1 \cdot 2} + \&c. \ldots + L_n \frac{(x-1) \cdot (x-2) \ldots (x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (n-1)}] $$

Pour déterminer les conſtantes arbitraires C_n, D_n, E_n, &c. leſquelles peuvent être des fonctions de n, j'obſerve que ſi l'on fait $x = n$, on aura ${}_n y_n = 1$; car il eſt viſible que *A* perd néceſſairement, lorſque ſur n coups il lui en manque n; ſi l'on fait $x = n - 1$, on aura pareillement ${}_n y_{n-1} = 1$; car l'équation (g) donne

$$ {}_n y_n = \frac{q}{p+q} \cdot {}_n y_{n-1} + \frac{p}{p+q} \cdot {}_{n-1} y_{n-1} \cdot \text{ ou, } 1 = \frac{q}{p+q} \cdot {}_n y_{n-1} + \frac{p}{p+q}. $$

partant, ${}_n y_{n-1} = 1$; pareillement, ſi l'on fait $x = n - 2$, on aura ${}_n y_{n-2} = 1$, & ainſi de ſuite. Si donc l'on fait dans l'expreſſion de ${}_n y_x$, $x = 1$, on aura ${}_n y_1 = 1$; partant, $C_n = 1$. Si l'on fait $x = 2$, on aura, $1 = (C_n + D_n) \cdot \frac{q}{p+q}$;

partant, $D_n = \frac{p}{q}$. Si l'on fait $x = 3$, on aura

$$1 = [C_n + 2D_n + E_n] \cdot \frac{q^2}{(p+q)^2} = (1 + 2\frac{p}{q} + E_n) \cdot \frac{q^2}{(p+q)^2}.$$

donc, $E_n = \frac{p^2}{q^2}$, & ainsi de suite; d'où il est facile de conclure

$$_x = \frac{1}{(\frac{p}{q}+1)^{x-1}} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{p}{q}.(x-1) + \frac{p^2}{q^2} . \frac{(x-1).(x-2)}{1.2} + \frac{p^3}{q^3} . \frac{(x-1).(x-2).(x-3)}{1.2.3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} . \frac{(x-1).(x-2)\ldots\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(n-1)} \end{array} \right.$$

XXXI.

PROBLEME XV.

Trois Joueurs A, B, C, dont les adresses respectives sont représentées par les lettres p, q, r, jouent ensemble de manière que sur un nombre x de coups, il en manque m, a, A; n, a, B; & $x - m - n$, a. C; on propose de déterminer la probabilité respective de ces trois Joueurs pour gagner. Soit ${}_{(m)(n)}y_x$ la probabilité de C, pour gagner; il est clair qu'après un nouveau coup, elle sera, ou ${}_{(m-1)(n)}y_{x-1}$, ou ${}_{(m)(n-1)}y_{x-1}$, ou ${}_{(m)(n)}y_{x-1}$; or la probabilité qu'elle sera ${}_{(m-1)(n)}y_{x-1}$, est $\frac{p}{p+q+r}$; la probabilité qu'elle sera ${}_{(m)(n-1)}y_{x-1}$, est $\frac{q}{p+q+r}$; & la probabilité qu'elle sera ${}_{(m)(n)}y_{x-1}$, est $\frac{r}{p+q+r}$. On aura donc

$${}_{(m)(n)}y_x = \frac{p}{p+q+r} \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-1} + \frac{q}{p+q+r} \cdot {}_{(m)(n-1)}y_{x-1}$$
$$+ \frac{r}{p+q+r} \cdot {}_{(m)(n)}y_{x-1} \quad (o).$$

Cette équation est aux différences partielles à quatre variables, & s'intègre par le Problème IX; mais, pour cela, il faut que l'on ait deux équations particulières pour les cas

de $m = 1$ & de $n = 1$; pour les trouver, j'obſerve que ſi l'on fait $m = 1$, on aura

$$ {}_{(1)(n)}y_x = \frac{r}{p+q+r} \cdot {}_{(1)(n)}y_{x-1} + \frac{q}{x+q+r} {}_{(1)(n-1)}y_{x-1}; \; (p), $$

parce que lorſque $m = 1$, on a ${}_{(m-1)(n)}y_{x-1} = 0$.

L'équation (p) eſt aux différences partielles à deux variables; pour l'intégrer, j'obſerve que ſi l'on y ſuppoſe $n = 1$, on a ${}_{(1)(1)}y_x = \frac{r}{p+q+r} {}_{(1)(1)}y_{x-1}$; de cette équation & de l'équation (p), on conclura facilement par le Problème VI,

$$ {}_{(1)(n)}y_x = \frac{nr}{p+q+r} \cdot {}_{(1)(n)}y_{x-1} - \frac{n.(n-1)}{1.2} \cdot \frac{r^2}{(p+q+r)^2} \cdot {}_{(1)(n)}y_{x-2} + \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{r^3}{(p+q+r)^3} \cdot {}_{(1)(n)}y_{x-3} - \&c. \; (q). $$

on aura ſemblablement

$$ {}_{(m)(1)}y_x = \frac{mr}{p+q+r} {}_{(m)(1)}y_{x-1} - \frac{m.(m-1)}{1.2} \cdot \frac{r^2}{(p+q+r)^2} \cdot {}_{(m)(1)}y_{x-2} + \frac{m.(m-1)(.m-2)}{1.2.3} \frac{r^3}{(p+q+r)^3} \cdot {}_{(m)(1)}y_{x-3} - \&c. \; (q'). $$

Au moyen de ces équations & de l'équation (o), on déterminera, par le Problème IX, l'expreſſion générale de ${}_{(m)(n)}y_x$; ainſi, le Problème propoſé n'a d'autre difficulté que la longueur du calcul.

La méthode générale du Problème IX conduit à une équation finale très-élevée; mais au moyen de conſidérations particulières, je ſuis arrivé à la ſolution du Problème précédent d'une manière beaucoup plus ſimple, que je vais développer: je fais pour abréger $p + q + r = 1$, & l'équation (o) donne

$$ {}_{(2)(n)}y_x = p \cdot {}_{(1)(n)}y_{x-1} + q \cdot {}_{(2)(n-1)}y_{x-1} + r \cdot {}_{(2)(n)}y_{x-1} \; (o') $$

& ſi l'on fait $m = 2$, l'équation (q') donne

$$ {}_{(2)(1)}y_x = 2r \cdot {}_{(2)(1)}y_{x-1} - r^2 \cdot {}_{(2)(1)}y_{x-2} $$

Soit

$$ {}_{(2)(n)}y_x = a_n \cdot {}_{(2)(n)}y_{x-1} + {}'a_n \cdot {}_{(2)(n)}y_{x-2} + \&c. + {}_nX_x \; (s); $$

donc,

$$q\cdot{}_{(2)(n-1)}y_{x-1} = a_{n-1}\cdot q\cdot{}_{(2)(n-1)}y_{x-2} + {}^{1}a_{n-1}\cdot q\cdot{}_{(2)(n-1)}y_{x-3} + \&c. + q\cdot{}_{n-1}X_{x-1}$$

Subſtituant dans cette équation au lieu de ${}_{(2)(n-1)}y_{x-2}$, ${}_{(2)(n-1)}y_{x-2}$, &c. leurs valeurs tirées de l'équation (o'), on aura

$${}_{(2)(n)}y_x = (1 + a_{n-1})\cdot{}_{(2)(n)}y_{x-1} + ({}^{1}a_{n-1} - a_{n-1}\cdot r)\cdot{}_{(2)(n)}y_{x-2} + \&c. + p\cdot{}_{(1)(n)}y_{x-1} - a_{n-1}p\cdot{}_{(1)(n)}y_{x-2} - \&c. + q\cdot{}_{x-1}X_{x-1}$$

d'où, en comparant avec l'équation (s), on aura

1.° $a_n = a_{n-1} + r$. partant, $a_n = (n+1).r + C$.
or, poſant $n = 1$, $a_n = 2r$; donc, $C = 0$.

2.° ${}^{1}a_n = {}^{1}a_{n-1} - a_{n-1}.r$; partant, ${}^{1}a_n = -\frac{n.(n+1)}{1.2}.r^2 + C$.
or, poſant $n = 1$, ${}^{1}a_n = -r^2$; donc, $C = 0$.

3.° ${}^{2}a_n = {}^{2}a_{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}r^3$; donc, ${}^{2}a_n = \frac{(n-1).n.(n+1)}{1.2.3}r^3 + C$;
or, poſant $n = 1$, ${}^{2}a_n = 0$; donc, $C = 0$, & ainſi du reſte. Partant,

$$p\,[{}_{(1)(n)}y_{x-1} - a_{n-1}\cdot{}_{(1)(n)}y_{x-2} - \&c.] = p\cdot[{}_{(1)(n)}y_{x-1} - n\,r\cdot{}_{(1)(n)}y_{x-2} + \frac{n.(n-1)}{1.2}.r^2\cdot{}_{(1)(n)}y_{x-3} - \&c.]$$

$= 0$, en vertu de l'équation (q).

4.° ${}_{n}X_x = q\cdot{}_{n-1}X_{x-1}$. or, on a ${}_{1}X_x = 0$; donc, ${}_{1}X_x = 0$, & généralement ${}_{n}X_x = 0$. On a donc

$${}_{(2)(n)}y_x = (n+1).r\cdot{}_{(2)(n)}y_{x-1} - \frac{n.(n+1)}{1.2}.r^2\cdot{}_{(2)(n)}y_{x-2} + \frac{(n-1).n.(n+1)}{1.2.3}\cdot{}_{(2)(n)}y_{x-3} - \&c.$$

on aura, par un procédé entièrement ſemblable,

$${}_{(3)(n)}y_x = (n+2).r\cdot{}_{(3)(n)}y_{x-1} - \frac{(n+2).(n+1)}{1.2}.r^2\cdot{}_{(3)(n)}y_{x-2} + \&c.$$

& généralement

$$_{(m)(n)}y_x = (m + n - 1) \cdot r \cdot {}_{(m)(n)}y_{x-1} - \frac{(m+n-1)\cdot(m+n-2)}{1 \cdot 2} \cdot r^2 \cdot {}_{(m)(n)}y_{x-2} + \&c.$$

équation dont l'intégrale eſt

$$_{(m)(n)}y_x = r^{x-2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} {}_mN_n \cdot \frac{(x-2)\cdot(x-3)\ldots(x-m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots\ldots\ldots (m+n-2)} + {}_mM_n \cdot \frac{(x-2)\ldots\ldots(x-m-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots(m+n-3)} \\ + {}_mL_n \cdot \frac{(x-2)\ldots\ldots\ldots(x-m-n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots\ldots(m+n-4)} + {}_mK_n \cdot \frac{(x-2)\ldots\ldots(x-m-n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(m+n-5)} \\ + {}_mI_n \cdot \frac{(x-2)\ldots\ldots\ldots(x-m-n+5)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots\ldots(m+n-6)} \ldots\ldots\ldots + {}_mC_n \cdot \end{array} \right.$$

La difficulté conſiſte préſentement à déterminer les conſtantes arbitraires ${}_mN_n$, ${}_mM_n$, &c. leſquelles peuvent être des fonctions de m & de n.

Pour cela je ſuppoſe d'abord $m = 1$, & l'on aura

$$_{(1)(n)}y_x = r^{x-2}\left[{}_1C_n + {}_1D_n \cdot (x-2) + {}_1E_n \cdot \frac{(x-2)\cdot(x-3)}{1\cdot 2} \ldots\ldots + {}_1N_n \cdot \frac{(x-2)\ldots(x-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}\right] (\sigma).$$

Or on a ${}_{(1)(n)}y_{n+1} = 1$, comme il eſt viſible, puiſqu'il ne manque alors aucun coup au joueur C; je reprends enſuite l'équation

$$_{(1)(n)}y_x = r \cdot {}_{(1)(n)}y_{x-1} + q \cdot {}_{(1)(n-1)}y_{x-1} \cdot$$

Si l'on fait $x = n + 1$, on a ${}_{(1)(n)}y_{n+1} = 1$ $= r \cdot {}_{(1)(n)}y_n + q$; donc ${}_{(1)(n)}y_n = \frac{1-q}{r}$; enſuite ${}_{(1)(n)}y_n = \frac{1-q}{r} = r \cdot {}_{(1)(n)}y_{n-1} + q \cdot (\frac{1-q}{r})$. Donc, ${}_{(1)(n)}y_{n-1} = (\frac{1-q}{r})^2$. On trouvera pareillement, ${}_{(1)(n)}y_{n-2} = (\frac{1-q}{r})^3$, & ainſi de ſuite. Cela poſé, ſi l'on fait $x = 2$, l'équation (σ) donnera $(\frac{1-q}{r})^{n-1} = {}_1C_n$; ſi l'on fait $x = 3$, on aura $(\frac{1-q}{r})^{n-2} = r\left[(\frac{1-q}{r})^{n-1} + {}_1D_n\right]$.

Donc, ${}_{1}D_{n} = (\frac{1-q}{r})^{n-2} \cdot \frac{q}{r}$. En faisant $x = 4$, on aura ${}_{1}E_{n} = (\frac{1-q}{r})^{n-3} \cdot \frac{q^2}{r^2}$, & ainsi de suite; partant

$$ {}_{(1)\,(n)}y_x = r^{x-2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}} \cdot \frac{(x-2)\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{q^{n-2}}{r^{n-2}} \cdot (\frac{1-q}{r}) \cdot \frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)} \\ + \frac{q^{n-3}}{r^{n-3}} \cdot (\frac{1-q}{r})^2 \cdot \frac{(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots(n-3)} \ldots + (\frac{1-q}{r})^{n-1} \end{array} \right. $$

on aura de même,

$$ {}_{(m)\,(1)}y_x = r^{x-2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{p^{m-1}}{r^{m-1}} \cdot \frac{(x-2)\ldots(x-m)}{1.2.3\ldots(m-1)} + \frac{p^{m-2}}{r^{m-2}} \cdot (\frac{1-p}{r}) \frac{(x-2)\ldots(x-m+1)}{1.2.3\ldots(m-2)} \\ + \&c. \end{array} \right. $$

Si l'on substitue maintenant dans l'équation (o), au lieu de ${}_{(m)\,(n)}y_x$, sa valeur trouvée ci-dessus, on aura l'équation suivante,

$$ {}_{n}N_{n} \cdot [\frac{(x-3).(x-4)\ldots(x-m-n)}{1.2.3\ldots(m+n-2)}] + [{}_{m}M_{n} + {}_{m}N_{n}] \cdot [\frac{(x-3)\ldots(x-m-n+1)}{1.2.3\ldots(m+n-3)}] $$

$$ + [{}_{m}L_{n} + {}_{m}M_{n}] \cdot [\frac{(x-3)\ldots(x-m-n+2)}{1.2.3\ldots(m+n-4)}] + \&c. $$

$$ = \frac{p}{r} \cdot {}_{m-1}N_{n} \cdot [\frac{(x-3)\ldots(x-m-n+1)}{1.2.3\ldots(m+n-3)}] $$

$$ + \frac{p}{r} \cdot {}_{m-1}M_{n} \cdot [\frac{(x-3)\ldots(x-m-n+2)}{1.2.3\ldots(m+n-4)}] + \&c. $$

$$ + \frac{q}{r} \cdot {}_{m}N_{n-1} \cdot [\frac{(x-3)\ldots(x-m-n+1)}{1.2.3\ldots(m+n-3)}] $$

$$ + \frac{q}{r} \cdot {}_{m}M_{n-1} \cdot [\frac{(x-3)\ldots(x-m-n+2)}{1.2.3\ldots(m+n-4)}] + \&c. $$

$$ + {}_{m}N_{n} \cdot [\frac{(x-3)\ldots\ldots\ldots(x-m-n)}{1.2.3\ldots(m+n-2)}] $$

$$ + {}_{m}M_{n} \cdot [\frac{(x-3)\ldots(x-m-n+1)}{1.2.3\ldots(m+n-3)}] + \&c. $$

D'où l'on formera les équations suivantes,

$$ {}_{m}N_{n} = \frac{p}{r} \cdot {}_{m-1}N_{n} + \frac{q}{r} \cdot {}_{m}N_{n-1} $$

$$ {}_{m}M_{n} = \frac{p}{r} \cdot {}_{m-1}M_{n} + \frac{q}{r} \cdot {}_{m}M_{n-1} $$

$${}_mL_n = \frac{p}{r}\cdot{}_{m-1}L_n + \frac{q}{r}\cdot{}_mL_{n-1},$$

&c.

Or on a ${}_1N_n = \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}}$; donc ${}_2N_n = \frac{p}{r}\cdot\frac{q^{n-1}}{r^{n-1}} + \frac{q}{r}\cdot{}_2N_{n-1}$. Partant ${}_2N_n = \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}}\cdot\frac{q}{r}\cdot(n + C)$; or, posant $n = 1$, ${}_2N_1 = \frac{p}{r}$; donc, $C = 0$; ensuite, ${}_3N_n = \frac{p^2}{r^2}\cdot\frac{q^{n-1}}{r^{n-1}}\cdot n + \frac{p}{r}\cdot{}_3N_{n-1}$; donc,

$${}_3N_n = \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}}\cdot\left(\frac{p^2}{r^2}\cdot\frac{n.(n+1)}{1.2} + C\right);$$

or, posant $n = 1$, ${}_3N_1 = \frac{p^2}{r^2}$; donc, $C = 0$, & généralement

$${}_mN_n = \frac{p^{m-1}.q^{n-1}}{r^{m+n-2}}\cdot\frac{n.(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots(m-1)};$$

on a ensuite ${}_1M_n = \frac{1-q}{r}\cdot\frac{q^{n-2}}{r^{n-2}}$; donc,

$${}_2M_n = \frac{q}{r}\cdot{}_2M_{n-1} + \frac{p}{r}\cdot\left(\frac{1-q}{r}\right)\cdot\frac{q^{n-2}}{r^{n-2}};$$

partant ${}_2M_n = \frac{q^{n-1}}{r^{n-2}}\cdot\frac{q}{r}\cdot\left(\frac{1-q}{r}\right)\cdot(n-1) + C\cdot\frac{q^{n-1}}{r^{n-1}}$; or, posant $n = 1$, ${}_2M_n = \frac{1-p}{r}$; donc, $C = \frac{1-p}{r}$, & ${}_2M_n = \frac{q^{n-2}}{r^{n-2}}\cdot\frac{p}{r}\left(\frac{1-q}{r}\right)\cdot(n-1) + \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}}\cdot\left(\frac{1-p}{r}\right)$; on aura pareillement ${}_3M_n = \frac{q^{n-2}}{r^{n-2}}\cdot\frac{p^2}{r^2}\cdot\left(\frac{1-q}{r}\right)\cdot\frac{(n-1).n}{1.2} + \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}}\cdot\frac{p}{r}\cdot\left(\frac{1-p}{r}n + C\right)$; or, posant $n = 1$, ${}_3M_n = \frac{p}{r}\cdot\left(\frac{1-p}{r}\right)$; donc, $C = 0$. En continuant d'opérer ainsi, on trouvera généralement,

$${}_mM_n = \frac{p^{m-1}.q^{n-2}}{r^{m+n-3}}\cdot\left(\frac{1-q}{r}\right)\cdot\frac{(n-1).n\ldots(n+m-3)}{1.2.3\ldots(m-1)}$$
$$+ \frac{q^{n-1}.p^{m-2}}{r^{m+n-3}}\cdot\left(\frac{1-p}{r}\right)\cdot\frac{n.(n+1)\ldots(n+m-3)}{1.2.3\ldots(m-2)}.$$

J'observerai

J'obſerverai ici, relativement à ces expreſſions de ${}_mN_n$, & de ${}_mM_n$, que

$$\frac{n.(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots(m-1)} = \frac{m.(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

& que

$$\frac{n.(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots(m-1)} = \frac{m.(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)};$$

d'où il réſulte que les quantités ${}_mN_n$ & ${}_mM_n$, reſtent les mêmes lorſqu'on y change p en q, m en n, & réciproquement; ce qui doit être d'ailleurs par la nature du Problème. On en doit dire autant des autres quantités ${}_mL_n$, ${}_mK_n$, &c.

Préſentement, ${}_mL_n = \frac{p}{r} \cdot {}_{m-1}L_n + \frac{q}{r} \cdot {}_mL_{n-1}$; or, ${}_1L_n = \frac{q^{n-3}}{r^{n-3}} \cdot (\frac{1-q}{r})^2$; donc on aura, en intégrant,

$${}_2L_n = \frac{q^{n-3}}{r^{n-3}} \cdot \frac{p}{r} \cdot (\frac{1-q}{r})^2 \cdot (n-2) + C \cdot \frac{q^{n-2}}{r^{n-2}};$$

or, poſant $n = 2$, $m = 2$, & $x = 4$, dans l'expreſſion trouvée ci-deſſus de ${}_{(m)(n)}y_x$, on a ${}_{(2)(2)}y_4 = r^2 \cdot ({}_2L_2 + 2 \cdot {}_2M_2 + {}_2N_2)$; donc, puiſque ${}_{(2)(2)}y_4 = 1$,

$${}_2L_2 = \frac{1}{r^2} - \frac{2p}{r^2}(1-q) - \frac{2q}{r^2}(1-p) - \frac{2pq}{r^2};$$

de plus, $C = {}_2L_2$, dans l'expreſſion de ${}_2L_n$.

on trouvera pareillement,

$${}_3L_n = \frac{q^{n-3}}{r^{n-3}} \cdot \frac{p^2}{r^2} \cdot (\frac{1-q}{r})^2 \cdot \frac{(n-2).(n-1)}{1.2}$$
$$+ \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}} \cdot \frac{p}{r} \cdot {}_2L_2 \cdot (n-1)$$
$$+ C \cdot \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}},$$

C étant une conſtante arbitraire; or, poſant $n = 1$, ${}_3L_n = (\frac{1-p}{r})^2$; donc $C = (\frac{1-p}{r})^2$; partant,

$${}_3L_n = \frac{q^{n-3}}{r^{n-3}} \cdot \frac{p^2}{r^2} \cdot (\frac{1-q}{r})^2 \cdot \frac{(n-2).(n-1)}{1.2}$$

$$+ \frac{q^{n-2}}{r^{n-2}} \cdot \frac{p}{r} \cdot {}_2L_2 \cdot (n-1)$$

$$+ \left(\frac{1-p}{r}\right)^2 \cdot \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}}$$

& généralement on aura

$${}_mL_n = \frac{q^{n-3} \cdot p^{m-1}}{r^{m+n-4}} \cdot \left(\frac{1-q}{r}\right)^2 \cdot \frac{(n-2) \cdot n \ldots (n+m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (m-1)}$$

$$+ \frac{q^{n-2} \cdot p^{m-2}}{r^{m+n-4}} \cdot {}_2L_2 \cdot \frac{(n-1) \ldots \ldots (n+m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (m-2)}$$

$$+ \frac{q^{n-1} \cdot p^{m-3}}{r^{m+n-4}} \cdot \left(\frac{1-p}{r}\right)^2 \cdot \frac{n \ldots \ldots (n+m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (m-3)}$$

on a ensuite

$${}_2K_n = \frac{q^{n-4}}{r^{n-4}} \cdot \frac{p}{r} \cdot \left(\frac{1-q}{r}\right)^3 + \frac{q}{r} \cdot {}_2K_{n-1}$$

partant,

$${}_2K_n = \frac{q^{n-4}}{r^{n-4}} \cdot \frac{p}{r} \cdot \left(\frac{1-q}{r}\right)^3 \cdot (n-3) + C \cdot \frac{q^{n-3}}{r^{n-3}}$$

or, posant $n = 3$, on a $C = {}_2K_3$; de même

$${}_3K_n = \frac{q^{n-4}}{r^{n-4}} \cdot \frac{p^2}{r^2} \cdot \left(\frac{1-q}{r}\right)^3 \cdot \frac{(n-3) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2} + \frac{q^{n-3}}{r^{n-3}} \cdot$$

$$\frac{p}{r} \cdot {}_2K_3 \cdot (n-2) + \frac{q^{n-2}}{r^{n-2}} \cdot {}_3K_2,$$

& généralement on aura,

$${}_mK_n = \frac{q^{n-4} \cdot p^{m-1}}{r^{m+n-5}} \cdot \left(\frac{1-q}{r}\right)^3 \cdot \frac{(n-3) \ldots \ldots (n+m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (m-1)}$$

$$+ \frac{q^{n-3} \cdot p^{m-2}}{r^{m+n-5}} \cdot {}_2K_3 \cdot \frac{(n-2) \ldots \ldots (n+m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (m-2)}$$

$$+ \frac{q^{n-2} \cdot p^{m-3}}{r^{m+n-5}} \cdot {}_3K_2 \cdot \frac{(n-1) \ldots \ldots (n+m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (m-3)}$$

$$+ \frac{q^{n-1} \cdot p^{m-4}}{r^{m+n-5}} \cdot \left(\frac{1-p}{r}\right)^3 \cdot \frac{n \ldots \ldots (n+m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (m-4)}$$

on déterminera ${}_2K_3$ & ${}_3K_2$ au moyen des équations suivantes.

$$r^3[{}_2K_1 + 3 \cdot {}_2L_1 + 3 \cdot {}_2M_1 + {}_2N_1] = 1$$

$$r^3[{}_3K_2 + 3 \cdot {}_3L_2 + 3 \cdot {}_3M_2 + {}_3N_2] = 1$$

La loi des autres coëfficiens ${}_mI_n$, ${}_mH_n$, &c. est visible, & il est aisé par conséquent de les déterminer. Quant au coëfficient ${}_mC_n$, on le déterminera par cette équation

$$1 = r^{m+n-2}\left[{}_mC_n + (m+n-2) \cdot {}_mD_n + \frac{(m+n-2) \cdot (m+n-3)}{1 \cdot 2} {}_mE_n + \&c.\right]$$

on a donc ainsi une expression générale de ${}_{(m)(n)}y_x$, & conséquemment, la probabilité du Joueur C pour gagner; par la même méthode, & au moyen de formules analogues, on auroit celle des deux autres Joueurs A & B; en sorte que l'on a une solution du Problème des partis dans le cas de trois Joueurs; Problème qui n'avoit point encore été résolu, que je sache, bien que les Géomètres qui se sont occupés de l'analyse des hasards, parussent en désirer la solution. *(Voyez M. Montmort, dans son Ouvrage sur l'analyse des jeux de hasard, seconde édition, page 247).*

Je suppose dans l'expression ${}_{(m)(n)}y_x$, $m = 2$, $n = 3$ & $x = 9$, c'est-à-dire, que le nombre des coups qui manquent au Joueur C, soit 4; je suppose de plus $p = q = r = \frac{1}{3}$. Cela posé, on aura

$$_{(2)(3)}y_x = \frac{x-3}{3^{x-2}} \cdot \left[\frac{xx+2}{2}\right]$$

& en supposant $x = 9$, on aura la probabilité de C pour gagner $= {}_{(2)(3)}y_9 = \frac{83}{729}$; pour avoir la probabilité de B, j'observe qu'elle est égale à ${}_{(2)(4)}y_9$; or on a

$$_{(2)(4)}y_x = \frac{1}{3^{x-2}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \frac{(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + 8 \cdot \frac{(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ + 7 \cdot \frac{(x-2) \cdot (x-3)}{1 \cdot 2} + 5 \cdot (x-2) - 17. \end{array} \right.$$

Si l'on suppose $x = 9$, on aura ${}_{(2)(4)}y_9 = \frac{195}{729}$;

la probabilité de $A = 1 - \frac{83}{729} - \frac{195}{729} = \frac{451}{729}$.

La méthode précédente auroit encore lieu, si, au lieu de trois joueurs, on en supposoit un plus grand nombre.

S ij

XXXII.

PROBLEME XVI.

Je ſuppoſe les numéros $A1$, $A2$, $B1$ & $B2$, renfermés dans une urne, & que deux joueurs A & B jouent à cette condition que A choiſiſſant les numéros $A1$ & $A2$, & B les deux autres, ſi l'on tire chaque fois un ſeul de ces numéros au haſard, celui des deux joueurs gagnera, qui le premier aura atteint le nombre i, les numéros $A1$ & $B1$ comptant pour 1, & les numéros $A2$ & $B2$ comptant pour 2. Cela poſé, s'il manque n unités, au joueur A, & $x - n$, unités, au joueur B, on demande les probabilités reſpectives des deux joueurs A & B pour gagner.

Soit ${}_ny_x$ la probabilité de B pour gagner; ſi l'on tire de l'urne le numéro $A1$, elle deviendra ${}_{n-1}y_{x-1}$; ſi l'on tire le numéro $A2$ elle deviendra ${}_{n-2}y_{x-2}$; ſi le numéro $B1$ ſort, elle ſera ${}_ny_{x-1}$; ſi c'eſt le numéro $B2$, elle ſera ${}_ny_{x-2}$; on aura donc

$$\begin{aligned} {}_ny_x = \tfrac{1}{4}\cdot{}_ny_{x-1} &+ \tfrac{1}{4}\cdot{}_ny_{x-2} \\ + \tfrac{1}{4}\cdot{}_{n-1}y_{x-1} &+ \tfrac{1}{4}\cdot{}_{n-2}y_{x-2} \end{aligned} \quad (1).$$

Cette équation s'intègre par le Problème VII; mais pour cela il faut avoir deux équations particulières dans deux ſuppoſitions particulières pour n; or ſi l'on ſuppoſe $n = 0$, on a ${}_0y_x = 0$, & ſi l'on ſuppoſe $n = 1$, ${}_1y_x = \frac{1}{2}\cdot{}_1y_{x-1}$. Parce que je ſuppoſe qu'alors les deux joueurs excluent les numéros $A2$ & $B2$; on a donc par le Problème VII,

$${}_ny_x = a_n\cdot{}_ny_{x-1} + {}^1a_n\cdot{}_ny_{x-2} + {}^2a_n\cdot{}_ny_{x-3} + \&c.$$

& l'équation

$$1 = \frac{a_n}{f} + \frac{{}^1a_n}{f^2} + \frac{{}^2a_n}{f^3} + \&c.$$

eſt la même que celle-ci

$$0 = \left(1 - \frac{1}{2f}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4f} - \frac{1}{4ff}\right)^{n-1}$$

on aura ainsi

$$ {}_n y_x = \frac{A_n}{2^x} + p^x . \left\{ \begin{array}{l} N_n . \frac{x.(x-1)\ldots(x-n+3)}{1.2.3\ldots(n-2)} + M_n . \frac{x.(x-1)\ldots(x-n+4)}{1.2.3\ldots(n-3)} \\ + L_n . \frac{x.(x-1)\ldots(x-n+5)}{1.2.3\ldots(n-4)} + K_n . \frac{x.(x-1)\ldots(x-n+6)}{1.2.3\ldots(n-5)} \\ + \&c. + C_n \end{array} \right. $$

$$ + {}'p_x . \left\{ N_n . \frac{x.(x-1)\ldots(x-n+3)}{1.2.3\ldots(n-2)} + \&c. \right. $$

p & $'p$ étant les deux racines de l'équation, $f^2 - \frac{1}{4} f = \frac{1}{4}$; c'est-à-dire p étant $= \frac{1+\sqrt{(17)}}{8}$, & $'p$ étant $= \frac{1-\sqrt{(17)}}{8}$.

Il faut présentement déterminer les constantes arbitraires A_n, N_n, &c. or si l'on substitue dans l'équation (1), au lieu de ${}_n y_x$, ${}_n y_{x-1}$, ${}_{n-1} y_{x-1}$, &c. leurs valeurs tirées de l'expression de ${}_n y_x$, on aura

$$ \frac{A_n}{2^x} + p^x . \left\{ \begin{array}{l} N_n . \frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)} + (2N_n + M_n) . \frac{(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots(n-3)} \\ + (N_n + 2.M_n + L_n) . \frac{(x-2)\ldots(x-n+3)}{1.2.3\ldots(n-4)} \\ + (M_n + 2.L_n + K_n) . \frac{(x-2)\ldots(x-n+4)}{1.2.3.n\ldots(n-5)} \\ + \&c \ldots\ldots\ldots + C_n . \end{array} \right. $$

$$ + {}'p^x . \left\{ 'N_n . \frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)} + \&c. \right. $$

$$ = \frac{1}{4} . p^x . \left\{ \begin{array}{l} N_n (\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}) . \frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)} \\ + [\frac{N_n}{p} + M_n . (\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}) + \frac{N_{n-1}}{p}] . \frac{(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots(n-3)} \\ + [\frac{M_n}{p} + L_n (\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}) + \frac{M_{n-1}}{p} \\ \quad + \frac{N_{n-1}}{p} + \frac{N_{n-2}}{p^2}] . \frac{(x-2)\ldots(x-n+3)}{1.2.3\ldots(n-4)} \\ + [\frac{L_n}{p} + K_n . (\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}) + \frac{L_{n-1}}{p} \\ \quad + \frac{M_{n-1}}{p} + \frac{M_{n-2}}{p^2}] . \frac{(x-2)\ldots(x-n+4)}{1.2.3\ldots(n-5)} + \&c. \end{array} \right. $$

$$+\frac{1}{4}\cdot{}'p^{x}\cdot\left\{\begin{matrix}'N_{n}\left(\frac{1}{'p}+\frac{1}{'p^{2}}\right)\cdot\frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)}\\+\ \&c.\end{matrix}\right.$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{A_{n}}{2^{x-1}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{A_{n}}{2^{x-2}}$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{A_{n-1}}{2^{x-1}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{A_{n-1}}{2^{x-2}}$$

D'où l'on formera les équations suivantes, en considérant que $1=\frac{1}{4p}+\frac{1}{4pp}$;

$$0=\frac{1}{2}\cdot A_{n}+\frac{1}{2}\cdot A_{n-1}+A_{n-2}$$

$$2\,N_{n}=\frac{1}{4}\cdot\frac{N_{n}}{p}+\frac{1}{4}\cdot\frac{N_{n-1}}{p}$$

$$2\,M_{n}+N_{n}=\frac{1}{4}\cdot\frac{M_{n}}{p}+\frac{1}{4}\cdot\frac{M_{n-1}}{p}+\frac{1}{4}\cdot\frac{N_{n-1}}{p^{2}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{N_{n-1}}{p}$$

$$2\,.\,L_{n}+M_{n}=\frac{1}{4}\cdot\frac{L_{n}}{p}$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{L_{n-1}}{p}+\frac{1}{4}\cdot\frac{M_{n-1}}{p^{2}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{M_{n-1}}{p},$$

&c.

On aura des équations semblables pour $'N_{n}$, $'M_{n}$. &c. l'on déterminera les quantités C_{n}, & $'C_{n}$, en considérant que lorsque $n=x$, ${}_{n}y_{x}=1$, & lorsque $x=2n$, ${}_{n}y_{x}=\frac{1}{2}$; d'où l'on tire les équations

$$1=\frac{A_{n}}{2^{n}}+p^{n}\left[C_{n}+n\,.\,D_{n}\ldots+\frac{n.(n-1)\ldots3}{1.2.3\ldots(n-2)}\cdot N_{n}\right]$$
$$+'p^{n}\left['C_{n}+n\,.\,'D_{n}+\ \&c.\right]$$

&

$$\frac{1}{2}=\frac{A_{n}}{2^{2n}}+p^{2n}\left[C_{n}+2n\,.\,D_{n}+\&c.\ldots+N_{n}\cdot\frac{2n\ldots(n+3)}{1.2\ldots(n-2)}\right]$$
$$+'p^{2n}\left['C_{n}+2n\,.\,'D_{n}+\&c.\ldots+'N_{n}\cdot\frac{2n\ldots(n+3)}{1.2.3\ldots(n-2)}\right]$$

il faut présentement intégrer les équations précédentes; or, si l'on fait $-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\text{cos. }q$; & $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\text{sin. }q$, ce qui donne à peu-près $q=110^{\circ}\,42'$, on trouvera *art. IX*,

$$A_n = 2^{\frac{n}{2}} . [\alpha \text{ cof. } nq + \beta . \text{ fin. } nq]$$

α & β étant deux conſtantes arbitraires; or, ſi l'on fait $n = 0$, on a $A_0 = 0 = \alpha$; & ſi l'on fait $n = 1$, on a $A_n = \frac{1}{2}$, parce que ${}_1y_x = \frac{1}{2^{x-1}}$; donc, $\beta . \sqrt{2} . \text{fin. } q = \frac{1}{2}$, & $\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ fin. } q$; partant, $A_n = 2^{\frac{n-3}{2}} \frac{\text{fin. } nq}{\text{fin. } q}$.

l'équation $2 N_n = \frac{1}{4} . \frac{N_n}{p} + \frac{1}{4} . \frac{N_{n-1}}{p}$. donne $N_n = \frac{Q}{(8p-1)^{n-2}}$. cette valeur de N_n ne commence à avoir lieu que lorſque $n = 2$; donc, $Q = N_2$, & $N_n = \frac{N_2}{(8p-1)^{n-2}}$; pareillement, ${}'N_n = \frac{{}'N_2}{(8.{}'p-1)^{n-2}}$; on déterminera N_2 & ${}'N_2$ par ces équations

$$1 = \frac{A_2}{2^2} + p^2 . N_2 + {}'p^2 . {}'N_2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{A_2}{2^4} + p^4 . N_2 + {}'p^4 . {}'N_2$$

on déterminera de la même manière, les autres coëfficiens M_n, L_n, K_n, &c.

XXXIII.

PROBLEME XVII.

Deux Joueurs *A* & *B* jouent à cette condition, qu'à chaque coup, celui qui perdra donnera un écu à l'autre; je ſuppoſe que l'adreſſe de *A* ſoit à celle de *B*, comme *p* eſt à *q*, & que l'un & l'autre ait un nombre *m* d'écus; on demande quelle eſt la probabilité que le jeu finira avant, ou au nombre *x* de coups.

Je ſuppoſe d'abord $p = q$. ſoit ${}_0y_x$, le nombre des cas ſuivans leſquels au coup *x*, le gain des deux Joueurs eſt nul; ${}_1y_x$ le nombre des cas ſuivans leſquels le gain de l'un ou de l'autre eſt 1; ${}_2y_x$ le nombre des cas ſuivans leſquels il eſt 2, & ainſi de ſuite; cela poſé, on formera les équations ſuivantes.

$$\left\{\begin{array}{llll} {}_0y_x = & & {}_1y_{x-1} & \\ {}_1y_x = & 2\,. & {}_0y_{x-1} + & {}_2y_{x-1} \\ {}_2y_x = & & {}_1y_{x-1} + & {}_3y_{x-1} \\ {}_3y_x = & & {}_2y_{x-1} + & {}_4y_{x-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ {}_ny_x = & & {}_{n-1}y_{x-1} + & {}_{n+1}y_{x-1} \quad (\sigma) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ {}_{m-1}y_x = & & {}_{m-2}y_{x-1} & \end{array}\right\} (\psi)$$

Pour montrer par quel procédé on obtient ces équations, j'obſerve qu'en un coup il peut arriver deux cas différens; ſavoir que A gagne, ou que ce ſoit B; or, il eſt clair que le gain ne peut être zéro au coup x, ſans avoir été 1 au coup $x - 1$, & chaque cas dans lequel il eſt 1 au coup $x - 1$, donne un cas dans lequel il eſt nul au coup x; d'où je tire l'équation

$${}_0y_x = {}_1y_{x-1}$$

Enſuite tous les cas dans leſquels le gain eſt nul au coup $x - 1$, donnent chacun deux cas dans leſquels il eſt 1 au coup x; d'où l'on aura

$${}_1y_x = 2\,.\,{}_0y_{x-1} + {}_2y_{x-1}.$$

Il en eſt de même des autres équations; enfin on obtiendra la dernière, en conſidérant que l'on doit exclure le terme ${}_my_{x-1}$, parce que ce terme ne peut avoir lieu, tant que le jeu eſt ſuppoſé ne pas finir.

Le nombre de tous les cas poſſibles eſt 2^x; car en nommant h_x ce nombre, comme il peut arriver au coup ſuivant deux cas différens; ſavoir que A gagne B, ou que B gagne A; le nombre h_x pouvant ſe combiner avec ces deux cas, donne conſéquemment $2h_x$ pour le nombre de tous les cas poſſibles au coup $x + 1$; on a donc $h_{x+1} = 2\,h_x$; d'où en intégrant, $h_x = A\,.\,2^x$; A étant une conſtante arbitraire; or, poſant $x = 1$, $h_x = 2$; donc $A = 1$, & $h_x = 2^x$.

Soit

Soit préſentement u_x la probabilité que le jeu finira préciſément au nombre x de coups; on aura $u_x = \frac{{}_m y_x}{2^x}$; mais on a viſiblement ${}_m y_x = {}_{m-1}y_{x-1}$; donc $u_x = \frac{{}_{m-1}y_{x-1}}{2^x}$; Soit z_x la probabilité que le jeu finira avant ou au nombre x de coups, on aura $z_x = z_{x-1} + u_x$; donc $\Delta . z_{x-1} = \frac{{}_{m-1}y_{x-1}}{2^x}$, ou $2^{x+1} . \Delta . z_x = {}_{m-1}y_x$. Il ne s'agit donc plus que de déterminer la valeur de ${}_{m-1}y_x$, ce qui peut ſe faire au moyen des équations précédentes (ψ). Pour cela j'obſerve que ces équations peuvent ſe rapporter au Problème VIII, au moyen d'une légère préparation; or cette préparation conſiſte à former, au moyen des deux premières, une équation entre trois variables, ce que l'on fera en ſubſtituant dans la ſeconde, au lieu de ${}_0 y_{x-1}$, ſa valeur ${}_1 y_{x-2}$, tirée de la première, & l'on aura

$$ {}_1 y_x = 2 . {}_1 y_{x-2} + {}_2 y_{x-1}. $$

Soit maintenant

$$ {}_n y_x = a_n . {}_n y_{x-2} + {}'a_n . {}_n y_{x-4} + \&c. \ldots + u_n \quad (\Omega) $$
$$ + b_n . {}_{n+1}y_{x-1} + {}'b_n . {}_{n+1}y_{x-3} + \&c. $$

Il ne faut point tenir compte dans cette équation, des termes ${}_n y_{x-1}$, ${}_n y_{x-3}$, &c. ${}_{n+1}y_{x-2}$, ${}_{n+1}y_{x-4}$, &c. parce que ces termes ſont nuls dès que ${}_n y_x$ a une valeur quelconque, vu que ſi le gain eſt pair ou impair au coup x, il eſt néceſſairement impair ou pair aux coups $x-1$, $x-3$, &c. cela poſé, l'équation (Ω), donne

$$ {}_{n-1}y_{x-1} = a_{n-1} . {}_{n-1}y_{x-3} + {}'a_{n-1} . {}_{n-1}y_{x-5} + \&c. \ldots + r_{n-1} $$
$$ + b_{n-1} . {}_n y_{x-2} + {}'b_n . {}_n y_{x-4} + \&c. $$

Si l'on ſubſtitue dans cette équation au lieu de ${}_{n-1}y_{x-1}$, ${}_{n-1}y_{x-3}$, &c. leurs valeurs que donne l'équation (σ), on aura après avoir ordonné,

$$
\begin{aligned}
{}_{n}y_x = & \left[a_{n-1} + b_{n-1}\right] \cdot {}_{n}y_{x-2} + \left[{}^{1}a_{n-1} + {}^{1}b_{n-1}\right] \cdot {}_{n}y_{x-4} \\
& + \left[{}^{2}a_{n-1} + {}^{2}b_{n-1}\right] \cdot {}_{n}y_{x-6} + \&c. \\
& + {}_{n+1}y_{x-1} - a_{n-1} \cdot {}_{n+1}y_{x-3} - {}^{1}a_{n-1} \cdot {}_{n+1}y_{x-5} - \&c. \ldots + u_{n-1}
\end{aligned}
$$

en comparant cette équation avec l'équation (Ω), on aura

$$
\begin{aligned}
b_n &= 1 \\
a_n &= a_{n-1} + b_{n-1} \\
{}^{1}b_n &= - a_{n-1} \\
{}^{1}a_n &= {}^{1}a_{n-1} + {}^{1}b_{n-1} \\
{}^{2}b_n &= - {}^{1}a_{n-1} \\
{}^{2}a_{n-1} &= {}^{2}a_{n-1} + {}^{2}b_{n-1} \\
\&c. & \\
u_n &= u_{n-1}
\end{aligned}
$$

Pour intégrer ces équations, il est nécessaire de faire les considérations suivantes:

La première équation commence à avoir lieu lorsque $n = 1$.

La seconde ne commence à exister que lorsque $n = 2$; ainsi, la constante arbitraire qui vient en l'intégrant, doit se déterminer au moyen de la valeur de a_n lorsque $n = 1$.

La troisième équation commence à exister lorsque $n = 2$.

La quatrième ne commence à exister que lorsque $n = 3$; & la constante arbitraire qui vient en l'intégrant, doit se déterminer au moyen de la valeur de ${}^{1}a_n$, lorsque $n = 2$; & ainsi du reste: cela posé,

Si l'on intègre la seconde équation, on aura $a_n = n + C$, C étant une constante arbitraire; or, posant $n = 1$, $a_n = 2$, donc, $C = 1$; partant, ${}^{1}b_n = - a_{n-1} = - n$. On doit observer que cette équation ne commence à exister que lorsque $n = 2$; or, n étant 1, on a ${}^{1}b_1 = 0$, ${}^{2}b_1 = 0$, &c. de plus, en faisant $n = 2$, on a ${}^{2}b_2 = - {}^{1}a_1 = 0$; semblablement, ${}^{3}b_2 = 0$, ${}^{4}b_2 = 0$, &c. ${}^{1}a_2 = {}^{1}a_1 + {}^{1}b_1 = 0$; pareillement, ${}^{2}a_2 = 0$, ${}^{3}a_2 = 0$, &c.

Si l'on intègre la quatrième équation, on aura

${}^{1}a_x = - \frac{(n+1).(n-2)}{1.2} + C$; pour déterminer la constante C,

on se servira de la valeur de ${}^{1}a_{1}$; or, on a ${}^{1}a_{1} = 0$; donc $C = 0$; partant, ${}^{2}b_{n} = \frac{n.(n-3)}{1.2}$; cette expression de ${}^{2}b_{n}$ ne peut commencer à avoir lieu par les remarques précédentes, que lorsque $n = 3$; de plus, en faisant $n = 3$, on a ${}^{3}b_{1} = -{}^{2}a_{2} = 0$; pareillement, ${}^{4}b_{1} = 0$, ${}^{5}b_{1} = 0$, &c. ${}^{2}a_{3} = {}^{2}a_{2} + {}^{2}b_{2} = 0$; pareillement, ${}^{3}a_{3} = 0$, ${}^{4}a_{3} = 0$, &c.

La sixième équation donne en intégrant

${}^{3}a_{n} = \frac{(n+1).(n-3).(n-4)}{1.2.3} + C$. Pour déterminer C, j'observe que ${}^{2}a_{3} = 0$; donc, $C = 0$. Partant

${}^{3}b_{n} = -\frac{n.(n-4).(n-5)}{1.2.3}$, expression qui ne peut commencer à exister que lorsque $n = 4$, & ainsi de suite.

Enfin, $u_{n} = u_{n-1}$; donc, $u_{n} = C$; or, posant $n = 1$, $u_{n} = 0$; donc, $C = 0$. Ainsi l'on aura

$$ {}_{n}y_{x} = (n+1).{}_{n}y_{x-2} - \frac{(n+1).(n-2)}{1.2}.{}_{n}y_{x-4} + \frac{(n+1).(n-3).(n-4)}{1.2.3}.{}_{n}y_{x-6} - \&c. $$

$$ + {}_{n+1}y_{x-1} - n.{}_{n+1}y_{x-3} + \frac{n.(n-3)}{1.2}.{}_{n+1}y_{x-5} - \&c. $$

Si l'on suppose présentement $n = m - 1$, alors il ne faut point tenir compte des termes ${}_{n+1}y_{x-1}$, ${}_{n+1}y_{x-3}$, &c. parce que ces termes sont exclus des équations (ψ) ; on aura donc,

$$ {}_{m-1}y_{x} = m.{}_{m-1}y_{x-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2}.{}_{m-1}y_{x-4} + \frac{m.(m-4).(m-5)}{1.2.3}\,{}_{m-1}y_{x-6} - \&c. $$

Si l'on substitue présentement dans cette équation, au lieu de ${}_{m-1}y_{x}$, sa valeur $2^{x+1}.\Delta.z_{x}$, on aura, après avoir intégré,

$$ z_{x} = m.\frac{1}{2^{2}}.z_{x-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2}.\frac{1}{2^{4}}\,z_{x-4} + \frac{m.(m-4).(m-5)}{1.2.3}.\frac{1}{2^{6}}.z_{x-6}\ldots + C. $$

Je ſuppoſe maintenant les adreſſes de deux joueurs inégales dans la raiſon de p à q; ſoit $p + q = 1$. Cela poſé, ſi l'on demande la probabilité de la combinaiſon ſuivante,

$$\overset{1}{p} \cdot \overset{2}{q} \cdot \overset{3}{q} \cdot \overset{4}{p} \cdot \overset{5}{p} \cdot \overset{6}{p} \cdot \overset{7}{q} \cdots\cdots \overset{x}{q},$$

ce qui ſignifie A gagne au premier coup, B au ſecond & au troiſième, A aux quatrième, cinquième & ſixième, &c. Il eſt clair que pour avoir cette probabilité on doit multiplier toutes ces quantités les unes par les autres; nommant donc r le nombre de fois que p ſe trouve répété dans cette combinaiſon, $x - r$ exprimera combien de fois q s'y trouve répété; la probabilité de cette combinaiſon ſera conſéquemment $p^r . q^{x-r}$.

Si l'on fait $x - r = r + s$, & que dans quelque endroit que l'on arrête la combinaiſon, le nombre de fois qu'une des quantités p & q s'y trouve plus ſouvent répétée que l'autre ſoit toujours moindre que m, cette combinaiſon ſera une de celles dans leſquelles B gagneroit s écus au joueur A; or, on peut faire une combinaiſon correſpondante dans laquelle A gagneroit s écus à B, & la probabilité de cette combinaiſon ſera $= q^r . p^{r+s}$, le rapport de cette probabilité à la précédente eſt celui de p^s à q^s; d'où il réſulte que généralement le nombre des cas ſuivant leſquels A gagne s écus à B, multipliés chacun par leur probabilité particulière, eſt au nombre des cas ſuivant leſquels B gagne s écus au joueur A, multipliés par leur probabilité, comme $p^s : q^s$; cela poſé,

Soit ${}_0y_x$ le nombre des cas ſuivant leſquels au coup x le gain des deux joueurs eſt nul, multipliés chacun par leur probabilité. Soient ${}_1y_x$, ${}_2y_x$, &c. le nombre des cas ſuivant leſquels le gain du joueur A eſt 1, 2, &c. écus, multipliés chacun par leur probabilité particulière, & que ${}_1\overset{1}{y}_x$, ${}_2\overset{1}{y}_x$, &c. expriment des quantités analogues pour le joueur B; il eſt aiſé préſentement par des conſidérations entièrement ſemblables à celles ſuivant leſquelles j'ai formé les équations (Ψ) d'obtenir les ſuivantes,

$$\left.\begin{array}{l}
{}_0y_x = q\cdot {}_1y_{x-1} + p\cdot {}_1^1y_{x-1} \\
{}_1y_x = p\cdot {}_0y_{x-1} + q\cdot {}_2y_{x-1} \\
{}_2y_x = p\cdot {}_1y_{x-1} + q\cdot {}_3y_{x-1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
{}_ny_x = p\cdot {}_{n-1}y_{x-1} + q\cdot {}_{n+1}y_{x-1} (\sigma') \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
{}_{m-1}y_x = p\cdot {}_{m-2}y_{x-1}
\end{array}\right\} (\psi')$$

Or on a par les remarques précédentes, $p\cdot {}_1y_{x-1} = q\cdot {}_1^1y_{x-1}$. La première équation devient donc ${}_0y_x = 2q\cdot {}_1y_{x-1}$, partant ${}_0y_{x-1} = 2q\cdot {}_1y_{x-2}$; substituant cette valeur de ${}_0y_{x-1}$ dans la seconde, on aura ${}_1y_x = 2qp\cdot {}_1y_{x-1} + q\cdot {}_2y_{x-1}$; il est aisé de voir que les équations (ψ') se rapportent ainsi au Problème VIII. Soit donc

$${}_ny_x = a_n\cdot {}_ny_{x-2} + {}'a_n\cdot {}_ny_{n-4} + \&c.\ldots + u_n + b_n\cdot {}_{n+1}y_{x-1} + {}'b_n\cdot {}_{n+1}y_{x-3} + \&c.$$

& l'on trouvera en opérant exactement, comme je l'ai fait ci-dessus, lorsque p & q étoient égaux,

$${}_ny_x = (n+1)\cdot pq\cdot {}_ny_{x-2} - \frac{(n+1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2}\cdot p^2q^2\cdot {}_ny_{x-4} + \&c. + q\cdot {}_{n+1}y_{x-1} - n\cdot pq^2\cdot {}_{n+1}y_{x-3} + \&c.$$

Donc, si l'on suppose $n = m - 1$, on aura

$${}_{m-1}y_x = m\cdot pq\cdot {}_{m-1}y_{x-2} - \frac{m\cdot(m-3)}{1\cdot 2}\cdot p^2q^2\cdot {}_{m-1}y_{x-4} + \&c. \ (\varpi);$$

en rejetant les termes ${}_my_{x-1}$, ${}_my_{x-3}$, &c. qui ne peuvent avoir lieu, d'après la supposition que le jeu ne finit pas avant le coup x. Soit maintenant u_x la probabilité que le jeu finira précisément au coup x, il est visible que l'on aura $u_x = {}_my_x + {}_m^1y_x$; or on a ${}_my_x : {}_m^1y_x :: p^m : q^m$; donc, $u_x = \left(1 + \frac{q^m}{p^m}\right)\cdot {}_my_x$; de plus, ${}_my_x = p\cdot {}_{m-1}y_{x-1}$; partant, $u_x = p\left(1 + \frac{q^m}{p^m}\right)\cdot {}_{m-1}y_{x-1}$. Soit z_x la probabilité que le jeu finira avant, ou au

coup x, on aura $\Delta . z_x = u_{x+1} = p(1 + \frac{q^m}{p^m}) . {}_{m-1}y_x$; en ſubſtituant donc au lieu de ${}_{m-1}y_x$, cette valeur dans l'équation (ϖ), on aura, après avoir intégré,

$$z_x = m.pq.z_{x-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2}.p^2q^2.z_{x-4} + \frac{m.(m-4).(m-5)}{1.2.3}.p^3q^3.z_{x-6} - \&c. + C \ (\varpi).$$

Pour déterminer la conſtante arbitraire C, j'obſerve que tant que x eſt moindre que m, $z_x = 0$, & que x étant égal à m, $z_x = p^m + q^m$; donc, $C = p^m + q^m$. Soit $1 - t_x = z_x$; t_x exprimera conſéquemment la probabilité que le jeu ne finira pas avant, ou au coup x, & l'on aura

$$t_x = m.pq.t_{x-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2}.p^2q^2.t_{x-4} + \&c. - p^m - q^m + [1 - mpq + \frac{m.(m-3)}{1.2}p^2q^2 - \&c.]$$

Or il eſt remarquable que l'on a, quel que ſoit m, & en ſuppoſant $p + q = 1$,

$$0 = 1 - p^m - q^m - mpq + \frac{m.(m-3)}{1.2}.p^2q^2 - \&c.$$

ou généralement, en ſuppoſant p & q quelconques,

$$(p+q)^m = m.pq(p+q)^{m-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2}.p^2q^2.(p+q)^{m-4} + \&c. + p^m + q^m,$$

c'eſt ce dont on pourroit s'aſſurer par induction, en donnant à m différentes valeurs numériques, mais en voici une démonſtration générale; on a

$$p + q = p + q$$
$$(p+q)^2 = 2pq.(p+q)^0 + p^2 + q^2,$$
$$(p+q)^3 = 3pq\,(p+q) + p^3 + q^3,$$
&c.

Soit donc en général

$$(p+q)^m = A_m.(p+q)^{m-2} + {}'A_m.(p+q)^{m-4} + \&c.\ldots + p^m + q^m \ (\&).$$

& l'on aura

$$(p+q)^{m+1} = A_m \cdot (p+q)^{m-1} + {}'A_m \cdot (p+q)^{m-3} + \&c\ldots$$
$$+ p^{m+1} + q^{m+1}$$
$$+ pq(p^{m-1} + q^{m-1})$$

Or, on a

$$p^{m-1} + q^{m-1} = (p+q)^{m-1} - A_{m-1} \cdot (p+q)^{m-3} - \&c.$$

Donc,

$$(p+q)^{m+1} = (A_m + pq) \cdot (p+q)^{m-1}$$
$$+ ({}'A_m - A_{m-1} \cdot pq)(p+q)^{m-3} + \&c.$$
$$+ p^{m+1} + q^{m+1}$$

On a d'ailleurs

$$(p+q)^{m+1} = A_{m+1}(p+q)^{m-1}$$
$$+ {}'A_{m+1} \cdot (p+q)^{m-3} + \&c. + p^{m+1} + q^{m+1},$$

d'où, en comparant, on aura

$$A_{m+1} = A_m + pq$$
$${}'A_{m+1} = {}'A_m - A_{m-1} \cdot pq$$
$${}^2A_{m+1} = {}^2A_m - {}'A_{m-1} \cdot pq$$
&c.

Toutes ces équations ne peuvent commencer à exister à la fois; la première ne commence à avoir lieu que lorsque $m = 1$; la seconde lorsque $m = 2$; la troisième lorsque $m = 3$, &c. De plus, comme elles supposent nécessairement connues les expressions de $(p+q)^1$ & $(p+q)^2$, pour déterminer ensuite à leur moyen, $(p+q)^3$, $(p+q)^4$, &c. il résulte que la loi représentée par ces équations, commence à avoir lieu lorsque $m + 1 = 3$; ainsi, la première équation commence à exister lorsque $m = 2$; la seconde, lorsque $m = 3$; la troisième, lorsque $m = 4$, &c. cela posé,

En intégrant la première, on a $A_m = m \cdot pq + C$. Or, posant $m = 2$, on a, $A_2 = 2pq$; donc, $C = 0$.

Ensuite, la seconde donne ${}'A_m = -\frac{m \cdot (m-3)}{1 \cdot 2} p^2 q^2 + C$:

or, posant $m = 3$, ${}'A_{,} = 0$, parce que $(p+q)$ ne peut avoir d'exposant négatif dans la formule *(&)*; donc, $C = 0$; & ainsi du reste. Donc,

$$(p+q)^m = mpq \cdot (p+q)^{m-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2} \cdot p^2 q^2 \cdot (p+q)^{m-4} + \&c... + p^m + q^m;$$

ainsi, l'on aura

$$t_x = m \cdot pq \cdot t_{x-1} - \frac{m.(m-3)}{1.2} \cdot p^2 q^2 \cdot t_{x-2} + \&c. \quad (\delta)$$

Pour intégrer cette équation, je commence par observer qu'elle est différentielle de l'ordre $\frac{m}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$, suivant que m est pair ou impair. De plus, il est aisé de voir à l'inspection des équations (ψ'), qu'elle commence à exister lorsque $x = m$. Ainsi, les constantes arbitraires qui viennent par l'intégration, doivent être déterminées par les valeurs de t_x, lorsqu'on fait $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$, &c... $x = m - 2$, ou $x = 1$, $x = 3$, $x = 5 \ldots x = m - 2$, suivant que m est pair ou impair. Or, toutes ces valeurs sont égales à l'unité, puisqu'il est certain que le jeu ne peut finir avant m coups.

Présentement, si l'on suppose $x' = \frac{x}{2}$ ou $\frac{x-1}{2}$, suivant que m est pair ou impair, on aura

$$t_{x'} = m \cdot pq \cdot t_{x'-1} - \frac{m.(m-3)}{1.2} \cdot t_{x'-2} + \&c.$$

L'intégrale de cette équation dépend de la résolution de cette équation algébrique,

$$f^{\frac{m}{2}} = m.pq.f^{\frac{m}{2}-1} - \frac{m.(m-3)}{1.2} \cdot p^2 q^2 \cdot f^{\frac{m}{2}-2} + \&c.$$

si m est pair; ou de celle-ci

$$f^{\frac{m-1}{2}} = m.pq.f^{\frac{m-1}{2}-1} - \frac{m.(m-3)}{1.2} \cdot p^2 q^2 f^{\frac{m-1}{2}-2} + \&c.$$

si m est impair.

Or,

Or. si l'on fait cos. $\varphi = y$, on a, comme l'on sait,

$$\text{cos. } m\varphi = 2^{m-1}.y^m - m.2^{m-3}.y^{m-2} + \frac{m.(m-3)}{1.2}.2^{m-5}.y^{m-4} - \&c.$$

Soit cos. $m\varphi = 0$, & l'on aura

$$0 = y^m - m.\frac{1}{4}.y^{m-2} + \frac{m.(m-3)}{1.2}.\frac{1}{4^2}.y^{m-4} - \&c.$$

lorsque m est pair,

$$\text{ou, } 0 = y^{m-1} - m.\frac{1}{4}.y^{m-3} + \frac{m.(m-3)}{1.2}.\frac{1}{4^2}.y^{m-5} - \&c.$$

lorsque m est impair.

Les différentes valeurs de y dans cette équation, sont les cosinus des différens arcs qui, multipliés par m, ont leurs cosinus égaux à zéro; or, les arcs qui ont leurs cosinus nuls, sont $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, &c. π exprimant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. Les différentes valeurs de y sont conséquemment, plus & moins, les cosinus des arcs $\frac{\pi}{2m}$, $\frac{3\pi}{2m}$, $\frac{5\pi}{2m}$, &c. jusqu'à $\frac{(m-1).\pi}{2m}$, ou $\frac{(m-2)\pi}{2m}$, inclusivement, suivant que m est pair ou impair; les cosinus des arcs suivans étant les mêmes, à la différence des signes près, celui de $\frac{\pi}{2}$ étant nul; soient donc l, ${}^1l$, ${}^2l$, &c. ces différens cosinus, les valeurs de y seront donc $\pm l$, $\pm {}^1l$, &c. or, il est aisé de voir que $f = 4.y^2pq$; partant, les différentes valeurs de f seront $4l^2.pq$, $4.{}^1l^2.pq$, &c. d'où l'on aura

$$t_x = A.[2l\sqrt{(pq)}]^x + {}^1A\,[2.{}^1l\sqrt{(pq)}]^x + \&c.$$

A, ${}^1A$, &c. étant des constantes arbitraires qui se détermineront par la méthode de l'*article IX*.

XXXIV.

PROBLEME XVIII.

J'ai supposé dans le Problème précédent, que les deux

joueurs A & B avoient un égal nombre m d'écus; je suppose actuellement que le joueur A ait i, écus, & le joueur B, m, écus; le reste subsistant comme ci-dessus, on demande la probabilité que le jeu finira avant, ou au nombre x de coups.

Il est aisé de voir que l'on aura d'abord les équations (ψ') du Problème précédent. De plus, on aura les suivantes.

$$\left.\begin{array}{l} {}_1\overset{1}{y}_x = q \cdot {}_0\overset{1}{y}_{x-1} + p \cdot {}_2\overset{1}{y}_{x-1} \\ {}_2\overset{1}{y}_x = q \cdot {}_1\overset{1}{y}_{x-1} + p \cdot {}_3\overset{1}{y}_{x-1} \\ {}_3\overset{1}{y}_x = q \cdot {}_2\overset{1}{y}_{x-1} + p \cdot {}_4\overset{1}{y}_{x-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}_n\overset{1}{y}_x = q \cdot {}_{n-1}\overset{1}{y}_{x-1} + p \cdot {}_{n+1}\overset{1}{y}_{x-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}_{i-1}\overset{1}{y}_x = q \cdot {}_{i-2}\overset{1}{y}_{x-1} \end{array}\right\} (\psi'')$$

Soit ${}_{i-1}\overset{1}{y}_x = {}_1\lambda_x$, ${}_{i-2}\overset{i}{y}_x = {}_2\lambda_x$, ${}_{i-3}\overset{1}{y}_x = {}_3\lambda_x$ . . . &c. ${}_0y_x = {}_i\lambda_x$, ${}_1y_x = {}_{i+1}\lambda_x$, ${}_2y_x = {}_{i+2}\lambda_x$, &c. & l'on aura, en réunissant les équations (ψ') & (ψ''),

$${}_1\lambda_x = q \cdot {}_2\lambda_{x-1}$$
$${}_2\lambda_x = q \cdot {}_3\lambda_{x-1} + p\ {}_1\lambda_{x-1}$$
&c.

. . . .

$${}_{i+m-1}\lambda_x = p \cdot {}_{i+m-2}\lambda_{x-1}$$

Soit

$${}_n\lambda_x = a_n \cdot {}_n\lambda_{x-2} + {}^1a_n \cdot {}_n\lambda_{x-4} + {}^2a_n \cdot {}_n\lambda_{x-6} \ldots + u_n + b_n \cdot {}_{n+1}\lambda_{x-1} + {}^1b_n \cdot {}_{n+1}\lambda_{x-3} + {}^2b_n \cdot {}_{n-1}\lambda_{x-5} + \&c. (\Omega''),$$

& l'on aura

$$p \cdot {}_{n-1}\lambda_{x-1} = a_{n-1} \cdot p \cdot {}_{n-1}\lambda_{x-3} + {}^1a_{n-1} \cdot p \cdot {}_{n-1}\lambda_{x-5} + {}^2a_{n-1} \cdot p \cdot {}_{n-1}\lambda_{x-7} \ldots\ldots + u_{n-1} \cdot p + b_{n-1} \cdot p \cdot {}_n\lambda_{x-2} + {}^1b_{n-1} \cdot p \cdot {}_n\lambda_{x-4} + \&c.$$

or on a ${}_{n}\lambda_{x} = q \cdot {}_{n+1}\lambda_{x-1} + p \cdot {}_{n-1}\lambda_{x-1}$; donc,

$${}_{n}\lambda_{x} = (a_{n-1} + b_{n-1} \cdot p)\,{}_{n}\lambda_{x-2} + ({}^{1}a_{n-1} + {}^{1}b_{n-1} \cdot p)\,{}_{n}\lambda_{x-4}$$
$$+ ({}^{1}a_{n-1} + {}^{1}b_{n-1} \cdot p)\,{}_{n}\lambda_{x-6} + \&c. \ldots\ldots + u_{n-1} \cdot p$$
$$+ q \cdot {}_{n+1}\lambda_{x-1} - a_{n-1} \cdot q \cdot {}_{n+1}\lambda_{x-3} - {}^{1}a_{n-1} \cdot q \cdot {}_{n+1}\lambda_{x-5} - \&c.$$

d'où l'on aura en comparant avec l'équation (Ω'')

$$b_n = q$$
$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \cdot p$$
$${}^{1}b_n = -\, a_{n-1} \cdot q$$
$${}^{1}a_n = {}^{1}a_{n-1} + {}^{1}b_{n-1} \cdot p$$
$${}^{2}b_n = -\, {}^{1}a_{n-1} \cdot q$$
$${}^{2}a_n = {}^{2}a_{n-1} + {}^{2}b_{n-1} \cdot p$$
$$\&c.$$
$$u_n = u_{n-1} \cdot p$$

On doit observer que la première de ces équations commence à exister lorsque $n = 1$; la seconde & la troisième, lorsque $n = 2$; la quatrième & la cinquième lorsque $n = 3$, &c. Cela posé:

Si l'on intègre la seconde on aura $a_n = (n - 1) \cdot pq + C$; or, posant $n = 1$, $a_n = 0$; donc, $C = 0$; partant, ${}^{1}b_n = -\, a_{n-1} \cdot q = -\, (n - 2) p q^2$.

Si l'on intègre la quatrième, on aura
${}^{1}a_n = -\, \frac{(n-2)\cdot(n-3)}{1 \cdot 2} \cdot p^2 q^2 - C$; pour déterminer la constante C, j'observe que lorsque $n = 2$, on a ${}^{1}a_2 = {}^{1}a_1 + {}^{1}b_1 \cdot p = 0$; donc, $C = 0$; partant,
${}^{2}b_n = \frac{(n-3)\cdot(n-4)}{1 \cdot 2} \cdot p^2 q^3$.

Si l'on intègre la sixième équation, on aura
${}^{2}a_n = \frac{(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot p^3 q^3 + C$; or, on a ${}^{2}a_3 = {}^{2}a_2 + {}^{1}b_2$, & ${}^{2}a_2 = {}^{2}a_1 + {}^{1}b_1 = 0$; donc, ${}^{2}a_3 = 0$; partant, $C = 0$, & ainsi du reste.

Enfin, on a $u_n = u_{n-1} . p$; donc, $u_n = C . p^n$; or, posant, $n = 1$, $u_n = 0$; donc, $C = 0$ & $u_n = 0$; donc,

$$ {}_n\lambda_x = (n - 1) . p q . {}_n\lambda_{x-2} - \frac{(n-2).(n-3)}{1.2} p^2 q^2 . {}_n\lambda_{x-4} + \frac{(n-3).(n-4).(n-5)}{1.2.3} . p^3 q^3 . {}_n\lambda_{x-6} - \&c. + q . {}_{n+1}\lambda_{x-1} - (n-2) p q^2 . {}_{n+1}\lambda_{x-3} + \frac{(n-3).(n-4)}{1.2} . p^2 q^3 . {}_{n+1}\lambda_{x-5} - \&c. $$

Si l'on fait $n = i + m - 1$, on aura, ${}_{i+m-1}\lambda_x = {}_{m-1}y_x$, & ${}_{i+m}\lambda_x = 0$; donc,

$$ {}_{m-1}y_x = (i + m - 2) p q . {}_{m-1}y_{x-2} - \frac{(i+m-3).(i+m-4)}{1.2} . p^2 q^2 . {}_{m-1}y_{x-4} + \frac{(i+m-4).(i+m-5).(i+m-6)}{1.2.3} . p^3 q^3 . {}_{m-1}y_{x-6} - \&c. \quad (\nu) $$

Si donc l'on nomme z_x la probabilité que A gagnera avant ou au coup x; on aura, par un procédé semblable à celui du Problème précédent,

$$ z_x = (m + i - 2) . p q . z_{x-2} - \frac{(m+i-3).(m+i-4)}{1.2} . p^2 q^2 . z_{x-4} + \&c. + C . \quad (\pi) $$

Pareillement, si l'on nomme $\overset{1}{z}_x$ la probabilité du Joueur B, pour gagner avant, ou au coup x; on aura

$$ \overset{1}{z}_x = (m + i - 2) . p q . \overset{1}{z}_{x-2} - \frac{(m+i-3).(m+i-4)}{1.2} . p^2 q^2 . \overset{1}{z}_{x-4} + \&c. + {}'C; \quad (\pi') $$

Pour déterminer les constantes arbitraires qui entrent dans les expressions de z_x & $\overset{1}{z}_x$; j'observe qu'elles sont au nombre $\frac{m+i}{2}$, si $m + i$ est pair, ou $\frac{m+i+1}{2}$, s'il est impair; or, voici de quelle manière on les aura.

Je suppose m & i impairs; l'équation (ν) ne commencera

visiblement à avoir lieu que lorsque $x - i - m + 2 = 0$, ce qui donne $x = i + m - 2$. L'équation (π) ne commencera donc à exister que lorsque $x = i + m + 1$; il faut par conséquent avoir toutes les valeurs de z_x, depuis z_1 jusqu'à z_{i+m+1}, pour déterminer les constantes arbitraires de l'équation (π).

Si m & i sont des nombres pairs, l'équation (μ) ne commencera à avoir lieu que lorsque $x - i - m + 2 = 1$; ce qui donne $x = i + m - 1$. L'équation (π) ne commence donc à avoir lieu que lorsque $x = i + m + 2$; il faut par conséquent avoir les valeurs de z_x, depuis z_2 jusqu'à z_{i+m+2}.

Si m étant pair, i est impair; l'équation (μ) ne commencera à avoir lieu que lorsque $x - i - m + 1 = 1$; ce qui donne $x = i + m$. L'équation (π) n'a donc lieu que lorsque $x = i + m + 3$; ainsi il faut avoir les valeurs de z_x, depuis z_2 jusqu'à z_{i+m+3}.

Enfin, si m étant impair, i est pair; l'équation (μ) ne commencera à avoir lieu que lorsque $x - i - m + 1 = 0$; ce qui donne $x = i + m - 1$. L'équation (π) ne commence donc à exister que lorsque $x = i + m + 2$. Il faut conséquemment avoir les valeurs de z_x, depuis z_1, jusqu'à z_{i+m+2}.

Cela posé; le nombre de tous les cas possibles au coup m, multipliés chacun par leur probabilité particulière, sera

$$p^m + mp^{m-1} \cdot q + \frac{m.(m-1)}{1.2} \cdot p^{m-2} \cdot q^2 + \&c. \ldots + q^m$$

le nombre des cas qui font gagner A au coup m, $= p^m$. Pour avoir le nombre des cas qui le font gagner précisément au coup $m + 2$, il est visible qu'il faut retrancher p^m de la quantité précédente, & multiplier le reste par $p^2 + 2pq + q^2$; ce qui donne

$$m p^{m+1} \cdot q + \frac{m.(m-1)}{1.2} p^m \cdot q^2 + \frac{m(m-1).(m-2)}{1.2.3} \cdot p^{m-1} \cdot q^3 + \&c.$$

$$+ 2 m p^m \cdot q^2 + \frac{2.m(m-1)}{1.2} \cdot p^{m-1} q^3 + \&c. \qquad (\chi)$$

$$+ m p^{m-1} q^3 + \&c.$$

Or, le nombre des cas qui le font gagner précisément au coup $m + 2$, est visiblement $m.p^{m+1}.q$; on a donc $z_{m+2} = p^m [1 + m.pq]$

Pour avoir le nombre des cas qui font gagner A au coup $m + 4$, il faut retrancher de la quantité précédente (χ), $m p^{m+1} q$; multiplier le reste par $p^2 + 2pq + q^2$, & l'on aura $\frac{m.(m+3)}{1.2} p^{m+2} . q^2$. pour le nombre de ces cas; ainsi,

$$z_{m+4} = p^m \left[1 + mpq + \frac{m.(m+3)}{1.2} . p^2 q^2\right]$$

on trouvera de même

$$z_{m+6} = p^m \left[1 + mpq + \frac{m.(m+3)}{1.2} p^2 q^2 + \frac{m.(m+4).(m+5)}{1.2.3} p^3 q^3\right]$$

& ainsi de suite; la loi de ces valeurs de z_x a lieu jusqu'à z_{m+ri-2}; si l'on avoit besoin de valeurs ultérieures de z_x, on les obtiendroit facilement par ce procédé.

Pour intégrer présentement l'équation (π) il faut avoir les racines de l'équation

$$f^{\frac{m+i-1}{2}} = (m - i - 2).pq.f^{\frac{m+i-3}{2}}$$

$$- \frac{(m+i-3).(m+i-4)}{1.2} p^2 q^2 . f^{\frac{m+i-5}{2}} + \&c.$$

si $m + i$ est impair, ou

$$f^{\frac{m+i}{2} - 1} = (m + i - 2) pq . f^{\frac{m+i}{2} - 2} - \&c.$$

si $m + i$ est pair; or on trouvera ces racines en considérant que l'on a

$$\text{sin.}\,(m + i) z = x . [2^{m+i-1} . u^{m+i-1}$$

$$- (m + i - 2) . 2^{m+i-3} . u^{m+i-3} + \&c.]$$

x étant le ſinus & u le coſinus de l'angle z; or poſant ſin. $(m+i)z = 0$, on aura,

$$u^{m+i-1} = (m+i-2).\tfrac{1}{4}.u^{m+i-3} - \text{\&c.}$$

ſoit $u = \frac{\sqrt{(f)}}{\sqrt{(pq)}}$, & l'on aura

$$f^{\frac{m+i-1}{2}} = (m+i-2).pq.f^{\frac{m+i-3}{2}} \quad \text{\&c.}$$

ſi $m+i$ eſt impair, ou

$$f^{\frac{m+i}{2}-1} = (m+i-2).pq.f^{\frac{m+i}{2}-2} - \text{\&c.}$$

ſi $m+i$ eſt pair; les différentes valeurs de u, ſont les coſinus des angles z, tels que ſin. $(m+i)z = 0$, ce qui donne $z = \frac{\pi}{m+i}$, $z = \frac{2\pi}{m+i}$, $z = \frac{3\pi}{m+i}$, &c. ſoient l, ${}^{1}l$, ${}^{2}l$, &c. les coſinus de ces angles juſqu'à $\frac{m+i}{2}$, ſi $m+i$, eſt pair, ou $\frac{m+i-1}{2}$, s'il eſt impair; les différentes valeurs de f ſeront $4\,l^2\,p\,q$, $4\,{}^{1}l^2\,p\,q$, &c. Ces valeurs une fois déterminées, il eſt aiſé de trouver celles de z_x & $\overset{1}{z}_x$.

XXXV.

PROBLEME XIX.

Je ſuppoſe deux joueurs A & B, avec un égal nombre m d'écus, jouans à cette condition, que celui qui perdra donnera un écu à l'autre; que la probabilité de A pour gagner un coup ſoit p; que celle de B ſoit q; mais qu'il puiſſe arriver qu'aucun d'eux ne gagne, & que la probabilité pour cela ſoit r. Cela poſé, on demande la probabilité que le jeu finira avant ou au nombre x de coups.

Soit ${}_{0}y_x$ le nombre des cas ſuivant leſquels au coup x, le gain des deux joueurs eſt nul, multipliés par leur probabilités; ${}_{1}y_x$, ${}_{2}y_x$, ${}_{3}y_x$, &c. le nombre des cas ſuivant leſquels

le gain du joueur A eſt 1, 2, 3, &c. au coup x, multipliés par leur probabilité, & que ${}_1\overset{1}{y}_x$, ${}_2\overset{1}{y}_x$, ${}_3\overset{1}{y}_x$, &c. expriment les mêmes choſes pour le Joueur B. Cela poſé, on formera les équations ſuivantes.

$$
\begin{aligned}
{}_0y_x &= r\cdot{}_0y_{x-1} + q\cdot{}_1y_{x-1} + p\cdot{}_1\overset{1}{y}_{x-1}\\
{}_1y_x &= r\cdot{}_1y_{x-1} + q\cdot{}_2y_{x-1} + p\cdot{}_0y_{x-1}\\
{}_2y_x &= r\cdot{}_2y_{x-1} + q\cdot{}_3y_{x-1} + p\cdot{}_1y_{x-1}
\end{aligned}
$$

. . . .

$$
{}_ny_x = r\cdot{}_ny_{x-1} + q\cdot{}_{n+1}y_{x-1} + p\cdot{}_{n-1}y_{x-1};\ (\text{—}).
$$

. . . .

$$
{}_{m-1}y_x = r\cdot{}_{m-1}y_{x-1} + p\cdot{}_{m-2}y_{x-1};
$$

or, on a

$$
p\cdot{}_1\overset{1}{y}_{x-1} = q\cdot{}_1y_{x-1}.
$$

La première équation deviendra donc

$$
{}_0y_x = r\cdot{}_0y_{x-1} + 2q\cdot{}_1y_{x-1},
$$

& ſi on la combine avec la ſeconde, on aura

$$
{}_1y_x = 2r\cdot{}_1y_{x-1} + (2pq - r^2)\cdot{}_1y_{x-2} + q\cdot{}_2y_{x-1} - qr\cdot{}_2y_{x-2}
$$

Soit maintenant,

$$
\begin{aligned}
{}_ny_x = {} & a_n\cdot{}_ny_{x-1} + {}^{1}a_n\cdot{}_ny_{x-2} + \&c.\ldots + u_x\\
& + b_n\cdot{}_{n+1}y_{x-1} + {}^{1}b_n\cdot{}_{n+1}y_{x-2} + \&c.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
p\cdot{}_{n-1}y_{x-1} = {} & a_{n-1}\cdot p\cdot{}_{n-1}y_{x-2}\\
& + {}^{1}a_{n-1}\cdot p\cdot{}_{n-1}y_{x-3} + \&c.\ldots + p\cdot u_{n-1}\\
& + b_{n-1}\cdot p\cdot{}_ny_{x-2} + {}^{1}b_{n-1}\cdot p\cdot{}_ny_{x-3} + \&c.
\end{aligned}
$$

Subſtituant au lieu de $p\cdot{}_{n-1}y_{x-1}$, $p\cdot{}_{n-1}y_{x-2}$, &c. leurs valeurs que donne l'équation (—), on aura

$$
\begin{aligned}
{}_ny_x = {} & [a_{n-1} + r]\cdot{}_ny_{x-1} + [{}^{1}a_{n-1} - a_{n-1}\cdot r + pb_{n-1}]\cdot{}_ny_{x-2}\\
& + [{}^{2}a_{n-1} + {}^{1}a_{n-1}\cdot r + pb_{n-1}]\cdot{}_ny_{x-3} + \&c.\\
& + q\cdot{}_{n+1}y_{x-1} - a_{n-1}\cdot q\cdot{}_{n+1}y_{x-3}\\
& - {}^{1}a_{n-1}\cdot q\cdot{}_{n+1}y_{x-5} - \&c.\ldots + p\cdot u_{n-1};
\end{aligned}
$$

d'où,

d'où, en comparant, on aura

$$a_n = a_{n-1} + r$$
$$b_n = q$$
$${}^1a_n = {}^1a_{n-1} - a_{n-1} \cdot r + p \cdot b_{n-1}$$
$${}^1b_n = - a_{n-1} \cdot q$$
$${}^2a_n = {}^2a_{n-1} - {}^1a_{n-1} \cdot r + p \cdot {}^1b_{n-1},$$
&c.

La première de ces équations commence à exiſter lorſque $n = 2$; la ſeconde, lorſque $n = 1$; la troiſième, lorſque $n = 2$, &c. On aura donc, en intégrant & ajoutant les conſtantes convenables,

$$a_n = r \cdot (n + 1)$$
$$b_n = q$$
$${}^1a_n = - r^2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2} + pq \cdot (n + 1)$$
$${}^1b_n = - a_{n-1} \cdot q = - qrn.$$

Cette dernière équation étant vraie, lorſque $n = 1$; il ſuit que la cinquième équation commence à exiſter lorſque $n = 2$; ce qui donne, ${}^2a_n = r^3 \cdot \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - pqr \cdot (n + 1) \cdot (n - 1)$. Donc, ${}^2b_n = qr^2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}$; équation qui commence à exiſter lorſque $n = 1$, parce que ${}^2b_1 = 0$. Donc, la ſixième équation commence à exiſter lorſque $n = 2$, & l'on aura

$${}^3a_n = -r^4 \cdot \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + pqr^2 \cdot (n+1) \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$
$$- p^2 q^2 \cdot \frac{(n+1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2} + C.$$

Or, poſant $n = 2$, on a, ${}^3a_2 = {}^3a_1 - {}^2a_1 \cdot r + p \cdot {}^2b_1 = 0$; donc $C = 0$, & ainſi de ſuite; enfin, $u_n = 0$; on aura donc, en faiſant $n = m - 1$, & rejetant les termes ${}_my_{x-1}$, ${}_my_{x-2}$, &c.

$$ {}_{m-1}y_x = mr \cdot {}_{m-1}y_{x-1} - \left[r^2 \cdot \frac{m.(m-1)}{1.2} - pqm\right] \cdot {}_{m-1}y_{x-2} $$
$$ + \left[r^3 \cdot \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3} - pqr.m.(m-2)\right] \cdot {}_{m-1}y_{x-3} $$
$$ - \left[r^4 \cdot \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3.4} - pqr^2 \cdot \frac{m.(m-2).(m-3)}{1.2} \right. $$
$$ \left. + p^2q^2 \cdot \frac{m.(m-3)}{1.2}\right] \cdot {}_{m-1}y_{x-4} $$
$$ + \&c. $$

si l'on suppose $r = 0$, on aura

$$ {}_{m-1}y_x = mpq \cdot {}_{m-1}y_{x-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2} \cdot p^2q^2 \cdot {}_{m-1}y_{x-4} $$

la même équation que j'ai trouvée ci-dessus pour ce cas.

Si l'on nomme z_x la probabilité de A pour gagner avant ou au coup x, on aura

$$ z_x = mr \cdot z_{x-1} - \left(r^2 \cdot \frac{m.(m-1)}{1.2} - pqm\right) \cdot z_{x-2} + \&c. + C, $$

C étant une constante arbitraire.

Pareillement, si l'on nomme $\overset{1}{z}_x$ la probabilité de B pour gagner avant ou au coup x, on aura

$$ \overset{1}{z}_x = mr \cdot \overset{1}{z}_{x-1} - \left(r^2 \cdot \frac{m.(m-1)}{1.2} - pqm\right) \cdot \overset{1}{z}_{x-2} + \&c. + \overset{1}{C}, $$

pour intégrer ces équations, il faut avoir les racines de l'équation

$$ f^m = mr \cdot f^{m-1} - \left(r^2 \frac{m.(m-1)}{1.2} - pqm\right) f^{m-2} + \&c. \ (\Lambda), $$

or voici comme on peut les déterminer.

On a vu précédemment comment on pouvoit avoir les racines de l'équation

$$ y^m = mpq \cdot y^{m-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2} p^2q^2 \cdot y^{m-4} + \&c. $$

Soit $y = f - r$, & l'on aura

$$ f^m = mr.f^{m-1} - \left[r^2 \cdot \frac{m.(m-1)}{1.2} - pqm\right] . f^{m-2} $$
$$ + \left[r^3 \frac{m.(m-1).(m-3)}{1.2.3} - pqrm.(m-2)\right] . f^{m-3} - \&c. $$

équation qui est la même que l'équation (Λ); les différentes valeurs de f sont par conséquent égales à celles de y, aug-

mentées de la quantité r; présentement l'intégration de l'équation différentielle en z_x, n'a rien d'embarrassant.

XXXVI.

SUR le principe de la Gravitation universelle, & sur les Inégalités séculaires des Planètes qui en dépendent.

Avant que d'entrer en matière, je crois devoir rappeler ici les équations générales du mouvement d'un corps de figure quelconque, & animé par des forces quelconques; parce qu'elles servent de base, non-seulement aux recherches suivantes, mais à d'autres encore que je me propose de publier dans la suite sur différens objets de l'Astronomie physique. M. d'Alembert a donné le premier, la solution générale de ce Problème, la méthode la plus directe pour y parvenir, & tout-à-la-fois l'application la plus utile & la plus heureuse que l'on en puisse faire, dans son excellent Traité *sur la précession des équinoxes;* Ouvrage original, qui brille par-tout du génie de l'invention, & que l'on peut regarder comme renfermant le germe de tout ce qu'on a fait depuis dans la mécanique des corps solides. Cet illustre Géomètre a encore généralisé ses recherches dans plusieurs savans Mémoires qu'il a insérés dans le Recueil de l'Académie, & dans ses Opuscules. J'aurois pu renvoyer à ces ouvrages pour la démonstration des équations du Problème; mais comme celles auxquelles je parviens, ont une forme un peu différente des siennes, & qu'elles m'ont paru d'ailleurs commodes pour les appliquer à l'Astronomie; je vais exposer en peu de mots le procédé qui m'y a conduit.

XXXVII.

DU mouvement d'un Corps de figure quelconque & animé par des forces quelconques.

Par un point quelconque i du corps M (*fig. 1*), je mène trois droites iA, iB, iC perpendiculaires entre elles, & une

Fig. 1. droite iH qui traverse ce Corps, & que je prendrai pour axe; soit $iH = 1$, & que la projection de iH sur le plan AiB, soit iF; je nomme ε, l'angle AiF, & θ, l'angle HiF. Je suppose que durant le mouvement du point i, les droites iA, iB & iC, restent toujours parallèles à elles-mêmes; j'imagine de plus une droite $iV = iH = 1$, laquelle soit fixe dans le Corps & perpendiculaire à iH; par le point i, je mène dans le plan HiF la perpendiculaire iK à iH; soit ϖ, l'angle ViK; je suppose enfin un point S fixe ou considéré comme fixe dans l'espace, & je fais passer par ce point un plan bSa parallèle au plan BiA; les droites Sa & Sb étant supposées parallèles aux droites iA & iB; je mène ensuite la droite iS, dont SG est la projection sur le plan bSa, & je fais $SG = r$, tang. $GSi = s$, & l'angle $GST = \varphi$; cela posé.

La position du Corps M dans l'espace, dépend 1.° de la position du point i; 2.° de la position de l'axe iH; 3.° de la position du Corps par rapport à cet axe; or, la position du point i est déterminée par les valeurs des quantités r, s & φ; la position de l'axe iH est déterminée par les valeurs des angles ε & θ; enfin, la position du Corps par rapport à l'axe iH, est déterminée par la valeur de l'angle ϖ; il faut donc trouver les équations qui déterminent ces quantités pour un instant donné quelconque.

Pour cela, je décompose les forces dont le Corps est animé, chacune en trois autres parallèles aux axes iA, iB & iC.

Soit ψ la somme des forces parallèles à iC; ψY & ψX la somme de leurs momens, par rapport aux axes iA & iB.

ψ' la somme des forces parallèles à iB; $\psi' Z'$, & $\psi' X'$ la somme de leurs momens par rapport aux axes iA & iC.

ψ'' la somme des forces parallèles à iA; $\psi'' Z''$, & $\psi'' Y''$ la somme de leurs momens, par rapport aux axes iB & iC; cela posé.

Du point i sur le point bSa, j'abaisse la perpendiculaire iG; & du point G sur Sa, la perpendiculaire GT; soit $Gi = z$, $GT = y$, & $ST = x$. J'imagine ensuite une

molécule quelconque du corps M, que je nomme ∂M, & de laquelle si l'on mène sur le plan AiB les coordonnées parallèles aux trois axes iA, iB & iC, ces coordonnées soient exprimées par x', y' & z', en fixant leur origine au point i; la quantité de mouvement de cette molécule dans le sens iA, sera $\left(\frac{\partial x + \partial x'}{\partial t}\right) \cdot \partial M$; dans le sens iB, elle sera $\left(\frac{\partial y + \partial y'}{\partial t}\right) \cdot \partial M$; & dans le sens iC, elle sera $\left(\frac{\partial z + \partial z'}{\partial t}\right) \cdot \partial M$; dans l'instant suivant ces quantités de mouvement deviennent

$$\frac{\partial x + \partial x' + \partial\partial x + \partial\partial x'}{\partial t} \cdot \partial M; \quad \frac{\partial y + \partial y' + \partial\partial y + \partial\partial y'}{\partial t} \cdot \partial M;$$

$$\frac{\partial z + \partial z' + \partial\partial z + \partial\partial z'}{\partial t} \cdot \partial M;$$

en supposant ∂t constant; les quantités de mouvement perdues sont donc,

$$-\left(\frac{\partial\partial x + \partial\partial x'}{\partial t}\right) \cdot \partial M; \quad -\left(\frac{\partial\partial y + \partial\partial y'}{\partial t}\right) \cdot \partial M;$$

$$-\left(\frac{\partial\partial z + \partial\partial z'}{\partial t}\right) \cdot \partial M.$$

Or, les forces nécessaires pour produire cette perte, sont égales à ces quantités de mouvement divisées par dt; & leur somme devant faire équilibre aux forces ψ, ψ' & ψ'', la somme des momens de toutes ces forces, par rapport à chacun des trois axes iC, iB & iA, doit être nulle, comme on le démontre en Mécanique; de-là, je tire les équations suivantes.

$$0 = \psi Y - \psi' Z' + \int \partial M \cdot \left[z'\left(\frac{\partial\partial y + \partial\partial y'}{\partial t^2}\right) - y'\left(\frac{\partial\partial z + \partial\partial z'}{\partial t^2}\right)\right]$$

$$0 = \psi X - \psi'' Z'' + \int \partial M \cdot \left[z'\left(\frac{\partial\partial x + \partial\partial x'}{\partial t^2}\right) - x'\left(\frac{\partial\partial z + \partial\partial z'}{\partial t^2}\right)\right]$$

$$0 = \psi' X' - \psi'' Y'' + \int \partial M \cdot \left[y'\left(\frac{\partial\partial x + \partial\partial x'}{\partial t^2}\right) - x'\left(\frac{\partial\partial y + \partial\partial y'}{\partial t^2}\right)\right]$$

le signe d'intégration se rapportant à la molécule ∂M, & à toutes les quantités qui varient avec elle.

De plus, la somme de toutes ces forces doit être nulle, suivant les directions de chacun de ces trois axes, puisque

le Corps eſt ſuppoſé libre; de-là, on aura,

$$\psi - \int \left(\frac{\partial\partial z' + \partial\partial z}{\partial t^2}\right) . \partial M = 0,$$

$$\psi' - \int \left(\frac{\partial y' + \partial\partial y}{\partial t^2}\right) . \partial M = 0,$$

$$\psi'' - \int \left(\frac{\partial\partial x' + \partial\partial x}{\partial t^2}\right) . \partial M = 0.$$

Au moyen de ces ſix équations, on peut déterminer le mouvement du Corps pour un inſtant quelconque.

XXXVIII.

Le point i étant arbitraire, on peut ſimplifier les équations précédentes en prenant pour ce point, le centre d'inertie du Corps; car on a, par la propriété de ce centre,

$$\int x' \partial M = 0, \int y' \partial M = 0, \int z' \partial M = 0;$$

partant,

$$\int \partial M . \frac{\partial\partial x'}{\partial t^2} = 0, \int \partial M . \frac{\partial\partial y'}{\partial t^2} = 0, \int \partial M . \frac{\partial\partial z'}{\partial t^2} = 0;$$

$$\int \partial M . \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = M . \frac{\partial\partial x}{\partial t^2}; \int \partial M . \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} = M . \frac{\partial\partial y}{\partial t^2};$$

$$\int \partial M . \frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = M . \frac{\partial\partial z}{\partial t^2}; \int z' \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} . \partial M = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} .$$

$\int z' \partial M = 0$, & ainſi de ſuite; les équations précédentes deviendront conſéquemment

$$0 = \psi Y - \psi' Z' + \int \partial M . \left(z' \frac{\partial\partial y'}{\partial t^2} - y' \frac{\partial\partial z'}{\partial t^2}\right)$$

$$0 = \psi X - \psi'' Z'' + \int \partial M . \left(z' \frac{\partial\partial x'}{\partial t^2} - x' \frac{\partial\partial z'}{\partial t^2}\right)$$

$$0 = \psi' X' - \psi'' Y'' + \int \partial M . \left(y' \frac{\partial\partial x'}{\partial t^2} - x' \frac{\partial\partial y'}{\partial t^2}\right)$$

$$\psi'' - M . \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = 0$$

$$\psi' - M . \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} = 0$$

$$\psi - M . \frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = 0$$

XXXIX.

Ces trois dernières équations peuvent ſe changer en d'autres plus commodes pour les uſages aſtronomiques; car on a, par l'*article XXXVII*, $x = r.\text{coſ.}\,\varphi$; $y = r.\text{ſin.}\,\varphi$, $z = rs$; d'où il eſt facile de conclure

$$\partial\partial x = \partial\partial r\,.\,\text{coſ.}\,\varphi - 2\,\partial r\,.\,\partial\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\varphi - r\partial\partial\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\varphi - r\partial\varphi^2\,.\,\text{coſ.}\,\varphi$$
$$\partial\partial y = \partial\partial r\,.\,\text{ſin.}\,\varphi + 2\,\partial r\,.\,\partial\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\varphi + r\partial\partial\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\varphi - r\partial\varphi^2\,.\,\text{ſin.}\,\varphi$$
$$\partial\partial z = r\partial\partial s + 2\,\partial s\partial r + s\partial\partial r$$

Or, ſi l'on ſuppoſe que la droite Sa ſoit infiniment près de SG, alors ψ'' ſera la force ſuivant SG & tendante de S vers G; ψ' ſera la force perpendiculaire à SG, & dirigée dans le ſens aGb, que je ſuppoſe être celui du mouvement de la Planète; de plus $\text{coſ.}\,\varphi = 1$, & $\text{ſin.}\,\varphi = 0$, d'où l'on aura

$$\partial\partial x = \partial\partial r - r\partial\varphi^2;$$
$$\partial\partial y = r\partial\partial\varphi + 2\partial r\partial\varphi,$$

partant,

$$\frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{r\partial\varphi^2}{\partial t^2} - \frac{\psi''}{M} = 0, \quad \& \quad \frac{r\partial\partial\varphi}{\partial t^2} + \frac{2\partial r\partial\varphi}{\partial t^2} - \frac{\psi'}{M} = 0,$$

Si l'on multiplie cette dernière équation par r, & qu'enſuite on l'intègre, on aura

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{C + \int\frac{\psi' r\partial t}{M}}{r^2}; \ (1)$$

La première équation donnera

$$\frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{(C + \int\frac{\psi' r\partial t}{M})^2}{r^3} - \frac{\psi''}{M} = 0; \ (2)$$

& puiſque l'on a,

$$\partial\partial z = r\partial\partial s + 2\partial s\partial r + s\partial\partial r = r\partial\partial s + 2\partial s r + \left[\frac{s\psi''}{M} + s\,.\frac{(C + \int\frac{\psi' r\partial t}{M})^2}{r^3}\right]\partial t^2$$

on aura

$$0 = \frac{\partial\partial s}{\partial t^2} + \frac{2\partial s\partial r}{r\partial t^2} + s \cdot \frac{[C + \int \frac{\psi' r\partial t}{M}]^2}{r^4} + \frac{S\psi'' - \psi}{Mr}, \quad (3)$$

Au moyen des équations (1), (2) & (3), on peut déterminer le mouvement du centre d'inertie du corps M; & l'on peut prendre pour ligne fixe d'où l'on commence à compter l'angle φ, toute droite fixe telle que Sa, faisant un angle quelconque avec le rayon vecteur ; il faut seulement observer que ψ'' exprime la force qui agit dans le sens SG, & de S vers G; ψ' exprime la force perpendiculaire à SG, & dirigée dans le même sens que le mouvement du Corps, & que ψ représente la force perpendiculaire au plan bSa.

X L.

On peut simplifier d'une manière analogue, les équations qui servent à déterminer le mouvement de rotation du Corps autour du centre d'inertie. Pour cela, soit y'' la distance de la molécule dM au plan HiF; x'' la distance de sa projection sur le plan HiF, à la droite iC, & z'' la distance de cette molécule au plan AiB; on aura

$$z' = z''$$
$$y' = x'' \cdot \text{sin.}\ \varepsilon + y'' \cdot \text{cos.}\ \varepsilon$$
$$x' = x'' \cdot \text{cos.}\ \varepsilon - y'' \cdot \text{sin.}\ \varepsilon$$

Nommons ensuite y''' la distance de la molécule dM au plan HiF; x''' la distance de sa projection sur ce plan, à la droite iK; & z''' la distance de cette projection à l'axe iH; on aura

$$y'' = y'''$$
$$z'' = x''' \cdot \text{sin.}\ \theta + z''' \cdot \text{cos.}\ \theta$$
$$x'' = x''' \cdot \text{cos.}\ \theta - z''' \cdot \text{sin.}\ \theta$$

Nommons enfin y^{IV} la distance de la molécule dM au plan HiV; x^{IV} la distance de sa projection sur ce plan à la droite iV.

iV, & z^{IV}, la diſtance de cette projection à la droite iH; cela poſé, on aura

$$x''' = x^{IV}$$
$$y''' = y^{IV} \cdot \text{coſ.}\ \varpi + z^{IV} \cdot \text{ſin.}\ \varpi$$
$$z''' = z^{IV} \cdot \text{coſ.}\ \varpi - y^{IV} \cdot \text{ſin.}\ \varpi$$

De-là, je conclus

$$x' = x^{IV} \cdot \text{coſ.}\,\varepsilon \cdot \text{coſ.}\,\theta + y^{IV} \cdot [\text{ſin.}\,\varpi \cdot \text{ſin.}\,\theta\ \text{coſ.}\,\varepsilon - \text{ſin.}\,\varepsilon\ \text{coſ.}\,\varpi]$$
$$- z^{IV} \cdot [\text{ſin.}\,\theta \cdot \text{coſ.}\,\varepsilon \cdot \text{coſ.}\,\varpi + \text{ſin.}\,\varepsilon \cdot \text{ſin.}\,\varpi]$$
$$y' = x^{IV} \cdot \text{coſ.}\,\theta\ \text{ſin.}\,\varepsilon + y^{IV} \cdot [\text{ſin.}\,\varpi \cdot \text{ſin.}\,\theta \cdot \text{ſin.}\,\varepsilon + \text{coſ.}\,\varpi\ \text{coſ.}\,\varepsilon]$$
$$+ z^{IV} \cdot [\text{ſin.}\,\varpi\ \text{coſ.}\,\varepsilon - \text{coſ.}\,\varpi \cdot \text{ſin.}\,\theta\ \text{ſin.}\,\varepsilon]$$
$$z' = x^{IV} \cdot \text{ſin.}\,\theta + z^{IV} \cdot \text{coſ.}\,\theta \cdot \text{coſ.}\,\varpi - y^{IV} \cdot \text{ſin.}\,\varpi\ \text{coſ.}\,\theta$$

Les valeurs de x^{IV}, y^{IV} & z^{IV} reſtent conſtantes pour la même molécule ∂M; ainſi, en différentiant pour avoir les valeurs de $\partial\partial x'$, $\partial\partial y'$ & $\partial\partial z'$; il ne faut faire varier que les quantités θ, ε & ϖ; d'où il ſera facile de conclure les valeurs de

$$\int \partial M \cdot z' \frac{\partial\partial y'}{\partial t^2},\ \int \partial M \cdot y' \frac{\partial\partial z'}{\partial t^2},\ \&c.$$

mais la conſidération ſuivante ſimplifie conſidérablement le calcul.

On ſait que dans tout Corps il exiſte trois axes perpendiculaires entre eux, & par rapport auxquels on a

$$\int x^{IV} \cdot y^{IV} \partial M = 0,\ \int x^{IV} \cdot z^{IV} \partial M = 0;\ \int y^{IV} \cdot z^{IV} \partial M = 0.$$

Ces axes ont été nommés les trois axes principaux de rotation, parce qu'ils ont cette propriété, que ſi le Corps a un mouvement de rotation autour de l'un d'eux, ce mouvement ſera invariable, abſtraction faite de toutes forces étrangères. Je ſuppoſe donc que iH, iV & une droite menée par le centre i d'inertie, & perpendiculaire au plan HiV, ſoient ces trois axes; ſoit de plus $\int x^{IV^2} \partial . M = Maa$, M étant la maſſe entière du Corps,

$$\int y^{IV^2} \cdot \partial M = M \cdot bb,\ \& \int z^{IV^2} \cdot \partial M = M \cdot cc,$$

Cela poſé, on aura,

$$0 = (\psi Y - \psi' Z')\,\partial t^2$$

$$+ M a a.\left\{\sin.\theta.\partial\partial.(\cos.\theta.\sin.\varepsilon) - \cos.\theta.\sin.\varepsilon.\partial\partial.\sin.\theta\right.$$

$$+ M b b.\left\{\begin{array}{l}(\sin.\theta.\sin.\varpi.\sin.\varepsilon + \cos.\varpi.\cos.\varepsilon).\partial\partial(\sin.\varpi.\cos.\theta)\\ - \sin.\varpi.\cos.\theta.\partial\partial(\sin.\varpi.\sin.\theta.\sin.\varepsilon + \cos.\varpi.\cos.\varepsilon)\end{array}\right.$$

$$+ M c c.\left\{\begin{array}{l}\cos.\varpi.\cos.\theta.\partial\partial(\sin.\varpi.\cos.\varepsilon - \cos.\varpi.\sin.\theta.\sin.\varepsilon)\\ - (\sin.\varpi.\cos.\varepsilon - \cos.\varpi.\sin.\theta.\sin.\varepsilon)\partial\partial.(\cos.\varpi.\cos.\theta)\end{array}\right.$$

$$0 = (\psi X - \psi'' Z'')\,\partial t^2$$

$$+ M a a.\left\{\sin.\theta.\partial\partial.(\cos.\varepsilon.\cos.\theta) - \cos.\varepsilon\cos.\theta.\partial\partial\sin.\theta)\right.$$

$$(L)\quad + M b b.\left\{\begin{array}{l}(\sin.\varpi.\sin.\theta.\cos.\varepsilon - \sin.\varepsilon.\cos.\varpi).\partial\partial\sin.\varpi.\cos.\theta\\ - \sin.\varpi.\cos\theta.\partial\partial(\sin.\varpi.\sin.\theta.\cos.\varepsilon - \sin.\varepsilon.\cos.\varpi)\end{array}\right.$$

$$+ M c c.\left\{\begin{array}{l}(\cos.\varpi.\sin.\theta.\cos.\varepsilon + \sin.\varepsilon.\sin.\varpi).\partial\partial.\cos.\varpi.\cos.\theta)\\ - \cos.\varpi.\cos.\theta.\partial\partial.(\cos.\varpi.\sin.\theta.\cos.\varepsilon + \sin.\varepsilon.\sin.\varpi)\end{array}\right.$$

$$0 = (\psi' X' - \psi'' Z'')\,\partial t^2$$

$$+ M a a.\left\{\cos.\theta.\sin.\varepsilon.\partial\partial.\cos.\varepsilon.\cos.\theta - \cos.\varepsilon.\cos.\theta.\partial\partial.\cos.\theta.\sin.\varepsilon\right.$$

$$+ M b b.\left\{\begin{array}{l}(\sin.\varpi.\sin.\theta.\sin.\varepsilon + \cos.\varpi.\cos.\varepsilon.)\partial\partial(\sin.\varpi.\sin.\theta.\cos.\varepsilon. - \sin.\varepsilon.\cos.\varpi\\ - (\sin.\varpi.\sin.\theta.\cos.\varepsilon - \sin.\varepsilon.\cos.\varpi).\partial\partial(\sin.\varpi.\sin.\theta.\sin.\varepsilon + \cos.\varpi.\cos.\varepsilon)\end{array}\right.$$

$$+ M c c.\left\{\begin{array}{l}(\sin.\theta.\cos.\varepsilon.\cos.\varpi + \sin.\varepsilon.\sin.\varpi)\partial\partial.(\sin.\varpi.\cos.\varepsilon - \cos.\varpi.\sin.\theta.\sin.\varepsilon)\\ - (\sin.\varpi.\cos.\varepsilon - \cos.\varpi.\sin.\theta.\sin.\varepsilon).\partial\partial.(\sin.\theta.\cos.\varepsilon.\cos.\varpi + \sin.\varepsilon.\sin.\varpi)\end{array}\right.$$

On peut conſidérer dans ces équations, le centre d'inertie comme immobile, en ſorte qu'en évaluant les momens des forces ψ, ψ' & ψ'', on peut retrancher de la force dont chaque particule eſt animée, celle qui lui eſt commune avec le centre d'inertie, parce que les momens de cette dernière force ſont évidemment nuls.

On peut encore, dans les équations précédentes, ſuppoſer après les différentiations $\sin.\varepsilon = 0$; & $\cos.\varepsilon = 1$, ce qui les ſimplifie; mais alors il faut obſerver qne les forces ψ' & ψ'' doivent être parallèles, la première à la ligne *iF*, & la ſeconde à la perpendiculaire menée ſur cette ligne dans le plan *AiB*, & dirigée de *F* vers *B*; le mouvement de rotation du corps étant ſuppoſé avoir lieu dans le ſens *ACB*. On aura ainſi, en exécutant les différentiations indiquées dans les équations *(L)*,

$$o = \frac{\psi Y - \psi' Z'}{Maa} . dt^2$$

$$+ \partial\partial\varepsilon . \text{sin.}\theta . \text{cos.}\theta . (1 - \frac{bb+cc}{2aa} + \frac{bb-cc}{2aa} . \text{cos.} 2\varpi)$$

$$- 2\partial\varepsilon\partial\theta . [1 - \text{cos.}\theta^2 (1 - \frac{bb+cc}{2aa} - \frac{bb-cc}{2aa} . \text{cos.} 2\varpi)]$$

$$- 2\partial\varepsilon\partial\varpi . \text{sin.}\theta . \text{cos.}\theta . (\frac{bb-cc}{2aa} . \text{sin.} 2\varpi)$$

$$+ \partial\varepsilon^2 . \text{cos.}\theta . (\frac{bb-cc}{2aa} . \text{sin.} 2\varpi)$$

$$- \partial\partial\theta . \text{sin.}\theta . (\frac{bb-cc}{2aa} . \text{sin.} 2\varpi)$$

$$- 2\partial\varpi . \partial\theta . \text{sin.}\theta (\frac{bb+cc}{2aa} + \frac{bb-cc}{2aa} . \text{cos.} 2\varpi)$$

$$- \partial\theta^2 . \text{cos.}\theta . (\frac{bb-cc}{2aa} . \text{sin.} . 2\varpi)$$

$$+ 2\partial\partial\varpi . \text{cos.}\theta . (\frac{bb+cc}{2aa})$$

$$o = \frac{\psi X - \psi'' Z''}{M.aa} dt^2 \qquad (L')$$

$$+ \partial\partial\varepsilon . \text{cos.}\theta . (\frac{bb-cc}{2aa} . \text{sin.} 2\varpi)$$

$$- 2\partial\varepsilon\partial\varpi . \text{cos.}\theta . (\frac{bb+cc}{2aa} - \frac{bb-cc}{2aa} . \text{cos.} 2\varpi)$$

$$- \partial\varepsilon^2 . \text{sin.}\theta . \text{cos.}\theta . (1 - \frac{bb+cc}{2aa} + \frac{bb-cc}{2aa} . \text{cos.} 2\varpi)$$

$$- \partial\partial\theta . (1 + \frac{bb+cc}{2aa} - (\frac{bb-cc}{2aa}) . \text{cos.} 2\varpi)$$

$$- 2\partial\varpi\partial\theta . (\frac{bb-cc}{2aa} . \text{sin.} 2\varpi)$$

$$o = \frac{\psi' X' - \psi'' Y''}{Maa} . dt^2$$

$$- \partial\partial\varepsilon . [1 + \frac{bb+cc}{2aa} - (1 - \frac{bb+cc}{2aa}) . \text{sin.}\theta^2 + \frac{bb-cc}{2aa} . \text{cos.}\theta^2 . \text{cos.} 2\varpi]$$

$$+ 2\partial\varepsilon\partial\theta . \text{sin.}\theta . \text{cos.}\theta . (1 - \frac{bb+cc}{2aa} + \frac{bb-cc}{2aa} . \text{cos.} 2\varpi)$$

$$+ 2\partial\varepsilon\partial\varpi . \text{cos.}\theta^2 . (\frac{bb-cc}{2aa}) . \text{sin.} 2\varpi$$

$$+ \partial\partial\theta \,.\, \text{cof.}\,\theta \,.\, \left(\frac{bb - cc}{2aa}\right) . \,\text{fin.}\, 2\varpi$$

$$+ 2\,\partial\varpi\partial\theta \,.\, \text{cof.}\,\theta \,.\, \left(\frac{bb + cc}{2aa} + \frac{bb - cc}{2aa} \,.\, \text{cof.}\, 2\varpi\right)$$

$$- \partial\theta^2 \,.\, \text{fin.}\,\theta \,.\, \left(\frac{bb - cc}{2aa}\right) . \,\text{fin.}\, 2\varpi$$

$$+ 2\,\partial\partial\varpi \,.\, \text{fin.}\,\theta \,.\, \left(\frac{bb + cc}{2aa}\right),$$

XLI.

Dans l'application des équations précédentes à l'Aſtronomie-phyſique, elles deviennent fort ſimples; car les Corps céleſtes étant à très-peu-près ſphériques, on peut négliger les quantités proportionnelles au quarré de l'excentricité de ces Corps; or les termes $(\psi Y - \psi' Z')$, $(\psi X - \psi'' Z'')$ & $(\psi' X' - \psi'' Y'')$, ſont toujours de l'ordre de ces excentricités. D'ailleurs, l'état d'équilibre de toutes les parties d'une Planète, exige que le mouvement de rotation ſe faſſe au moins à très-peu-près autour d'un de ſes axes principaux, abſtraction faite de l'action de toute force étrangère: car, ſans cela, la Planète changeant à chaque inſtant d'axe & de viteſſe de rotation, changeroit continuellement de figure. $\partial\varepsilon$ & $\partial\theta$ ſeroient donc nuls à très-peu-près, ſi les quantités $(\psi Y - \psi' Z')$, $(\psi X - \psi'' Z'')$ & $(\psi' X' - \psi'' Y'')$ s'évanouiſſoient; partant, ils ſont du même ordre que ces quantités; ainſi on peut négliger leurs quarrés, leurs produits deux-à-deux, & les termes qui, multipliés par $\partial\varepsilon$ ou $\partial\theta$, le ſeroient encore par $(aa - bb)$, ou $(aa - cc)$, ou $(bb - cc)$.

Soit donc,

$$\frac{\psi Y - \psi' Z'}{{}^2M.aa} = R,\ \frac{\psi X - \psi'' Z''}{{}^2M.aa} = R' \ \&\ \frac{\psi' X' - \psi'' X''}{{}^2M.aa} = R''$$

On aura donc,

$$0 = R\,\partial t^2 - \partial\varepsilon\partial\theta + \partial.(\partial\varpi \,.\, \text{cof.}\,\theta)$$
$$0 = R'\,\partial t^2 - \partial\partial\theta - \partial\varepsilon\,\partial\varpi \,.\, \text{cof.}\,\theta$$
$$0 = R''\partial t^2 - \partial\partial\varepsilon + \partial.(\partial\varpi \,.\, \text{fin.}\,\theta)$$

Ces équations sont sous une forme aussi simple que l'on puisse desirer, & en les joignant à celles-ci,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{C + \int \frac{\psi' r \partial t}{M}}{r^2}$$

$$o = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{(C + \int \frac{\psi' r \partial t}{M})^2}{r^3} - \frac{\psi''}{M}$$

$$o = \frac{\partial\partial s}{\partial t^2} + \frac{2\partial s \partial r}{\partial t^2} + \frac{s(C + \int \frac{\psi' r \partial t}{M})^2}{r^4} + \frac{s\psi'' - \psi}{Mr}$$

qui regardent le mouvement du centre d'inertie, on aura toutes les équations nécessaires pour déterminer les altérations du mouvement des Corps célestes, troublé par l'action des forces étrangères. Il y a cependant des recherches fort délicates, qui demandent beaucoup de précision, & dans lesquelles il est nécessaire d'avoir égard, même aux quantités proportionnelles au quarré de l'excentricité de ces Corps. Telle est, par exemple, la recherche des inégalités séculaires du mouvement de rotation des Planètes. *(Voyez dans le Volume de l'Académie, pour l'année 1773, un Mémoire sur cet objet).* Dans ce cas, il faut faire usage des équations *(L')* de l'art. précédent.

XLII.

Examen du principe de la gravitation universelle.

Il n'existe point en Physique de vérité plus incontestable, & mieux démontrée par l'accord de l'observation & du calcul que celle-ci : *tous les Corps célestes gravitent les uns sur les autres.* Newton, auteur de cette découverte la plus importante que l'on ait jamais faite dans la Philosophie naturelle, trouva que les mouvemens observés des Planètes, ne peuvent subsister sans une tendance vers le Soleil, proportionnelle à leur masse, & réciproque au quarré de leur distance à cet astre. Les mouvemens des Satellites lui donnèrent le même résultat par rapport à leur Planète principale. Il ne balança

plus dès-lors à généraliser cette idée, & il supposa que toutes les parties de la matière s'attirent en proportion de leur masse, & en raison réciproque du quarré de leurs distances. On sait avec quel succès ce grand Géomètre & ceux qui l'ont suivi, ont expliqué par ce moyen les phénomènes célestes; ainsi sans entrer dans aucun détail à cet égard, je me bornerai à faire quelques réflexions sur le principe même de la pesanteur universelle.

En l'appliquant au mouvement des Corps célestes, Newton est parti de ces quatre suppositions, adoptées généralement par les Géomètres.

1.° L'attraction est en raison directe de la masse & réciproquement comme le quarré de la distance.

2.° La force attractive d'un corps est le résultat de l'attraction de chacune des parties qui le composent.

3.° Cette force se propage dans un instant, du Corps attirant à celui qu'il attire.

4.° Elle agit de la même manière sur les corps en repos & en mouvement.

Je vais examiner ces quatre suppositions & voir jusqu'à quel point elles sont conformes à ce que l'on observe.

XLIII.

De ce que les aires décrites par les rayons vecteurs des Planètes sont proportionnelles au temps, il suit que ces Corps tendent vers le Soleil; l'ellipticité de leurs mouvemens démontre que cette tendance pour chacun d'eux est réciproque au quarré de leur distance à cet astre, & le rapport du cube des grands axes de leurs orbites au quarré des temps de leurs révolutions, prouve invinciblement que la force attractive du Soleil ne varie d'une Planète à l'autre, qu'à raison des distances. En vertu de la première de ces loix, tout corps pese sur le Soleil; par la seconde, un corps placé successivement à différentes distances de cet astre, pèse sur lui en raison inverse du carré de ses différentes distances; & par la troisième, les poids de plusieurs Corps placés à des distances

quelconques du Soleil, ſont en raiſon de leurs maſſes, diviſées par le carré de leurs diſtances, en ſorte qu'à diſtances égales, ils ſont proportionnels aux maſſes. La même choſe s'obſerve ſur la Terre; car les expériences ont fait voir que dans le vide, tous les Corps ſe précipitent vers ſon centre, avec une égale vîteſſe, & que ſi deux Corps homogènes ou hétérogènes ſont égaux en maſſe, c'eſt-à-dire, ſi, venant à ſe rencontrer avec des vîteſſes égales & directement contraires, ils ſe font équilibre, leurs poids ſont égaux.

Préſentement, on doit regarder comme une loi de la Nature, démontrée par toutes les obſervations, que l'action eſt toujours égale à la réaction, & qu'ainſi le centre de gravité de deux Corps qui agiſſent l'un ſur l'autre, ne change point en vertu de cette action mutuelle; il ſuit de-là que le Soleil pèſe ſur chaque Planète; & comme leur gravité ſur cet aſtre eſt en raiſon de leur maſſe diviſée par le quarré de leur diſtance, leur action ſur lui eſt dans le même rapport.

Cette peſanteur réciproque du Soleil & des Planètes, a également lieu entre le Soleil, les Planètes & leurs Satellites; & les inégalités ſi multipliées du mouvement de la Lune, s'en déduiſent avec une telle préciſion, qu'il n'eſt plus permis de la révoquer en doute. Pluſieurs Philoſophes ont cru cependant que la loi de la peſanteur réciproque au quarré de la diſtance, pourroit n'être pas vraie à de petites diſtances; mais il me ſemble que leur aſſertion eſt deſtituée de fondement; car cette même loi qui a lieu pour les grandes diſtances des Planètes au Soleil, eſt encore vraie à la diſtance de la Lune, & même à celle du rayon de la Terre, puiſqu'il eſt prouvé que la peſanteur d'un Corps à la ſurface de la Terre, eſt à ſa peſanteur à la diſtance de la Lune, comme le quarré de cette diſtance eſt à celui du rayon de la Terre. Il nous eſt impoſſible de prononcer avec la même certitude, ſur de plus petites diſtances, mais l'analogie porte à croire que cette loi doit toujours avoir lieu; d'ailleurs ſa ſimplicité doit la faire préférer à toute autre, juſqu'à ce que les obſervations nous aient forcé de l'abandonner.

On a ſouvent demandé pourquoi la peſanteur diminue en raiſon du quarré de la diſtance. La cauſe de cette force étant inconnue, il eſt impoſſible d'en donner la raiſon Phyſique ; mais s'il étoit permis de ſe livrer à la Métaphyſique dans une matière qu'il n'eſt pas poſſible de ſoumettre à l'expérience, ne ſeroit-il pas naturel de penſer que les loix de la Nature, ſont telles que le ſyſtème de l'Univers ſeroit toujours ſemblable à lui-même, en ſuppoſant que toutes ſes dimenſions viennent à augmenter ou à décroître proportionnellement? Sans chercher ici à appuyer ce principe par des raiſons que les Métaphyſiciens imagineront aiſément, mais auxquelles les Géomètres ſe rendroient difficilement, je me contenterai d'obſerver que toutes les loix connues du mouvement de la matière, y ſont très-conformes.

Maintenant, je ſuppoſe que les diſtances reſpectives du Soleil, de la Lune & de la Terre, leurs vîteſſes & leurs diamètres décroiſſent proportionnellement; il eſt viſible que la courbe décrite par la Lune, ne peut reſter ſemblable à elle-même, à moins que la force qui l'agite ne décroiſſe dans la même proportion. Soit donc T la maſſe de la Terre, h la diſtance de la Lune, & que toutes les dimenſions de l'Univers décroiſſent dans le rapport de 1 à $\frac{1}{m}$; $\frac{T}{m^3}$ exprimera la maſſe de la Terre dans cette ſuppoſition, & $\frac{h}{m}$ la diſtance de la Lune. Soit de plus $\frac{T}{\varphi(h)}$ l'action actuelle de la Terre ſur la Lune; $\frac{T}{m^3.\varphi(\frac{h}{m})}$ exprimera ſa nouvelle action; mais la ſimilitude des courbes exige que l'on ait $\frac{T}{m^3.\varphi(\frac{h}{m})} = \frac{T}{m.\varphi(h)}$; partant, on aura $m^2.\varphi(\frac{h}{m}) = \varphi(h)$. Soit $\varphi(h) = h^2.'\varphi(h)$. Donc on aura $'\varphi(\frac{h}{m}) = '\varphi(h)$. Cette équation devant avoir lieu quelle que ſoit m, il faut que

que $\varphi(h)$ ſoit égal à une conſtante A; donc $\varphi(h) = A.h^{2}$; c'eſt-à-dire que la peſanteur diminue en raiſon du quarré de la diſtance. Je paſſe maintenant à l'examen de la ſeconde ſuppoſition.

XLIV.

Quelques illuſtres Géomètres, M. Daniel Bernoulli, entre autres *(Pièce ſur le flux & le reflux de la mer)*, convaincus d'ailleurs de la peſanteur réciproque de tous les Corps céleſtes, ont regardé ſeulement comme une opinion probable, que cette peſanteur ſoit le réſultat de l'attraction de chacune de leurs parties; nous obſervons à la vérité ſur la Terre, que les propriétés attractives des corps ſont communes à leurs plus petites molécules; une forte analogie porte donc à croire que la peſanteur réſulte pareillement de l'attraction de toutes les parties de la Terre; mais le plus ſûr moyen de vérifier cette hypothèſe, eſt de la ſoumettre à l'analyſe, & de comparer enſuite les réſultats du calcul aux phénomènes. Les principaux qui en dépendent ſont la figure des Aſtres, le flux & le reflux de la mer, la préceſſion des Équinoxes, & la nutation de l'axe de la Terre. Un expoſé très-ſuccinct des recherches que l'on a faites ſur ces différens objets, va montrer juſqu'à quel point elle eſt fondée.

Si la peſanteur étoit dirigée vers un centre unique, en nommant r le petit axe de Jupiter, la différence de ſes axes ſeroit $\frac{1}{23,23} r$; ſuivant les obſervations les plus exactes, elle eſt environ $\frac{1}{13} r$; mais dans l'hypothèſe de la gravitation réciproque de toutes les parties de la matière, & en ſuppoſant que Jupiter ait été primitivement fluide, cette différence doit être entre les deux limites $\frac{1}{9,05}.r$ & $\frac{1}{23,23}.r$; ce qui s'accorde fort bien avec l'obſervation. Ainſi, la figure de Jupiter donne un réſultat très-ſatisfaiſant pour l'hypothèſe que nous diſcutons ici: il n'en eſt pas de même de la figure de la Terre.

Suivant Newton, & les Géomètres qui ont adopté ſa théorie, la Terre eſt un ſphéroïde elliptique, ſur lequel l'accroiſſement de la peſanteur & des degrés de l'Équateur aux Pôles, eſt en raiſon du quarré du ſinus de la latitude: le rapport du petit au grand axe de ce ſphéroïde ſuppoſé homogène, & celui des peſanteurs d'un même corps placé ſucceſſivement à l'Équateur & aux Pôles, eſt égal à . $\frac{229}{230}$; mais ſi la Terre eſt compoſée de couches inégalement denſes, alors autant le rapport des axes ſurpaſſe cette fraction, autant celui des peſanteurs eſt moindre, & réciproquement.

En comparant enſemble les meſures des différens degrés, il paroît impoſſible de les plier à une même figure elliptique; il eſt également impoſſible d'y aſſujettir les longueurs obſervées du pendule qui bat les ſecondes; & il l'eſt encore plus de concilier les figures conclues par les meſures des degrés & par celles des longueurs du pendule.

On ne doit point, malgré cela, exclure l'hypothèſe de la gravitation réciproque de toutes les parties de la matière; il eſt bien plus naturel de rejeter ſur les données dont les Géomètres font uſage, le peu d'accord de leurs calculs avec l'obſervation. Ils ſuppoſent en effet la Terre formée d'une infinité de couches d'une denſité quelconque, & diſpoſées régulièrement autour de ſon centre d'inertie; or, on voit combien cette hypothèſe eſt précaire & peu conforme à ce que nous apercevons à la ſurface du globe, puiſque les mers dont il eſt couvert en grande partie, ſont d'une denſité moindre que la Terre. Ils font d'ailleurs abſtraction de l'action des montagnes, de l'élévation des continens au-deſſus du niveau de la mer, &c. toutes choſes auxquelles il paroît néceſſaire d'avoir égard lorſqu'il eſt queſtion de déterminer une auſſi petite quantité que la différence des axes de la Terre. La réunion de ces différentes cauſes peut altérer ſenſiblement, non-ſeulement la figure de la Terre, mais encore le réſultat des obſervations; & ſi l'on conſidère les erreurs inévitables qu'elles comportent, on pourra conclure que la figure

déterminée par ces obſervations, diffère peut-être autant de la véritable, que celle trouvée par la théorie.

La remarque ſuivante peut ſervir encore à juſtifier le principe de la peſanteur univerſelle, au moins juſqu'à ce que l'analyſe nous ait entièrement éclairés ſur cet objet. La plupart des Géomètres ont ſuppoſé dans leurs calculs une figure elliptique à la Terre : ils ont fait voir à la vérité, la poſſibilité d'une telle figure ; mais pour être en droit de rejeter la loi de l'attraction, il faudroit, ou démontrer que cette figure eſt unique, ou épuiſer ſucceſſivement toutes les figures que peut donner la Théorie, & prouver qu'aucune d'elles ne peut ſatisfaire à l'obſervation. Or, c'eſt ce qui n'a point été fait encore. M. d'Alembert à qui nous devons cette remarque intéreſſante, a fait voir, à la vérité, dans le *Tome V de ſes Opuſcules*, que ſi la Terre eſt homogène, & un ſolide de révolution, elle doit être néceſſairement elliptique. Il a de plus donné dans la ſeconde partie de ſes Recherches ſur le ſyſtème du Monde, une très-belle méthode pour déterminer la figure de la Terre, quelles que ſoient les différentes denſités de ſes couches, dans des ſuppoſitions beaucoup plus générales que celle d'une figure elliptique; mais, ni cet illuſtre Géomètre, ni perſonne, que je ſache, n'a déterminé celle de toutes ces figures qui s'accorde le mieux avec les obſervations. Le point où la Théorie paroît s'en éloigner le plus, eſt l'aplatiſſement de la Terre, conclu par la meſure des Degrés, & par celle des longueurs du Pendule qui bat les ſecondes. Il eſt en effet remarquable que ces longueurs ſemblent donner un aplatiſſement moindre que $\frac{1}{230}$, tandis que la meſure des Degrés le donne plus grand. Si donc on pouvoit trouver pour la Terre une figure qui conciliât ces deux choſes, & qui de plus ſatisfît à peu-près à la meſure des Degrés au Nord, en France, & à l'Équateur, on ne devroit point balancer à l'admettre.

Il ne paroît pas que la figure de la Terre influe ſenſiblement ſur le mouvement de la Lune; la différence des

axes de la Terre eſt trop petite par rapport à la diſtance de cet aſtre pour que ſon effet puiſſe être aperçu ; mais l'aplatiſſement de Jupiter étant beaucoup plus grand que celui de la Terre, ſi les mouvemens de ſes Satellites & les inégalités qu'ils éprouvent en vertu de leur gravitation les uns ſur les autres & ſur le Soleil, étoient aſſez bien connus, on pourroit en conclure l'effet de la figure de Jupiter, & juger s'il eſt conforme à la théorie ; mais les obſervations ne ſont pas encore aſſez préciſes & aſſez multipliées pour établir rien de certain ſur cette matière. Pour ce qui regarde le flux & le reflux de la mer, on ſent aiſément que ce phénomène ne peut rien nous apprendre de bien précis ſur la nature de la peſanteur, à cauſe de l'impoſſibilité de le ſoumettre à une analyſe rigoureuſe, & de la multitude des circonſtances étrangères qui doivent troubler les réſultats du calcul.

On voit par l'examen des phénomènes précédens, l'incertitude qu'ils laiſſent encore ſur le principe de la gravitation réciproque de toutes les parties de la matière ; mais il en eſt un qui me paroît ne devoir laiſſer aucun doute ſur la vérité de ce principe ; c'eſt celui de la préceſſion des équinoxes & de la nutation de l'axe de la Terre ; car il réſulte des ſavantes recherches de M. d'Alembert ſur cet objet, que ce phénomène eſt uniquement dû à la peſanteur de toutes les parties de la Terre ſur le Soleil & la Lune, en ſuppoſant que chaque particule de la Terre gravite ſur chacun de ces aſtres en raiſon réciproque du quarré de ſa diſtance ; or le centre de gravité de deux corps reſtant immobile en vertu de leur action mutuelle, la Lune pèſe à ſon tour ſur chaque partie de la Terre, & c'eſt du réſultat de toutes ces tendances partielles, que ſe forme la force centrale qui la retient dans ſon orbite : il ſuit de-là que la force attractive de la Terre & généralement des Corps céleſtes, appartient à chacune de leurs parties, & par conſéquent que non-ſeulement ces grands Corps, mais les plus petites molécules de la matière s'attirent en raiſon de leur maſſe, & réciproquement comme

le quarré de leur diſtance : cette attraction générale a paru ſe manifeſter dans l'expérience délicate de M. Bouguer ſur l'action de la montagne de Chimboraço; mais c'eſt à l'illuſtre Géomètre, qui, le premier a réſolu par une analyſe auſſi ſavante que rigoureuſe, le Problème de la préceſſion des Équinoxes, que nous devons une preuve inconteſtable de l'exiſtence de cette gravitation réciproque de toutes les parties de la matière: voyons préſentement ſi cette force ſe propage dans un inſtant du corps attirant à celui qu'il attire.

X L V.

Il n'eſt pas vraiſemblable que la vertu attractive, ou, plus généralement qu'aucune des forces qui s'exercent *ad diſtans*, ſe communique dans un inſtant d'un corps à l'autre; car tout ce qui ſe tranſmet à travers l'eſpace, nous paroît devoir répondre ſucceſſivement à ſes différens points; mais l'ignorance où nous ſommes ſur la nature des forces, & la manière dont elles ſont tranſmiſes, doit nous rendre très-retenus dans nos jugemens, juſqu'à ce que l'expérience vienne nous éclairer. J'obſerverai cependant que dans le cas même où elle ſembleroit donner une communication inſtantanée, on ne devroit pas ſe preſſer de conclure qu'elle a véritablement lieu dans la Nature, car il y a infiniment loin d'une durée de propagation inſenſible, à une durée abſolument nulle. Or il peut arriver que cette durée ne ſoit qu'inſenſible, parce que les expériences ſont faites ſur des Corps placés à de trop petites diſtances, ou pour d'autres raiſons quelconques. Il eût été, par exemple, impoſſible de connoître la vîteſſe de la lumière par des expériences faites ſur la Terre; mais en prenant pour terme de comparaiſon les diſtances des Planètes au Soleil, cette vîteſſe devient ſenſible, & c'eſt de cette manière qu'on eſt parvenu à la déterminer. Quoiqu'on puiſſe ſe ſervir des mêmes diſtances pour meſurer la durée de la propagation de la peſanteur, cette force pourroit cependant employer pluſieurs minutes, & même quelques heures à ſe communiquer du Soleil à la Terre, ſans qu'il fût poſſible d'obſerver cette

durée. Imaginons en effet deux masses, dont l'une infiniment moindre que l'autre, se meuve autour d'elle, la plus grande étant supposée en repos; il est visible que dans les premiers momens, la plus petite masse ira en ligne droite jusqu'à ce que la force attractive de l'autre masse ait commencé à l'atteindre; mais à ce moment, son mouvement sera le même que si la force attractive se propageoit dans un instant. Ceci auroit encore lieu si le systême de ces deux Corps étoit emporté d'un mouvement commun & uniforme dans l'espace. Or, les Planètes & leurs Satellites étant à peu-près dans le cas de l'hypothèse précédente, on voit que la gravitation pourroit employer un temps beaucoup plus considérable que la lumière à se propager du Soleil à la Terre, sans qu'il puisse être observé. M. Daniel Bernoulli paroît soupçonner cette propagation successive dans son excellente Pièce sur le flux & le reflux de la mer. Suivant cet illustre Géomètre, l'action de la Lune peut employer un ou deux jours à parvenir à la Terre. Une propagation aussi lente n'est pas vraisemblable: elle produiroit des inégalités sensibles dans le mouvement de la Lune, & paroît d'ailleurs contraire à l'activité avec laquelle la pesanteur s'exerce sur les Corps, comme on va le voir dans les articles suivans.

X L V I.

Il nous reste enfin à discuter si la Pesanteur agit de la même manière sur les corps en repos & en mouvement; il est visible qu'un corps en repos étant abandonné à la pesanteur, éprouvera toute son action, & tombera suivant la verticale, sur la surface de la Terre; mais s'il se meut déjà vers la Terre dans la direction de cette verticale, il est naturel de penser que sa vîtesse doit le soustraire en partie à l'effort de la pesanteur. Ce sentiment très-vraisemblable en lui-même, seroit incontestable si la cause de cette force venoit de l'impulsion d'un fluide quelconque; mais comme elle est entièrement inconnue, je vais soumettre à l'analyse les mouvemens des Corps célestes d'après la supposition de la gravitation

agiſſant différemment ſur les corps ſuivant leurs différens mouvemens; je comparerai enſuite le calcul à l'obſervation; car s'il exiſtoit quelque phénomène inexplicable juſqu'ici dans les ſuppoſitions ordinaires & qui dérivât néceſſairement de celle-ci, on ne pourroit s'empêcher alors de la regarder comme indiquée par la Nature, & conſéquemment de l'admettre.

Je conſidererai la peſanteur d'une molécule de matière comme produite par l'impulſion d'un corpuſcule infiniment plus petit qu'elle, & mû vers le centre de la Terre avec une vîteſſe quelconque. La ſuppoſition ordinaire ſuivant laquelle la peſanteur agit de la même manière ſur les Corps en repos & en mouvement, revient à faire cette vîteſſe infinie; je la ſuppoſerai indéfinie, & je chercherai à la déterminer par l'obſervation.

XLVII.

J'imagine un Corps infiniment petit p dans l'eſpace, *(figure 2)* décrivant autour de S, conſidéré comme immobile, une orbite quelconque ſur le plan fixe $p\,S\,M$; je fais $Sp = r$, & l'angle $p\,S\,M = \varphi$. Je nomme de plus; $\frac{\psi'}{p}$, la force perpendiculaire à Sp, & agiſſant dans le même ſens que le mouvement de la Planète; & $\frac{\psi''}{p}$, la force agiſſante dans la direction du rayon vecteur Sp, & de S vers p; cela poſé: on aura par l'*article XXXIX*,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c + \int \frac{\psi'}{p} \cdot r\,dt}{r^2} \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{\left[c + \int \frac{\psi'}{p}\, r\,dt\right]^2}{r^3} - \frac{\psi''}{p} \quad (2)$$

Il s'agit préſentement de déterminer ψ' & ψ''; pour cela, ſoit N le corpuſcule que je ſuppoſe faire graviter p vers S;

ſi p étoit en repos, N lui communiqueroit vers S la force $\frac{S}{r^2}$. Je repréſente par pG l'eſpace que décriroit ce corpuſcule durant le temps que p décriroit la droite pQ, tangente à ſon orbite avec la vîteſſe qu'il a en p. Si l'on fait, $pq = pQ$, on peut conſidérer N comme animé des trois vîteſſes pQ, pq & pG : il n'agit ſur p qu'en vertu des deux dernières; en ſorte que, par l'action de ce corpuſcule, p eſt animé d'une force $\frac{S}{r^2}$, dirigée de p vers S, & d'une force $\frac{S}{r^2} \cdot \frac{pQ}{pG}$, dirigée de p vers q; ſoit maintenant $\frac{\theta}{\alpha}$ l'eſpace que décriroit le corpuſcule N dans le temps T, avec la vîteſſe qu'il a en N; T & α étant conſtans, α étant un coëfficient numérique extrêmement petit, & θ étant variable ſuivant une fonction quelconque de la diſtance de p à S; on a $\frac{pQ}{pG} = \alpha\, T \cdot \frac{\sqrt{(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}}{\theta \cdot dt}$, dt étant l'élément du temps que je regarde comme conſtant; la force $\frac{S}{r^2} \cdot \frac{pQ}{pG}$ eſt conſéquemment égale à $\frac{S}{r^2} \cdot \alpha T \frac{\sqrt{(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}}{\theta \cdot dt}$.

Or ſi on la décompoſe en deux, l'une $o\,q$, perpendiculaire à $p\,S$, & l'autre ſuivant $p\,o$, on aura pour la première $\frac{S}{r^2} \cdot \frac{T.\alpha r \partial\varphi}{\theta \partial t}$, & pour la ſeconde $-\frac{\alpha S T dr}{\theta r^2 \partial t}$. De-là on conclura facilement,

$$\frac{\psi''}{p} = -\frac{S}{r^2} - \frac{\alpha S T \partial r}{\theta r^2 \partial t}$$

$$\frac{\psi'}{p} = -\frac{\alpha S T \partial\varphi}{\theta r . \partial t};$$

partant on aura

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c - \int \frac{\alpha S T \partial\varphi}{\theta}}{r^2} . \quad (3)$$

$$0 = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{\left(c - \int \frac{\alpha S T \partial\varphi}{\theta}\right)^2}{r^3} + \frac{S}{r^2} + \frac{\alpha S T \partial r}{\theta r^2 \partial t} . \quad (4)$$

Puiſque

Puisque l'orbite des Planètes est presque circulaire, je fais $r = a(1 + \alpha y)$, & $\varphi = nt + \alpha x$; ainsi en négligeant les quantités de l'ordre α^2, je puis supposer t, constant, ce qui donne $\int \frac{\alpha ST \partial\varphi}{\theta} = \frac{\alpha ST . nt}{\theta}$, en faisant commencer l'intégrale avec t; ensuite l'équation (4) donne

$$0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{S}{a^3} - \frac{c^2}{a^4}\right) + \left(\frac{3c^2}{a^4} - \frac{2S}{a^3}\right) y + \frac{2S}{a^3} \cdot \frac{cT}{a.\theta} . nt.$$

Il est clair que $\frac{S}{a^3} - \frac{c^2}{a^4}$ doit être de l'ordre α, & comme a est arbitraire, je supposerai $\frac{S}{a^3} = \frac{c^2}{a^4}$, ce qui donne

$$0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + \frac{c^2}{a^4} . y + \frac{2c^3}{a^6} \cdot \frac{a}{\theta} . T . nt,$$

d'où je tire en intégrant,

$$y = K . \cos\left(\frac{c}{a^2} . t + \varepsilon\right) - \frac{2c}{a^2} \cdot \frac{a}{\theta} . T . nt,$$

K, & ε étant arbitraires. Pour les déterminer, je supposerai que la droite SM, sur laquelle je place le corps p au premier instant du mouvement, soit le lieu de l'aphélie de l'orbite elliptique que p auroit décrite, si l'on eut eu $\frac{a}{\theta} = 0$; donc, si l'on nomme αe, le rapport de l'excentricité primitive à la distance moyenne, on aura $K = e$ & $\varepsilon = 0$; partant,

$$r = a\left[1 + \alpha e . \cos. \frac{c}{a^2} . t - \frac{2c}{a^2} \cdot \frac{\alpha a}{\theta} T . nt\right]$$

Présentement, l'équation (3) donne en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$n + \alpha \frac{dx}{dt} = \frac{c}{a^2} - \frac{2c}{a^2} . \alpha y - \frac{\alpha Sa . T . nt}{a^3 \theta}$$

Soit $n = \frac{c}{a^2}$, partant, $nn = \frac{c^2}{a^4} = \frac{S}{a^3}$.

donc, $\frac{dx}{dt} = - 2ny - \frac{an^2 T}{\theta} . nt$.

En substituant au lieu de y, sa valeur, & intégrant, on aura

$$x = - 2e \sin. nt + \tfrac{3}{2} . nT . \frac{a}{\theta} . nntt.$$

donc

$$r = a\left[1 + \alpha e . \text{cof.}\, nt - \frac{2a}{\theta} . \alpha n T . nt\right]$$

$$\varphi = nt - 2\alpha e . \text{fin.}\, nt + \tfrac{3}{2}\alpha . \frac{a}{\theta} . nT . nntt;$$

d'où il réſulte que le mouvement moyen de p, eſt aſſujetti à une équation ſéculaire proportionnelle au quarré du temps.

Les calculs précédens auroient encore lieu, ſi les deux Corps p & S, étoient emportés d'un mouvement commun dans l'eſpace.

Dans la ſuppoſition ordinaire, $\frac{aa}{\theta}$ eſt infiniment petit, & l'équation ſéculaire diſparoît ; partant, ſi cette quantité $\alpha . \frac{a}{\theta}$, n'eſt pas nulle, c'eſt ſur-tout dans l'altération du mouvement moyen des Planètes & des Satellites que ſon effet doit être ſenſible. Voyons donc ce que les Obſervations nous apprennent ſur cet objet.

XLVIII.

En comparant les Éclipſes des ſiècles paſſés avec celles de ce ſiècle, les Aſtronomes ont remarqué que les Tables de la Lune ne peuvent y ſatisfaire en ſuppoſant à cet Aſtre un mouvement moyen conſtant ; ils ont conſéquemment admis une accélération dans ce mouvement. M. Mayer, qui paroît être un de ceux qui ſe ſont le plus occupés de cet objet, a déterminé la quantité de cette accélération ; il l'a trouvée d'un degré en deux mille ans, & ſenſiblement proportionnelle au quarré des temps comptés depuis une époque donnée qu'il fixe en 1700 ; à la vérité les preuves ſur leſquelles l'accélération du moyen mouvement de la Lune eſt fondée, viennent d'être ſavamment diſcutées par M. de la Grange, dans l'excellente Pièce qui a remporté le Prix de l'Académie pour l'année 1773 ; & il paroît réſulter de ſon travail qu'elle eſt encore incertaine ; mais ſans entrer ici dans l'examen de ces preuves, j'obſerverai cependant qu'elle

est assez vraisemblable. Or si l'on considère les différens termes qui peuvent entrer dans l'équation de l'orbite lunaire, il est très-difficile d'expliquer cette équation séculaire dans la supposition ordinaire de $\frac{\alpha T}{\theta}$, infiniment petit; car il résulte des savantes recherches que M. d'Alembert a données dans ses Opuscules, que cela est impossible, en n'ayant égard qu'à l'action du Soleil, de la Terre & de la Lune supposées sphériques, & M. de la Grange a fait voir dans la pièce que je viens de citer, que la figure non-sphérique de la Lune & de la Terre, & l'action des Planètes ne peuvent le produire; on peut donc conjecturer, avec quelque vraisemblance, que $\frac{\alpha T}{\theta}$ n'est pas exactement nul, & dans ce cas en déterminer la valeur de cette manière.

Soit S la Terre, p la Lune, i le nombre des révolutions de la Lune dans le temps t; l le nombre de ses révolutions dans le temps T; l'équation séculaire de la Lune sera $\frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha a}{\theta} \cdot l \cdot \left(\frac{360^d}{57^d\ 17'\ 44''}\right)^2 \cdot i\, i \cdot 360^d$. Or le rapport du mouvement moyen de la Terre à celui de la Lune égale environ $\frac{27^j\ 7^h\ 43'}{365^j\ 6^h\ 9'} = \frac{39343}{525969}$. Donc, pour l'intervalle de 2000 ans, on a $i = 2000 \cdot \frac{525969}{39343}$. Ainsi en supposant $l = 1$, l'accélération du mouvement de la Lune sera pour cet espace de temps

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha a}{\theta} \cdot \left(\frac{360^d}{57^d\ 17'\ 44''}\right)^2 \cdot (2000)^2 \cdot \left(\frac{525969}{39343}\right)^2 \cdot 360^d;$$

$\frac{\theta}{\alpha}$ étant l'espace que parcourroit durant une révolution de la Lune, le corpuscule que je suppose la faire graviter sur la Terre.

Présentement, si l'on admet avec M. Mayer, qu'en partant de l'année 1700, l'accélération du mouvement moyen de

la Lune soit d'un degré en deux mille ans, on aura pour déterminer $\frac{\theta}{\alpha}$ l'équation suivante;

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha a}{\theta} \cdot \left(\frac{360^d}{57^d\ 17'\ 44''}\right)^2 \cdot (2000)^2 \cdot \left(\frac{525969}{39343}\right)^2 \cdot 360 = 1,$$

mais pour comparer la vîtesse $\frac{\theta}{\alpha T}$ avec la plus grande qui nous soit connue, savoir celle de la lumière; je nomme a' la distance moyenne de la Terre au Soleil, & je suppose conformément aux dernières Observations, la parallaxe moyenne de cet astre de $8''\frac{1}{2}$, celle de la Lune étant de 57′ 3″; on aura $a = a' \frac{8''\frac{1}{2}}{57'\ 3''} = a' \frac{17}{6846}$.

Soit de plus h, l'espace que parcourroit dans une minute le corpuscule que je suppose faire graviter la Lune, on aura

$$h = a' \cdot \frac{\left[51 \cdot \left(\frac{360^\circ}{57^\circ\ 17'\ 44''}\right)^2 \cdot (2000)^2 \cdot \left(\frac{525969}{39343}\right)^2 \cdot 180\right]}{39343 \cdot 6846}$$

Partant, h égale environ 960 mille fois la distance du Soleil à la Terre, & comme la lumière emploie huit minutes à peu-près à venir du Soleil à nous; il suit que la vîtesse du corpuscule N est 7 millions 680 mille fois plus grande que celle de la lumière, en sorte qu'il faudroit que la Lune se précipitât sur la Terre avec cette vîtesse, pour ne point éprouver, au premier instant de sa chute, l'action de la pesanteur.

XLIX.

Si l'équation séculaire de la Lune dépend de la valeur de $\frac{\alpha T}{\theta}$, cette quantité doit pareillement produire une équation séculaire dans le moyen mouvement des Planètes. Pour la déterminer, j'observe que $\frac{\alpha T}{\theta}$ peut varier suivant la grandeur de la masse attirante S, & suivant la distance du corps attiré p; il n'est cependant pas à présumer que la

masse plus ou moins considérable de S change cette quantité, parce que chaque molécule agissante comme si elle étoit isolée, en augmentant la masse, on ne fait qu'augmenter la somme des actions des molécules de matière, ce qui ne peut altérer la vîtesse $\frac{\theta}{\alpha T}$.

Quant à la manière dont $\frac{\theta}{\alpha T}$ dépend de la distance Sp, la supposition la plus naturelle est de faire θ constant, ou, ce qui revient au même, la vîtesse $\frac{\theta}{\alpha T}$, constante aux différentes distances de S; je m'arrêterai conséquemment à cette supposition, faute d'observations pour déterminer la véritable. Cela posé.

Si l'on désigne par i', l', a', pour le Soleil & la Terre, des quantités analogues à celles que j'ai représentées ci-dessus par i, l, a, pour la Terre & la Lune, on trouvera l'équation séculaire de la Terre, égale à

$$\frac{3}{2}\,\alpha\,.\,\frac{a'}{\theta}\,.\,l'\,.\left[\frac{360}{57^d\,17'\,44''}\right]^2 i'\,i'\,.\,360^d;$$

d'où il suit que dans le même intervalle de temps, les équations séculaires de la Terre & de la Lune, sont entr'elles comme $a'l'i'^2 : al i^2$, ou (parce que $l' : l :: i' : i$) comme $a'i'^3 : ai^3$. or, $a' : a :: 57'\,3'' : 8''\,\frac{1}{2}$, & $i' : i :: 39343 : 525969$; donc, l'équation séculaire de la Terre est à celle de la Lune comme 1 : 5,934, ou comme 1 : 6 environ, & par conséquent de 10′ à peu-près en deux mille ans.

J'observerai ici que cette accélération du mouvement moyen de la Terre, donne pour la Lune une équation séculaire un peu différente de celle que M. Mayer a conclue des observations, & dont j'ai fait usage. Cet illustre Astronome l'a déterminée par la comparaison des Éclipses anciennes & modernes, en supposant le mouvement moyen du Soleil constant; mais puisqu'il est actuellement plus rapide qu'autrefois, il est clair qu'en portant du mouvement moyen actuel; M. Mayer a supposé le Soleil, & par conséquent la Lune, trop peu avancés au moment des Éclipses anciennes: il faut

donc ajouter à l'équation féculaire de la Lune, trouvée par cet Aftronome, celle du Soleil, pour avoir la véritable quantité de cette équation. Soit x cette quantité; l'équation féculaire de la Terre eft $\frac{1}{6}x$; mais l'équation conclue par M. Mayer $= x - \frac{1}{6}x = 1^d$; donc, $x = 1^d\ 12'$; la véritable équation féculaire de la Lune eft donc de $1^d\ 12'$, & celle du Soleil, de 12 minutes en deux mille ans. Cette confidération diminue un peu la vîteffe du corpufcule N, & la rend 6 millions 400 mille fois plus grande que celle de la lumière.

Pour avoir les équations féculaires des autres Planètes, je confidère deux de ces Planètes, p & p', dont les diftances moyennes au Soleil foient a & a', & pour lefquelles i & i', expriment le nombre des révolutions faites dans le même temps, t; leurs équations féculaires feront entr'elles comme $ai^3 : a'i'^3$; mais on a, $i^2 : i'^2 :: a'^3 : a^3$; d'où il réfulte que ces équations féculaires font entr'elles comme $\frac{1}{a^{\frac{7}{2}}} : \frac{1}{a'^{\frac{7}{2}}}$; c'eft-à-dire, réciproquement, comme les racines quarrées des feptièmes puiffances des grands axes de leurs orbites.

D'après ce Théorème, je trouve pour Vénus une équation féculaire d'environ 38 minutes en 2000 ans, & pour Mercure, une équation d'environ 5 degrés $\frac{1}{2}$ pour le même intervalle de temps.

Si l'on compare maintenant ces réfultats à l'obfervation, on verra que nous manquons d'obfervations affez anciennes & affez exactes pour favoir fi Vénus & Mercure ont une équation féculaire fenfible.

Il eft fort incertain fi le moyen mouvement de la Terre s'accélère, ou refte fenfiblement le même; ce dernier fentiment paroît le plus vraifemblable, mais l'incertitude où l'on eft à cet égard prouve au moins que l'équation féculaire de la Terre eft très-petite, ce qui s'accorde fort bien avec la théorie précédente, fuivant laquelle cette équation n'eft qu'un fixième de celle de la Lune.

Quant aux Planètes fupérieures, il eft probable que les mouvemens moyens de Jupiter & de Saturne ont fouffert

une variation ſenſible; mais elle dépend d'une autre cauſe que de la valeur de $\frac{\alpha T}{\theta}$, qui ne peut en produire qu'une abſolument inſenſible.

L.

Je n'ai eu égard dans les calculs précédens qu'à l'équation ſéculaire des moyens mouvemens, comme la plus conſidérable de toutes les inégalités dépendantes de $\frac{\alpha T}{\theta}$; j'ai de plus ſuppoſé les orbites preſque circulaires, ce qui n'eſt pas vrai pour les Comètes. Voici préſentement une méthode pour déterminer ces variations, quelle que ſoit l'excentricité des orbites.

Je reprends les équations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c - \int \frac{\alpha ST\partial\varphi}{\theta}}{r^2} \quad (3),$$

$$o = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{r\partial\varphi^2}{\partial t^2} + \frac{S}{r^2} + \frac{\alpha ST\partial r}{\theta r^2\partial t} \quad (4);$$

puique θ eſt ſuppoſé conſtant, on aura $\int \frac{\alpha ST\partial\varphi}{\theta} = \frac{\alpha ST\varphi}{\theta}$.

Soit $\frac{\alpha ST}{\theta} = \mathfrak{C}$; l'équation (3) devient ainſi, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c - \mathfrak{C}\varphi}{r^2}$; l'équation (4) donne celle-ci,

$$o = \partial\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right) - r\frac{\partial\varphi^2}{\partial t} + \frac{S\partial t}{r^2} + \mathfrak{C}\frac{\partial r}{r^2};$$

équation dans laquelle je puis faire varier dt; or, ſi l'on y ſubſtitue au lieu de dt ſa valeur $\frac{r^2\partial\varphi}{c - \mathfrak{C}\varphi}$, & que l'on faſſe $\frac{1}{r} = z$, on aura en ſuppoſant $\partial\varphi$ conſtant,

$$\frac{\partial\partial z}{\partial\varphi} + z\partial\varphi = \frac{S\partial\varphi}{(c - \mathfrak{C}\varphi)^2},$$

ce qui donne en intégrant

$$z = \text{ſin.}\,\varphi \cdot \int \frac{S\partial\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\varphi}{(c - \mathfrak{C}\varphi)^2} - \text{coſ.}\,\varphi \cdot \int \frac{S\partial\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\varphi}{(c - \mathfrak{C}\varphi)^2},$$

Comme il paroît très-difficile d'intégrer rigoureuſement ces quantités, je les réduis en ſéries; or on a

$$\int \varphi^n . \partial\varphi . \text{coſ.}\,\varphi = \varphi^n . \text{ſin.}\,\varphi + n . \varphi^{n-1} . \text{coſ.}\,\varphi - n . (n-1) . \varphi^{n-2} . \text{ſin.}\,\varphi - n . (n-1) . (n-3) . \varphi^{n-3} \text{coſ.}\,\varphi + \&c.$$

$$\& \int . \varphi^n \partial \varphi \,\text{ſin.}\,\varphi = - \varphi^n . \text{coſ.}\,\varphi + n \varphi^{n-1} \text{ſin.}\,\varphi + n . (n-1) . \varphi^{n-2} \text{coſ.}\,\varphi - \&c.$$

partant,

$$\text{ſin.}\,\varphi . \int \varphi^n \partial\varphi \,\text{coſ.}\,\varphi - \text{coſ.}\,\varphi \int \varphi^n \partial\varphi . \text{ſin.}\,\varphi = \varphi^n - n . (n-1) . \varphi^{n-2} + n . (n-1) . (n-2) . (n-3) . \varphi^{n-4} - \&c.$$

d'où il eſt facile de conclure

$$z = K . \text{coſ.}\,\varphi + \varepsilon + \frac{S}{c^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{2 \mathrm{G}}{c} . \varphi + \frac{3 \mathrm{G}^2}{c^2} (\varphi^2 - 1 . 2) \\ + \frac{4 \mathrm{G}^3}{c^3} (\varphi^3 - 1 . 2 . 3 . \varphi) + \&c. \end{array} \right\}$$

Maintenant puiſque l'on a,

$$\partial t = \frac{r^2 \partial \varphi}{c - \mathrm{G}\varphi}, \;\& \; r = \frac{1}{z} = \frac{1}{K \,\text{coſ.}(\varphi + \varepsilon) + \frac{S}{c^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{2\mathrm{G}}{c} \varphi \\ + \&c. \end{array} \right\}}$$

on aura t en φ; partant φ en t, par le retour des ſuites; d'où il ſera aiſé de conclure r en t.

Si l'on nomme a le demi-grand axe d'une ellipſe, ae ſon excentricité, ε la diſtance de la Planète qui circule dans cette ellipſe, au périhélie, lorſque $\varphi = 0$, on aura $r = \frac{a(1 - ee)}{1 + e \,\text{coſ.}\,(\varphi + \varepsilon)}$; partant ſi l'on conſidère l'orbite de la Planète p, comme une ellipſe dont le demi-grand axe & l'excentricité varient, on aura $\frac{1}{a(1 - ee)} = \frac{S}{c^2} (1 + \frac{2\mathrm{G}}{c} \varphi + \&c.)$, & $\frac{e}{a(1 - ee)} = K$. Je n'aurai égard ici qu'aux quantités de l'ordre G; & je déſignerai par δa & δe les variations extrêmement petites de a & de e; cela poſé, lorſque $\varphi = 0$, on a, $\frac{S}{c^2} = \frac{1}{a(1 - ee)}$, & lorſque φ a une valeur quelconque, on a, $\frac{S}{c^2} (1 + \frac{2\mathrm{G}}{c} \varphi) = \frac{1}{(a + \delta a)[1 - (e + \delta e)^2]}$;

donc,

donc, $-\frac{\delta a}{a^2(1-ee)}+\frac{2e\delta e}{a(1-ee)^2}=\frac{S}{c^2}\cdot\frac{2\mathcal{C}}{c}\cdot\varphi$, partant $-\frac{\delta a}{a}+\frac{2e\delta e}{1-ee}=\frac{2\mathcal{C}}{c}\cdot\varphi$; de plus l'équation $K=\frac{eS}{c^2}\cdot(1+\frac{2\mathcal{C}}{c}\cdot\varphi)$, donne $\frac{\delta e}{e}=-\frac{2\mathcal{C}}{c}\cdot\varphi$; donc $\frac{\delta a}{a}=\frac{\delta e(1+ee)}{e(1-ee)}$. De ces équations, on tirera les valeurs de δa & δe; j'obſerverai ici que les lieux de l'aphélie & du périhélie ſont immobiles; je ſuppoſe maintenant que l'on veuille déterminer de quelle quantité la valeur de $\frac{aT}{\theta}$, accélère le paſſage d'une Comète par le périhélie, je reprends pour cela les équations $dt=\frac{r^2\partial\varphi}{c-\mathcal{C}\varphi}$; & $r=\frac{1}{\frac{S}{c^2}(1+\frac{2\mathcal{C}}{c}\varphi)+K\,\text{coſ.}(\varphi+\varepsilon)}$; elles donnent

$$c\partial t=\frac{\partial\varphi}{(1-\frac{\mathcal{C}}{c}\varphi)\left[\frac{S}{c^2}\cdot(1+\frac{2\mathcal{C}}{c}\varphi)+K.\,\text{coſ.}\,(\varphi+\varepsilon)\right]^2};$$

partant

$$c\partial t=\frac{\partial\varphi}{\left[\frac{S}{c^2}+K.\text{coſ.}(\varphi+\varepsilon)\right]^2}+\frac{\frac{\mathcal{C}}{c}\varphi\partial\varphi}{\left[\frac{S}{c^2}+K.\text{coſ.}(\varphi+\varepsilon)\right]^2}-\frac{4.\frac{S}{c^2}\cdot\frac{\mathcal{C}}{c}.\varphi\partial\varphi}{\left[\frac{S}{c^2}+K.\text{coſ.}(\varphi+\varepsilon)\right]^3}.$$

Soit

$$\frac{1}{\left[\frac{S}{c^2}+K.\text{coſ.}(\varphi+\varepsilon)\right]^2}=A+B.\,\text{coſ.}(\varphi+\varepsilon)+C.\,\text{coſ.}\,2(\varphi+\varepsilon)+\&c.$$

&

$$\frac{1}{\left[\frac{S}{c^2}+K.\text{coſ.}(\varphi+\varepsilon)\right]^3}=A'+B'.\text{coſ.}\,(\varphi+\varepsilon)+C'.\text{coſ.}\,2(\varphi+\varepsilon)+\&c.$$

Donc,
$$\begin{aligned}ct=\;&A.\varphi+B.\text{ſin.}\,(\varphi+\varepsilon)+\&c.\\&+\frac{\mathcal{C}}{2c}.A.\varphi^2+\frac{\mathcal{C}}{c}.B.\varphi.\text{ſin.}(\varphi+\varepsilon)+\&c.\\&-\frac{2\mathcal{C}}{c}.A'.\frac{S}{c^2}.\varphi^2-\&c.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon = 0$, le paſſage au périhélie aura lieu lorſque $\varphi = 0, \varphi = 360^d, \varphi = 2.360^d$, &c. nommant donc $'T$ le temps d'une révolution, & $'T'$ le temps de la révolution ſuivante, l'une & l'autre à compter du paſſage par le périhélie, on aura

$$\frac{'T - 'T'}{'T} = 3 \cdot \frac{\mathcal{E}}{c} \cdot \left[\frac{360^d}{57^d\, 17'\, 44''}\right] \cdot \left[\frac{2A'}{A} \cdot \frac{S}{c^2} - \frac{1}{2}\right].$$

Il ne s'agit plus maintenant que de connoître A, A', & $\frac{\mathcal{E}}{c}$; or, puiſque l'on a, $\frac{S}{c^2} = \frac{1}{a(1-ee)}$, & $K = \frac{e}{a(1-ee)}$, on aura *(voyez le Calcul intégral de M. Euler)*, $A = a^2 \sqrt{(1-ee)}$, & $A' = a^3 \sqrt{(1-ee)} \cdot (1 + \frac{1}{2}ee)$. Soit $'T = m$ minutes, & $'T' = m'$ minutes; on a, $\frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{aST}{c.\theta}$, je fais $T = 'T$; donc, $c.'T = 2\pi aa \sqrt{(1-ee)}$, π exprimant le rapport de la demi-circonférence au rayon; partant,

$$\frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{2\pi a}{\frac{\theta}{a} \cdot \sqrt{(1-ee)}},$$

$\frac{\theta}{a}$ étant l'eſpace que décriroit le corpuſcule N durant le temps T; or dans une minute, cet eſpace eſt par l'*article 48*, & en ayant égard à la remarque de l'*article 49*, $= 800000\, a'$; a' exprimant le demi-grand axe de l'orbite terreſtre; donc $\frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{2\pi a}{\sqrt{(1-ee)}.800000\, m a'}$;

partant, $m - m' = \frac{1}{44444} \cdot \frac{a}{a'} \cdot \left(\frac{355}{113}\right)^2 \cdot \left[\frac{1+ee}{(1-ee)^{\frac{1}{2}}}\right]$.

d'où l'on voit que $m - m'$ eſt abſolument inſenſible.

L I.

Il réſulte des articles précédens, que l'hypothèſe de la Peſanteur agiſſant différemment ſur les corps en repos & en mouvement, donne un moyen fort ſimple d'expliquer l'équation ſéculaire de la Lune; cependant, quelque naturelle qu'elle puiſſe être, je ſuis bien éloigné de la regarder comme certaine, & je ne la propoſe que comme une conjecture

qui m'a paru mériter l'attention des Philoſophes: elle ne ſeroit pas douteuſe s'il étoit bien démontré, 1.° que l'équation ſéculaire de la Lune exiſte; 2.° qu'elle ne peut s'expliquer dans les ſuppoſitions ordinaires, ou par des cauſes étrangères à la Peſanteur; or l'une & l'autre de ces aſſertions & particulièrement la ſeconde, eſt ſujette encore à bien des difficultés. Il eſt à la vérité vraiſemblable, par la comparaiſon des obſervations anciennes & modernes, que le moyen mouvement de la Lune eſt maintenant plus rapide qu'autrefois; c'eſt ce qui m'a paru même réſulter des calculs de M. de la Grange, dans la Pièce citée précédemment, en les examinant avec attention. *(Voy. l'addit. qui eſt à la fin ce Mém.)* Cette accélération d'ailleurs, ſi elle exiſte, ne paroît pas explicable par le ſeul principe de la gravitation univerſelle, dans les ſuppoſitions reçues, comme je l'ai déjà remarqué.

Si donc on admet cette équation ſéculaire, il faut pour l'expliquer, ou faire varier un peu, comme je l'ai fait précédemment, les ſuppoſitions d'après leſquelles on a calculé juſqu'ici le mouvement des corps céleſtes, ou recourir à des cauſes étrangères au principe de la gravitation univerſelle. Pour voir juſqu'à quel point le premier de ces deux moyens eſt préférable au ſecond, j'imagine qu'au lieu de déterminer les mouvemens céleſtes dans certaines ſuppoſitions ſur l'action de la Peſanteur, on eût cherché à déterminer ces ſuppoſitions par les mouvemens obſervés; il eſt viſible qu'en admettant une accélération dans le moyen mouvement de la Lune, on auroit trouvé la Peſanteur agiſſant différemment ſur les corps, ſuivant leurs différens mouvemens; or je demande ſi l'on ne s'en fût pas tenu à ce réſultat, qui paroît d'ailleurs bien plus naturel que la ſuppoſition ordinaire? On doit convenir cependant qu'en admettant dans l'eſpace un fluide extrêmement rare, on explique d'une manière très-ſatisfaiſante l'équation ſéculaire de la Lune *(voyez la Pièce de M. l'abbé Boſſut, qui a remporté le Prix de l'Académie pour l'année 1762).* Mais l'exiſtence d'un pareil fluide eſt fort incertaine, à moins que l'on ne prenne pour ce fluide la lumière du Soleil. Or,

il ne paroît pas qu'elle résiste assez, pour retarder sensiblement le mouvement de la Lune ; car, selon toutes les apparences, cette lumière est une émanation de la substance même du Soleil ; cela se prouve par les phénomènes de la réflexion & de la réfraction de la lumière, qui s'accordent très-bien avec cette hypothèse, en admettant de plus que les atomes lumineux sont attirés par les corps, suivant une fonction de la distance. Cela paroît encore indiqué par l'aberration des fixes ; car ce phénomène prouve que la vîtesse du corpuscule de lumière qui vient frapper l'organe de la vision, est à celle de la Terre, en raison constante, quel que soit l'astre qui envoye la lumière ; or, cela ne peut arriver dans l'hypothèse d'un fluide élastique, mis en vibration par les corps lumineux ; en effet, si l'on applique à ce cas les formules que M.rs de la Grange & Euler ont données pour le son, on trouve qu'à une très-grande distance de l'astre, la vîtesse de ce fluide diminueroit en raison de cette distance, en le supposant également élastique & dense dans toute son étendue ; cette vîtesse ne seroit donc pas constante pour les différentes étoiles, ni la même que celle de la lumière qui nous est réfléchie par les Satellites de Jupiter, ce qui est contraire à l'observation. On pourroit, à la vérité, imaginer que les vîtesses communiquées au fluide par les différentes étoiles, sont telles qu'elles deviennent toutes égales, près de la Terre ; on pourroit supposer encore telles loix d'élasticité & de densité qui produiroient cette égalité ; mais ces suppositions sont trop invraisemblables pour les admettre.

Présentement, si l'on regarde la lumière comme une émanation de la substance du Soleil, elle ne peut produire par son impulsion l'équation séculaire de la Lune ; c'est ce que les Géomètres trouveront aisément par le procédé suivant qui m'a conduit à ce résultat. J'omets ici les calculs à cause de leur longueur, & parce qu'ils sont faciles par la méthode exposée dans les articles précédens.

En admettant avec M. Mayer, une équation séculaire pour la Lune, d'un degré en deux mille ans, & supposant

la parallaxe du Soleil de 8″$\frac{1}{2}$, je détermine d'abord la perte de la maſſe du Soleil dans cet intervalle de temps ; enſuite, pour vérifier ſi cette perte eſt réelle, j'obſerve qu'il doit en réſulter un retardement dans le moyen mouvement de la Terre, parce que la maſſe du Soleil diminuant ſans ceſſe, l'orbite de la Terre doit ſe dilater de plus en plus : or, je trouve que pour admettre dans le mouvement moyen de la Lune une accélération d'un degré en deux mille ans, il faudroit admettre une retardation de pluſieurs degrés dans celui de la Terre, ce qui eſt abſolument contraire aux obſervations ; d'où je conclus que l'impulſion de la lumière ſolaire ne peut produire l'équation ſéculaire de la Lune. Mais cette lumière agit d'une manière plus ſenſible ſur la Terre, en dilatant l'atmoſphère ; c'eſt ce qui produit, au moins en partie, ces vents généraux d'Eſt qu'on obſerve ſous la zone torride. Or, il paroît que la rotation de la Terre doit être ſenſiblement retardée par l'action de ces vents ; ce qui expliqueroit d'une manière fort ſimple l'équation ſéculaire de la Lune. En effet, ſi l'on ſuppoſe les jours plus longs qu'autrefois, le mouvement de la Lune doit, par cette raiſon, paroître plus rapide. Il eſt vrai qu'alors les mouvemens moyens du Soleil & des Planètes ſeroient pareillement aſſujettis à une équation ſéculaire ; mais le mouvement du Soleil n'étant qu'un treizième environ de celui de la Lune, ſon équation ſéculaire ſeroit en même raiſon plus petite, & par conſéquent inſenſible. Dans cette ſuppoſition, l'accélération du moyen mouvement de la Lune n'eſt qu'apparente, & ce mouvement eſt conſtant en lui-même ; mais j'ai trouvé, par une méthode fort ſimple, que je me propoſe d'expoſer ailleurs, que la rotation de la Terre ne peut être ſenſiblement retardée par l'action des vents, en admettant qu'ils aient pour cauſe la dilatation de l'atmoſphère produite par la chaleur du Soleil. J'ai de plus examiné dans un *Mémoire ſur les inégalités du mouvement de rotation de la Terre*, ſi l'action du Soleil & de la Lune peut y produire une équation ſéculaire ſenſible, en ayant égard aux différentes inégalités du mouvement de ces

deux Aſtres, & ſuppoſant pour plus de généralité, une inégalité quelconque entre les momens d'inertie de la Terre par rapport à ſes trois axes principaux. Cette diſcuſſion m'a paru néceſſaire avant que de prononcer ſur l'impoſſibilité d'expliquer l'équation ſéculaire de la Lune dans les ſuppoſitions ordinaires ſur la gravitation univerſelle; or, puiſqu'il réſulte de cette recherche, que l'action du Soleil, de la Lune & des vents ne peut retarder le moyen mouvement de rotation de la Terre, il ſuit que l'accélération du moyen mouvement de la Lune eſt réelle: il y a donc bien de l'apparence, ſi elle exiſte, qu'elle dépend de la cauſe que je lui ai aſſignée ci-deſſus.

Quoi qu'il en ſoit, les calculs précédens ont du moins l'avantage de nous faire connoître l'étonnante activité de la peſanteur, puiſqu'il faudroit ſuppoſer à la Lune une vîteſſe vers la Terre, pluſieurs millions de fois plus grande que celle de la lumière, pour la ſouſtraire à ſon action; & il paroît bien certain que cette activité ne peut être moindre; car elle ſeroit infinie, ſi l'équation ſéculaire de la Lune étoit nulle, ou dûe à d'autres cauſes. Cette activité prodigieuſe me perſuade que la force attractive doit employer un temps beaucoup moindre que la lumière à ſe propager d'un corps à l'autre; & que celle de la Lune, loin d'être deux jours à parvenir à la Terre, comme M. Daniel Bernoulli l'a ſoupçonné, y parvient en moins d'un cent millième de ſeconde.

Après avoir diſcuté les différentes ſuppoſitions dont les Géomètres ont fait uſage dans l'application du principe de la Peſanteur univerſelle, je vais rentrer dans ces mêmes ſuppoſitions, & déterminer les inégalités ſéculaires des Planètes.

L I I.

Sur les inégalités ſéculaires des Planètes.

En conſidérant les maſſes des Planètes comme étant extrêmement petites par rapport à celle du Soleil, leur action ſeroit inſenſible dans l'intervalle d'un petit nombre de révolutions,

& chacune d'elles décriroit à chaque révolution, une orbite elliptique autour du Soleil. Après un temps considérable, l'action réciproque des Planètes pourroit devenir sensible; mais comme après ce temps, elles décriroient encore à très-peu près une ellipse à chaque révolution, cette action ne pourroit se manifester que par les changemens qu'elle occasionneroit à la longue dans les élémens des orbites, c'est-à-dire, dans la position des nœuds & de la ligne des apsides, dans l'excentricité, l'inclinaison, & sur-tout dans les moyens mouvemens. Ces inégalités sont par conséquent les plus considérables de toutes, & celles dont il importe le plus de fixer la valeur par la Théorie.

Parmi ces inégalités, la plus essentielle à considérer, est celle des moyens mouvemens; elle ne paroît pas cependant avoir été déterminée avec toute la précision qu'exige son importance. M. Euler, dans sa seconde Pièce sur les Irrégularités de Jupiter & de Saturne, la trouve égale pour l'une & l'autre de ces Planètes. Suivant M. de la Grange au contraire, dans *le troisième Volume des Mémoires de Turin*. elle est fort différente pour ces deux Corps. Ayant recherché la raison d'une disparité aussi frappante entre les résultats de ces deux illustres Géomètres, il m'a paru qu'ils n'avoient point fait entrer en considération plusieurs termes aussi sensibles que ceux auxquels ils ont eu égard. M. de la Grange semble à la vérité avoir porté plus loin la précision que M. Euler: j'ai lieu de croire cependant que sa formule n'est pas encore exacte. Celle à laquelle je parviens, est fort différente.* Ce peu d'accord m'avoit fait soupçonner que je pouvois m'être trompé; mais ayant recommencé plusieurs fois mes calculs, je suis parvenu aux mêmes résultats; je m'y suis conformé d'ailleurs, en examinant avec attention la solution de M. de la Grange; car cet illustre Géomètre néglige dans

* Depuis que j'ai lû ces Recherches à l'Académie, j'ai trouvé qu'elle étoit identiquement nulle *(voy. l'art. 59)*. J'aurois pu le démontrer d'abord, mais j'ai préféré de donner mes idées suivant l'ordre dans lequel elles se sont présentées à mon esprit.

les équations différentielles, les ſinus & les coſinus de très-petits angles, à cauſe de l'extrème petiteſſe de leurs coëfficiens; mais ces coëfficiens deviennent fort grands par l'intégration, & produiſent dans les moyens mouvemens, une équation ſéculaire comparable à celle à laquelle il parvient. J'obſerverai ici que la grandeur de ces coëfficiens dans la théorie des Planètes, peut rendre fautive la ſuppoſition que leur mouvement vrai eſt égal à leur mouvement moyen, plus à une très-petite quantité. Or, comme toutes les ſolutions connues du Problème des trois Corps, ſont fondées ſur cette ſuppoſition, il me paroît que les formules du mouvement vrai des Planètes que l'on en tire, ne doivent être employées que pour un temps limité après lequel il eſt à craindre qu'elles ne deviennent inexactes.

Indépendamment de tout calcul, on peut s'aſſurer par la conſidération ſuivante, que la formule de M. de la Grange eſt incomplette. Car, ſi le plan fixe auquel il rapporte le mouvement des deux Planètes, au lieu d'être l'écliptique, étoit tout autre plan, cette formule donneroit une équation ſéculaire totalement différente; & ſi ce plan paſſoit par l'interſection des orbitès de Jupiter & de Saturne, cette même équation qui auparavant dépendoit de l'inclinaiſon reſpective des orbites ceſſeroit d'en dépendre. Il paroît cependant que le mouvement moyen d'une Planète, & l'équation ſéculaire de ce mouvement, doivent ètre les mêmes, quel que ſoit le plan ſur lequel on les rapporte. Au reſte, ce que je viens de dire ne touche point au mérite de la ſolution de M. de la Grange; je lui rends, avec plaiſir la juſtice de la regarder comme une des choſes les plus délicates que l'on ait tirées de l'analyſe.

L'Académie propoſa pour ſujet du Prix de l'année 1760, de déterminer l'altération du mouvement moyen de la Terre, produite par l'action des corps céleſtes. La pièce de M. Charles Euler qui fut couronnée, quelqu'eſtimable qu'elle ſoit d'ailleurs, n'a rien ajouté, ce me ſemble, à ce que l'on ſavoit déjà ſur l'effet de l'attraction des Planètes. Après avoir diſcuté l'action de la Comète de 1759, ſur la Terre, pour altérer

altérer ſon mouvement moyen, il ſe contente d'obſerver que l'action des Planètes doit y produire une inégalité proportionnelle au quarré du temps, ſans ſe mettre en peine d'en fixer la véritable valeur.

On voit par ce détail l'incertitude qui règne encore ſur l'équation ſéculaire du mouvement moyen des Planètes, & combien il eſt néceſſaire de la déterminer avec préciſion.

Voici maintenant pour y parvenir une méthode fort ſimple; mais comme cette recherche eſt néceſſairement liée avec celle des inégalités ſéculaires, tant de l'excentricité & de l'inclinaiſon, que de la poſition des nœuds & des apſides, je vais les embraſſer dans mon calcul.

Je dois obſerver ici que quoique les formules auxquelles je parviens, renferment des termes proportionnels au temps & au quarré du temps, je ne prétends pas cependant que ces termes ſe rencontrent dans l'expreſſion rigoureuſe du mouvement des Planètes; il peut arriver en effet qu'ils ſoient produits par le développement des ſinus & coſinus de très-petits angles, en ſéries; mon objet ici n'eſt point d'entrer dans cette diſcuſſion, très-intéreſſante du côté de l'analyſe, mais qui devient inutile pour tout le temps durant lequel l'Aſtronomie a été cultivée. On peut conſulter ſur cette matière, un fort beau Mémoire de M. de Condorcet, qui a pour titre, *Réflexions ſur les méthodes d'approximation.* *

* *Mém. de l'Ac. année 1771, page 281.*

LIII.

Je reprends les équations (1), (2) & (3) de l'article XXXIX.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c + \int . \frac{\psi' r \partial t}{M}}{r^2} \quad (1.)$$

$$0 = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{\left(c + \int . \frac{\psi' r \partial t}{M}\right)^2}{r^3} - \frac{\psi''}{M} \quad (2.)$$

$$0 = \frac{\partial\partial s}{\partial t^2} + \frac{2\partial s \partial r}{r \partial t^2} + s \frac{\left(c + \int . \frac{\psi' r \partial t}{M}\right)^2}{r^4} + \frac{s\psi'' - \psi}{M r} . \quad (3)$$

J'imagine ensuite une autre Planète p', & je désigne pour cette Planète par φ', r' & s', ce que j'ai nommé φ, r & s pour p; soient de plus p & p' les masses des deux Planètes p, p', & v leur distance mutuelle; soit encore S la masse du Soleil. Cela posé, on trouvera

$$-\frac{\psi''}{M} = \frac{S+p}{r^2(1+ss)^{\frac{3}{2}}} + p'.\frac{\text{cof.}(\varphi'-\varphi)}{r'^2(1+s's')^{\frac{3}{2}}} + \frac{p'}{v^3}.[r - r'.\text{cof.}(\varphi'-\varphi)]$$

$$-\frac{\psi' r}{M} = p' r.\text{fin.}(\varphi'-\varphi)\left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right)$$

$$-\frac{\psi}{M} = \frac{(S+p)s}{r^2(1+ss)^{\frac{3}{2}}} + \frac{p's'}{r'^2(1+s's')^{\frac{3}{2}}} + \frac{p'}{v^3}(rs - r's');$$

partant, on aura

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c - \int.p'r\partial t.\text{fin.}(\varphi'-\varphi).\left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right)}{r^2} \quad (A)$$

$$0 = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{\left[c - \int.p'r\partial t.\text{fin.}(\varphi'-\varphi).\left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right)\right]^2}{r^3} + \frac{S+p}{r^2(1+ss)^{\frac{3}{2}}} \quad (B)$$

$$+ \frac{p'r}{v^3} + p'.\text{cof.}(\varphi'-\varphi)\left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right)$$

$$0 = \frac{\partial\partial s}{\partial t^2} + \frac{2\partial s\partial r}{r\partial t^2} + s\frac{\left[c - \int.p'r\partial t.\text{fin.}(\varphi'-\varphi).\left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right)\right]^2}{r^4} \quad (C)$$

$$+ \frac{p'}{r}[s' - s.\text{cof.}(\varphi'-\varphi)].\left[\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right]$$

Je supposerai les masses des Planètes infiniment petites par rapport à celle du Soleil ; je ferai ainsi $p = \delta m$, & $p' = \delta m'$, la caractéristique δ désignant une différence infiniment petite. Je prendrai ensuite pour plan de projection, le plan de l'orbite primitive de p; ce qui rend s infiniment petit, & permet de négliger son quarré, Cela posé,

J'observe d'abord que les orbites des Planètes sont fort peu inclinées les unes aux autres, & qu'elles ont fort peu d'excentricité; ainsi, en supposant α une quantité très-petite,

je suppoſerai l'excentricité & l'inclinaiſon, de l'ordre α; je me contenterai de pouſſer la préciſion juſques aux quantités de l'ordre $\alpha^2 \delta m'$ incluſivement.

Si l'on intègre préſentement les deux équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{c}{r^2}; \quad (4)$$

$$0 = \frac{\partial \partial r}{\partial t^2} - \frac{c^2}{r^3} + \frac{S + \delta m}{r^2}; \quad (5)$$

elles donneront, comme l'on ſait

$$\varphi = nt + A' - 2\alpha e . \text{ſin.}\, (nt + \varepsilon) + \frac{5}{4}\alpha^2 e^2 . \text{ſin.}\, 2\,(nt + \varepsilon) + \&c.$$

&

$$r = a\left[1 + \frac{\alpha^2 e^2}{2} + \alpha e . \text{coſ.}\, (nt + \varepsilon) - \frac{\alpha^2 e^2}{2} . \text{coſ.}\, 2\,(nt + \varepsilon) + \&c.\right]$$

Ces équations ſont à une ellipſe dont a eſt le demi-grand axe, & $\alpha e a$, l'excentricité; A' exprime la diſtance moyenne de la Planète à une ligne ſixe, lorſque $t = 0$, & ε, la quantité dont elle eſt plus avancée que ſon aphélie à cet inſtant: ces valeurs de r & de φ ſont exactes lorſque $\delta m' = 0$; mais lorſqu'il n'eſt pas nul, il faut différentier les équations (4) & (5), par rapport à δ, & leur ajouter les termes affectés de $\delta m'$, dans les équations *(A)* & *(B)*; on aura ainſi

$$\frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} = -\frac{2c}{r^3} . \delta r - \frac{\delta m'}{r^2} \int . r \partial t . \text{ſin.}\, (\varphi' - \varphi) . \left[\frac{1}{r'^2 (1 + s' s')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right]; \quad (6)$$

&

$$0 = \frac{\partial \partial . \delta r}{\partial t^2} + \frac{3c^2}{r^4} \delta r - \frac{2(S + \delta m)}{r^3} . \delta r + \frac{2c . \delta m'}{r^3} \int . r \partial t . \text{ſin.}\, (\varphi' - \varphi) . \left[\frac{1}{r'^2 (1 + s' s')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right]$$

$$+ \frac{\delta' m . r}{v^3} + \delta m' . \text{coſ.}\, (\varphi' - \varphi) . \left[\frac{1}{r'^2 (1 + s' s')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right]; \quad (7)$$

Si l'on ſubſtituoit dans ces équations, au lieu de φ, r, φ', r', s', $\delta \varphi$, δr, leurs véritables valeurs, tous les termes homologues ſe détruiroient réciproquement, c'eſt-à-dire que l'on auroit ſéparément égaux à zéro, 1.° les termes conſtans; 2.° les termes proportionnels au temps; 3.° ceux qui ſont proportionnels au quarré du temps, &c. 4.° les coëfficiens

des ſinus & des coſinus des différens angles; ce qui produiroit une ſuite infinie d'équations; mais, pour l'objet que l'on ſe propoſe ici, il ſuffit d'avoir égard dans l'équation (6), aux termes conſtans, & à ceux qui croiſſent comme le temps: dans l'équation (7), il faut de plus avoir égard aux coëfficiens de coſ. $(nt + \varepsilon)$, & de ſin. $(nt + \varepsilon)$. Or, en ayant égard à ces termes ſeuls, on aura

$$\frac{2c\delta m'}{r^3} . \int . rdt . \text{ſin.}(\varphi' - \varphi) . \left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right) + \frac{\delta m' . s}{v^3}$$

$$+ \delta m' . \text{coſ.}(\varphi' - \varphi) . \left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right) =$$

$$= a . \frac{\delta m'}{a^3} . A + \alpha^2 a . \frac{\delta m'}{a^3} . Bnt + \alpha a . \frac{\delta m'}{a^3} .$$

$$C . \text{coſ.}(nt + \varepsilon) + \alpha a . \frac{\delta m'}{a^3} . D . \text{ſin.}(nt + \varepsilon)$$

Parmi les termes conſtans, on peut négliger ceux de l'ordre $\alpha^2 \delta m'$; on aura ainſi, en n'ayant égard qu'aux termes conſtans & proportionnels au temps

$$-\frac{\delta m'}{r^2} . \int . r\partial t . \text{ſin.}(\varphi' - \varphi) . \left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right) = -\frac{\alpha^2 \delta m'}{a^3} . \frac{a^2}{2c} Bnt.$$

Or, on a $\frac{S + \delta m}{a^3} = nn$, & aux quantités près de l'ordre α^2, $\frac{c}{a^2} = n$.

Soit donc $\frac{\delta m'}{a^3} = nn . \delta \mu'$; $\delta \mu'$, exprimera le rapport de la maſſe de la Planète p', à celle du Soleil, & l'on aura

$$\frac{\partial . \delta \varphi}{\partial t} = - \frac{2c}{r^3} . \delta r - \frac{\alpha^2 \delta \mu'}{2} . B . nnt; \quad (8).$$

$$0 = \frac{\partial\partial . \delta r}{\partial t^2} + \frac{3c^2}{r^4} . \delta r - \frac{2(S + \delta m)}{r^3} . \delta r + a . \delta \mu' .$$

$$nnA + \alpha a \delta \mu' . nnC . \text{coſ.}(nt + \varepsilon)$$

$$+ \alpha a \delta \mu' . nnD . \text{ſin.}(nt + \varepsilon) + \alpha^2 aB . \delta \mu' . n^3 t; \quad (9).$$

Je ſuppoſe $\delta \varphi = \delta \mu' . gnt + \alpha^2 \delta \mu' . hnntt$; &
$\delta r = a\delta\mu' . [l + \alpha . pnt . \text{coſ.}(nt + \varepsilon) + \alpha qnt . \text{ſin.}(nt + \varepsilon) + \alpha^2 Knt]$;

en substituant ces valeurs de $\delta\varphi$, & δr, dans les équations (8) & (9), on trouvera, en comparant les termes homologues $g = 2A$, $l = -A$, $p = \frac{1}{2}D$, $q = -3eA - \frac{1}{2}C$, $K = \frac{3}{2}eD - B$, $h = \frac{3}{4}(B - eD)$. De-là on tirera facilement

$$\varphi = nt + A' + 2A\delta\mu'.nt + \alpha^2\delta\mu'.\tfrac{3}{4}(B - eD).nntt,$$

$$\& \; r = a\left\{\begin{array}{l} 1 + \alpha(e + \frac{1}{2}\delta\mu'.Dnt)\,\text{cof.}\,[nt(1 + 3A\delta\mu' + \frac{1}{2e}.C\delta\mu') + \varepsilon] \\ + \;\&c. \end{array}\right.$$

On voit par-là que si l'on nomme i, le nombre des révolutions de p, depuis une époque donnée, l'accroissement de l'équation du centre sera $\alpha D.\delta\mu'.i.360^d$.

Le mouvement de l'Apogée, suivant l'ordre des signes, sera, $-\delta\mu'.i.360^d\,[A + \frac{C}{2e}]$. Enfin l'accélération du mouvement moyen sera, $\frac{3}{2}\alpha^2\delta\mu'.(\frac{355}{113})(B - eD)ii.360^d$. Il ne s'agit donc plus que de déterminer A, B, C & D, avec toute l'exactitude possible. Or, si l'on nomme a' le demi-grand axe de l'orbite de p'; $\alpha e'a'$, son excentricité; si de plus, on fait $\frac{a'}{a} = z$, &

$$\frac{1}{(1 - 2z\,\text{cof.}\,\theta + zz)^{\frac{3}{2}}} = b + b_1.\text{cof.}\,\theta + b_2.\text{cof.}\,2\theta + b_3.\text{cof.}\,3\theta + \&c.$$

$$\frac{1}{(1 - 2z\,\text{cof.}\,\theta + zz)^{\frac{5}{2}}} = b' + b'_1.\text{cof.}\,\theta + b'_2.\text{cof.}\,2\theta + b'_3.\text{cof.}\,3\theta + \&c.$$

$$\frac{1}{(1 - 2z\,\text{cof.}\,\theta + zz)^{\frac{7}{2}}} = b'' + b''_1.\text{cof.}\,\theta + b''_2.\text{cof.}\,2\theta + b''_3.\text{cof.}\,3\theta + \&c.$$

& que l'on nomme V la longitude de l'aphélie de p', moins celle de l'aphélie de p à l'origine du mouvement; j'ai trouvé;

L'accroissement de l'équation du centre =

$$= \alpha e'.\delta\mu'.\text{fin.}\,V.i.\,360^d.\left\{\begin{array}{l} b_1 + \frac{3}{2}z(b' + \frac{b'_2}{2} - 3b + \frac{b_2}{2}) \\ - \frac{3}{8}z^2(9b'_1 - b'_3) + \frac{3}{2}z^3(3b' - \frac{1}{2}b'_2). \end{array}\right.$$

Je nomme X cette quantité.

Le mouvement de l'Apogée suivant l'ordre des signes $=$

$$= -\delta\mu'.i.360^{d}.\left[\tfrac{3}{2}(b - b') + \tfrac{z}{2}.(3b'_{1} - b_{1}) - \tfrac{3}{4}.z^{2}(b' + \tfrac{1}{2}b'_{2})\right]$$

$$- \frac{X}{2\,\alpha\, e\ \text{tang.}\ V}.$$

L'accélération du mouvement moyen $=$

$$= -\left(\tfrac{3195}{452}\right).\alpha e.\alpha e'.\delta\mu'.z.\text{fin.}\,V.ii.360^{d}.\left\{\begin{array}{l} 3\left[b - b' + \tfrac{1}{2}(b'_{2} - b_{2})\right] \\ + \tfrac{z}{4}\left[7(b'_{1} - b'_{3}) - 5\,(b''_{1} - b''_{3})\right] \\ - z^{2}.\left[3\left(b' - \tfrac{b'_{2}}{2}\right) - \tfrac{5}{4}\left(5b'' - 2b''_{2} - \tfrac{1}{2}b''_{4}\right)\right] \\ - \tfrac{5}{4}z^{3}.(b''_{1} - b''_{3}). \end{array}\right.$$

$$- \frac{3}{2}\ .\ \frac{355}{113}\ .\alpha\, e\,.\,i\,X,$$

on aura b, b_{1}, & à leur moyen, b_{2}, b_{3}, &c. b', b'_{1}, &c. b'', b''_{1}, &c. par des méthodes trop connues des Géomètres pour que je m'y arrête.

En comparant ces formules avec celles de M. de la Grange, j'ai trouvé que les expressions de l'accroissement de l'équation du centre & du mouvement de l'aphélie, sont entièrement d'accord avec celles de cet illustre Géomètre, mais l'expression de l'accélération du mouvement moyen est très-différente, & j'en ai dit ci-dessus les raisons.

L I V.

Je vais maintenant déterminer la position de l'orbite de la Planète sur un plan fixe; pour cela je reprends les équations (A), (B), (C), &c. j'y suppose d'abord $\delta\, m' = 0$;

elles deviennent
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c}{r^{2}}$$

$$0 = \frac{\partial\partial r}{\partial t^{2}} - \frac{c}{r^{3}} + \frac{S + p}{r^{2}\,(1 + ss)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\&\ 0 = \frac{\partial\partial s}{\partial t^{2}} + \frac{2\,\partial s\,\partial r}{\partial t^{2}} + \frac{c^{2}s}{r^{4}}$$

au lieu de ſuppoſer comme précédemment $s = 0$, je le ſuppoſerai de l'ordre α, & je ferai $s = \alpha\lambda$; $s' = \alpha\lambda'$. Il eſt clair que les trois équations précédentes ſont celles d'une ellipſe projetée ſur un plan fixe, & l'on aura aux quantités près de l'ordre α^3; $s = \alpha\gamma \,.\, \text{ſin.}\, (\varphi + \varpi)$, $s' = \alpha\gamma' \,.\, \text{ſin.}\, (\varphi' + \varpi')$; $\alpha\gamma$, & $\alpha\gamma'$ étant les tangentes des inclinaiſons des orbites de p & p' ſur le plan fixe. Cela poſé, l'équation (C) donne

$$0 = \frac{\partial\partial\delta\lambda}{\partial t^2} + \frac{2\partial\lambda.\partial\delta r}{\partial t^2} + \frac{2\partial r.\partial\delta\lambda}{\partial t^2} + \frac{c^2\delta\lambda}{r^4} - \frac{4c^2\delta r.\lambda}{r^5}$$
$$- \frac{2c\lambda}{r^5} \,.\, \delta m' \,.\, \int . \, r\partial t \,.\, \text{ſin.}\, (\varphi' + \varphi) \,.\, \left(\frac{1}{r'^2(1 + s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right)$$
$$+ \frac{\delta m'}{r} \,.\, [\lambda' - \lambda \,.\, \text{coſ.}\,(\varphi' - \varphi)] \,.\, \left(\frac{1}{r'^2(1 + s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right); \quad (8)$$

Je ne ferai attention qu'aux termes de la forme $\text{coſ.}\,(nt + \theta)$ & $\text{ſin.}\,(nt + \theta)$, θ étant la quantité dont la Planète eſt plus avancée que ſon nœud lorſque $t = 0$; ſoit donc, en pouſſant la préciſion juſques aux quantités de l'ordre $\alpha\,\delta\mu'$ excluſivement.

$$\left.\begin{aligned} &- \frac{2c\lambda}{\partial t^2} \delta m' . \int . r\partial t \,.\, \text{ſin.}\, (\varphi' - \varphi) \left(\frac{1}{r'^2(1 + s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right) \\ &+ \frac{\delta m'}{r} \,.\, [\lambda' - \lambda\,(\text{coſ.}\,\varphi' - \varphi)] \,.\, \left(\frac{1}{r'^2(1 + s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right) \end{aligned}\right\} = \begin{aligned} &E \,.\, nn\,\delta\mu' \,.\, \text{ſin.}\,(nt + \theta) \\ &+ F \,.\, nn \,.\, \delta\mu' \,.\, \text{coſ.}\,(nt + \theta) \end{aligned}$$

on aura

$$0 = \frac{\partial\partial\delta\lambda}{\partial t^2} + \frac{2\partial\lambda.\partial\delta r}{\partial t^2} + \frac{2\partial r.\partial\delta\lambda}{r^4} + \frac{c^2\,\delta\lambda}{r^4} - \frac{4c^2\lambda\,\delta r}{r^5}$$
$$+ E \,.\, nn \,.\, \delta\mu' \,.\, \text{ſin.}\,(nt + \theta) + F \,.\, nn \,.\, \delta\mu \,.\, \text{coſ.}\,(nt + \theta)$$

Soit $\delta\lambda = \delta\mu' \,.\, gnt \,.\, \text{ſin.}\,(nt + \theta) + \delta\mu' \,.\, fnt \,.\, \text{coſ.}\,(nt + \theta)$, & l'on trouvera, en ſubſtituant dans l'équation précédente, au lieu de $\delta\lambda$, cette valeur, & au lieu de δr, ſa valeur ci-deſſus; $f = \frac{1}{2}E + 2\gamma A$, & $g = -\frac{1}{2}F$; partant,

$$\alpha\lambda = \alpha\gamma \,.\, \text{ſin.}\,(nt + \theta) + \alpha\,\delta\mu' \,.\, nt \,.\, (2A\gamma + \tfrac{1}{2}E) \,.\, \text{coſ.}\,(nt + \theta)$$
$$- \tfrac{1}{2}F \,.\, \delta\mu' \,.\, nt \,.\, \text{ſin.}\,(nt + \ )$$

d'où l'on tire,

$$s = (\alpha\gamma - \tfrac{1}{2} F.\delta\mu'.nt).\text{fin.}\left[nt\left(2 + 2A\delta\mu' + \frac{E\delta\mu'}{2\gamma}\right) + \theta\right].$$

La diminution de l'inclinaiſon de l'orbite de p ſur le plan fixe ſera donc $= \frac{1}{2} F.\delta\mu'.i.360^d$, & le mouvement rétrograde de ſes nœuds ſur le même plan $= \frac{E\delta\mu'}{2\gamma}.i.360^d$. Il ne s'agit donc plus que de déterminer E & F; or, en nommant I la longitude du nœud de p' ſur le plan fixe, moins celle du nœud de p à l'origine du mouvement, j'ai trouvé,

la diminution ſéculaire de l'orbite de p ſur le plan fixe $=$

$$\frac{z.b_1}{4}.\alpha\gamma'.\text{fin.}\,I.\delta\mu' i.360^d,$$

&

le mouvement rétrograde de ſes nœuds ſur le même plan $=$

$$\frac{zb_1}{4}.\delta\mu'.\left(1 - \frac{\gamma'}{\gamma}.\text{cof.}\,I\right)i.360^d.$$

Ces formules du mouvement du nœud & de la variation de l'inclinaiſon, s'accordent avec celles de M. de la Grange & avec celles que M. Euler a données dans ſa première pièce ſur Jupiter & Saturne; car cet illuſtre Géomètre, en prenant pour plan fixe celui de l'orbite de p', conſidéré comme invariable, trouve

la diminution de l'orbite de p ſur ce plan $= 0$;

&

le mouvement rétrograde de ſes nœuds $= \frac{zb_1.\delta\mu'}{4}.i.360^d$.

D'où il eſt aiſé de tirer les formules précédentes, en rapportant le mouvement de cette Planète ſur un autre plan peu incliné à celui des deux orbites de p & de p'.

Il eſt aiſé de voir que l'inclinaiſon de l'orbite de p ira en augmentant, ou en diminuant, ſuivant la poſition du plan fixe, & que le mouvement des nœuds ſera direct ou rétrograde, ſuivant que $\frac{\gamma'}{\gamma}$ cof. I. ſera plus grand ou moindre que l'unité. Ces deux remarques ſont des corollaires aſſez ſimples

ſimples des formules de M. Euler, pour qu'il ait pu ſe diſpenſer de les faire; mais ce qu'il importoit véritablement de tirer de ſon calcul, étoit la diminution de l'obliquité de l'Écliptique, & c'eſt ce que cet illuſtre Géomètre a fait dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1754.

L V.

J'ai ſuppoſé dans les calculs précédens, les maſſes des Planètes infiniment petites par rapport à celle du Soleil; cette ſuppoſition eſt admiſſible pour Mars, la Terre, Vénus & Mercure; mais elle n'eſt pas exacte pour Jupiter & Saturne; car Jupiter, par exemple, égale $\frac{1}{1067}$ de la maſſe du Soleil; or, ce rapport, loin d'être infiniment petit, eſt très-comparable au produit des excentricités des deux orbites, auquel j'ai eu égard dans l'expreſſion de l'accélération des moyens mouvemens. Il paroît donc alors néceſſaire de conſidérer dans ces recherches, les quantités multipliées par $\delta\mu'^2$. Or, en regardant $\delta\mu'$ comme étant de l'ordre α^2, j'ai trouvé par le calcul, & les Géomètres verront aiſément à l'inſpection des équations (6) & (7), que ces quantités n'ajoutent aucun terme aux formules précédentes; en ſorte qu'elles ſont exactes, même dans la ſuppoſition où $\delta\mu'$ ſeroit de l'ordre α^2.

De plus, ſi l'on conſidère avec attention ces mêmes équations (6) & (7), on verra que l'expreſſion de l'accélération du mouvement moyen eſt exacte aux quantités près de l'ordre $\alpha^4\delta\mu'$, en ſorte qu'elle ſeroit la même ſi l'on avoit égard dans le calcul aux quantités de l'ordre $\alpha^3\delta\mu'$; pareillement, on verra que les formules du mouvement des nœuds & de l'apogée, & de la variation de l'excentricité & de l'inclinaiſon ſont exactes, aux quantités près de l'ordre $\alpha^3\delta\mu$; on peut donc les regarder comme fort approchées.

L V I.

Je vais préſentement déterminer les inégalités proportion-

nelles au cube & aux puiſſances ſupérieures du temps dans le moyen mouvement des Planètes, & celles qui ſont proportionnelles au quarré & aux puiſſances ſupérieures du temps, dans les autres élémens de leurs orbites.

Il eſt aiſé de voir, à l'inſpection des équations du Problème, que l'on aura,

$$\varphi = nt + K\delta\mu'.tt + L\delta\mu'^2.t^3 + \&c.$$

J'ai précédemment déterminé K, en fonction de z, αe, $\alpha e'$, & ſin. V, & j'en conclus L de la manière ſuivante. Pour cela je fais $t = T + t_1$, & $\varphi = \Phi + \varphi_1$, T & Φ étant conſidérablement plus grands que t_1 & φ_1, & φ_1 étant nul lorſque $t_1 = 0$, on aura donc

$$\varphi_1 = nt_1 + 2K\delta\mu' T.t_1 + \delta\mu'.Kt_1^2$$
$$+ 3L\delta\mu'^2 T^2.t_1 + 3L.\delta\mu'^2 Tt_1^2 + \&c.$$

mais ſi l'on nomme K' ce que devient K, lorſqu'on y met au lieu de r, e, e', & V, les valeurs qui ont lieu après le temps T, & que l'on nomme n_1 ce que devient n après ce temps, on aura

$$\varphi_1 = n_1.t_1 + K'\delta\mu'.t_1^2.$$

Donc, en comparant, on aura

$$3L\delta\mu'^2 T + K\delta\mu' = K'\delta\mu'.$$

Partant, $L\delta\mu' = \frac{1}{3}\,\frac{K' - K}{T}$. On voit donc que pour avoir L, il faut différentier K, en y faiſant varier z, V, e, e', des quantités dont elles ont varié après le temps T, diviſer cette différence par T, & en prendre le tiers.

Comme la variation de z eſt de l'ordre $\alpha^2\delta\mu'$, celles de e & e' étant de l'ordre $\delta\mu'$, on peut regarder dans la différenciation, z comme conſtant.

On obtiendroit, par une méthode ſemblable, les termes proportionnels à la quatrième, cinquième, &c. puiſſance du temps.

Pareillement, on peut ſuppoſer le mouvement de l'apogée $= H\delta\mu'.t + M\delta\mu'^2.tt + \&c.$ J'ai déterminé ci-devant H en fonction e, e', z & V. Soit donc $t = T + t_1$,

& H' ce que devient H, après le temps T; le mouvement dans l'intervalle t_1 sera, $H\delta\mu' t_1 + 2M\delta\mu'^2 Tt_1 +$ &c. d'où l'on tirera $H' = H + 2M\delta\mu' T$. Partant....
$M\delta\mu' = \frac{H' - H}{2T}$.

On détermineroit de la même manière les inégalités proportionnelles au quarré, au cube, &c. des temps, dans les autres élémens de l'orbite; mais toutes ces inégalités sont encore trop peu sensibles pour y avoir égard.

L V I I.

Application des formules précédentes à Jupiter & à Saturne.

M. de la Grange a trouvé dans le Mémoire cité précédemment (voyez *le III.e Volume des Mémoires de Turin, page 376),* en supposant que p soit Saturne, & p' Jupiter,

$z = 0{,}545169.$ $b' = 6{,}89171.$
$b = 2{,}17810.$ $b'_1 = 12{,}40329.$
$b_1 = 3{,}18323.$ $b'_2 = 9{,}89076.$
$b_2 = 2{,}08012.$ $b'_3 = 7{,}31577.$

Ayant vérifié ces valeurs, je les ai trouvées exactes, & j'en ai conclu

$b'' = 26{,}31447.$
$b''_1 = 49{,}97291.$
$b''_2 = 43{,}52843.$
$b''_3 = 35{,}45922.$
$b''_4 = 27{,}43053.$

Mais suivant les Tables de Halley, on a pour l'année 1750,

$\alpha e' = 0{,}0482218$, $\alpha e = 0{,}057003$
$V = -79^d\ 6'\ 12''$

& si l'on prend pour plan fixe, celui de l'écliptique pour le commencement de l'année 1750, on aura $\alpha\gamma' = 0{,}023032$, $\alpha\gamma = 0{,}043710$, &, $-I = 13^d\ 4'\ 16''$; de plus

$\delta\mu' = \frac{1}{1067}$; cela posé. M. de la Grange ayant déterminé d'après des formules exactes, le mouvement des nœuds & de l'aphélie, ainsi que la variation de l'excentricité & de l'inclinaison de l'orbite de Saturne sur l'écliptique, il n'y a point de doute que les valeurs qu'il trouve ne soient exactes, je me bornerai conséquemment ici à déterminer l'équation séculaire du mouvement moyen. Or en substituant les valeurs précédentes dans l'expression analytique de cette équation, je l'ai trouvée absolument nulle; d'où je conclus que l'altération du mouvement moyen de Saturne, si elle existe, n'est point dûe à l'action de Jupiter.

Si l'on suppose actuellement que p soit Jupiter & p' Saturne; si de plus on distingue par une parenthèse les quantités correspondantes à Jupiter, on aura $(z) = \frac{1}{z}$, $(b) = b\,z^3$, $(b_1) = b_1\,z^3$ &c. $(b') = b' z^5$ &c. $(b'') = b''\,z^7$ &c. d'où j'ai conclu

$(b) = 0{,}35292$, $(b') = 0{,}33188$, $(b'') = 0{,}37663$,
$(b_1) = 0{,}51578$, $(b'_1) = 0{,}59730$, $(b''_1) = 0{,}71524$,
$(b_2) = 0{,}33704$, $(b'_2) = 0{,}47630$, $(b''_2) = 0{,}62300$,
$(b'_3) = 0{,}35230$, $(b''_3) = 0{,}50751$,
$(b''_4) = 0{,}39260$,

enfin, $\delta\mu' = \frac{1}{3021}$; d'ailleurs $(V) = -V$, $(I) = -I$, $(\alpha e) = \alpha e'$, $(\alpha\gamma) = \alpha\gamma'$, & $(\alpha\gamma') = \alpha\gamma$. Cela posé, en substituant ces valeurs dans la formule de l'équation séculaire, je l'ai trouvée absolument nulle; d'où je conclus que l'altération du mouvement moyen de Jupiter, si elle existe, n'est point dûe à l'action de Saturne.

En comparant les Observations de Jupiter & de Saturne faites dans les différens siècles, les Astronomes ont cru apercevoir une accélération dans le mouvement moyen de Jupiter & une retardation dans celui de Saturne; je ne

m'arrêterai point ici à discuter ces Observations & à faire voir l'incertitude qu'elles laissent sur la quantité de ces altérations ; il suffit d'observer ici que leur existence paroît assez vraisemblable, & que le retardement de Saturne est beaucoup plus considérable que l'accélération de Jupiter dans le même intervalle de temps.

Il résulte de la théorie précédente, que ces variations ne peuvent être attribuées à l'action mutuelle de ces deux Planètes ; mais si l'on considère le grand nombre de Comètes qui se meuvent autour du Soleil, si l'on fait ensuite réflexion qu'il est très-possible que quelques-unes d'entr'elles aient passé assez près de Jupiter & de Saturne pour altérer leurs mouvemens, & que leur effet, toutes choses d'ailleurs égales, doit être plus sensible sur les Planètes les plus éloignées du Soleil, par la même raison que l'effet de Jupiter sur Saturne est beaucoup plus grand que sur Mars, dont il est cependant plus près que de Saturne; on regardera comme très-probable que les variations observées dans les mouvemens moyens de Jupiter & de Saturne ont été produites par l'action de ces Comètes; on ne peut douter en effet qu'elles ne soient soumises comme tous les autres Corps célestes, aux loix de la Pesanteur universelle; il semble même résulter des Observations, que leur action sur Saturne est sensible, puisque cette Planète est sujette à des inégalités qui ne paroissent pas pouvoir dépendre de sa pesanteur sur Jupiter; il seroit donc fort à desirer que le nombre des Comètes, leurs masses & leurs mouvemens fussent assez connus pour que l'on put déterminer l'effet de leur action sur les Planètes; c'est ce qu'on ne doit attendre que d'une très-longue suite d'Observations.

L V I I I.

Mais voici un moyen fort simple de s'assurer d'ailleurs si les altérations des mouvemens moyens de Jupiter & de Saturne sont l'effet de leur action mutuelle; pour cela, je fais usage d'un principe que M. le Chevalier d'Arcy a donné dans les *Mémoires de l'Académie, année 1747*, & qu'il a fort heureusement appliqué à la solution de différens Problèmes

de Dynamique: voici l'énoncé de ce principe. *Si plusieurs Corps se meuvent autour d'un point quelconque, que je considère comme foyer, la somme des produits de la masse de chaque Corps, par l'aire que décrit le rayon vecteur de sa projection sur un plan fixe, qui passe par ce foyer, est proportionnelle au temps.*

Soit donc C (*figure 3*) le centre commun de gravité du Soleil S, de Jupiter p, & de Saturne p'; je regarde ce point comme foyer, & je fais passer par ce même point, un plan fixe que je suppose être celui de l'Écliptique, pour le commencement de l'année 1750. Cela posé, le produit de l'aire que décrit le rayon vecteur de la projection de Jupiter autour de C, multipliée par sa masse, plus, celui de l'aire décrite par le rayon vecteur de la projection de Saturne, multipliée par sa masse, plus celui de l'aire décrite par le rayon vecteur de la projection du Soleil, multipliée par sa masse, est constant en temps égal.

En regardant les masses de Jupiter & de Saturne comme infiniment petites par rapport à celle du Soleil, que nous prendrons pour unité de masse; il est clair que CS sera infiniment petit du premier ordre; partant, l'aire décrite par le rayon vecteur de la projection du Soleil autour de C, est infiniment petite du second ordre, & conséquemment négligible. Maintenant, si l'on suppose les orbites de Jupiter & de Saturne elliptiques dans l'intervalle d'une révolution; que l'on nomme $\delta\mu$ la masse de Jupiter, $\delta\mu'$ celle de Saturne, & que l'on conserve en général les mêmes dénominations que ci-dessus, en observant de marquer d'un trait pour Saturne, les quantités correspondantes à celles de Jupiter; j'ai trouvé, en négligeant les quatrièmes puissances des excentricités & des inclinaisons, que l'aire décrite durant un instant infiniment petit dt, par le rayon vecteur de la projection de Jupiter $= \frac{1}{2} a^2 n\, dt \left[1 - \frac{1}{2}\alpha^2 e^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\gamma^2\right]$ & qu'ainsi celle décrite par le rayon vecteur de la projection de Saturne, $= \frac{1}{2} a'^2 n'\, dt \left[1 - \frac{1}{2}\alpha^2 e'^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\gamma'^2\right]$; on aura donc

$$\delta\mu \,.\, n a^2 \left[1 - \frac{1}{2}\alpha^2 e^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\gamma^2\right] + \delta\mu' \,.\, n' a'^2 \left[1 - \frac{1}{2}\alpha^2 e'^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\gamma'^2\right] = C,$$

C étant une constante; or, on a $\frac{1}{a^3} = nn$, & $\frac{1}{a'^3} = n'^2$,

l'équation précédente deviendra par conséquent,

$$n^{-\frac{1}{3}}\delta\mu[1-\tfrac{1}{2}\alpha^2e^2-\tfrac{1}{2}\alpha^2\gamma^2]+n'^{-\frac{1}{3}}\delta\mu'[1-\tfrac{1}{2}\alpha^2e'^2-\tfrac{1}{2}\alpha^2\gamma'^2]=C.$$

Si l'on suppose actuellement qu'après plusieurs siècles, les orbites des deux Planètes changent par leur action mutuelle, & que l'on exprime par la caractéristique δ, les variations de leurs élémens, on différenciera l'équation précédente par rapport à δ, en regardant C comme constante; ce qui établit une relation entre les inégalités des deux Planètes, relation à laquelle les observations doivent satisfaire, si ces Planètes n'ont éprouvé d'autre action sensible, que leur gravitation réciproque. On aura donc

$$\left.\begin{aligned}&\tfrac{1}{3}\delta\mu\,.\,n^{-\frac{4}{3}}\delta n\,[1-\tfrac{1}{2}\alpha^2e^2-\tfrac{1}{2}\alpha^2\gamma^2]\\&+\tfrac{1}{3}\delta\mu'\,.\,n'^{-\frac{4}{3}}\delta n'\,[1-\tfrac{1}{2}\alpha^2e'^2-\tfrac{1}{2}\alpha^2\gamma'^2]\\&+n^{-\frac{1}{3}}\delta\mu\,[\alpha^2e\,\delta e+\alpha^2\gamma\,\delta\gamma]\\&+n'^{-\frac{1}{3}}\delta\mu'\,[\alpha^2e'\,\delta e'+\alpha^2\gamma'\,\delta\gamma']\end{aligned}\right\}\begin{matrix}(Z)\\=0.\end{matrix}$$

Si l'on nomme T le temps après lequel on suppose que les élémens n, e, γ, n', e', & γ' ont varié des quantités δn, δe, $\delta\gamma$, $\delta n'$, $\delta e'$, & $\delta\gamma'$, & que l'on suppose que durant ce temps Jupiter ait fait i révolutions, on aura, *(voyez le Mémoire de M. de la Grange.)*

$$2\delta\alpha e=\frac{7'',4254}{57^d\,17'\,44''}.i;\ 2\delta\alpha e'=-\frac{32'',6086}{57^d\,17'\,44''}i.\frac{n'}{n}$$

$$\delta\alpha\gamma=-\frac{1'',0030}{57^d\,17'\,44''}.i;\ \delta\alpha\gamma'=\frac{2'',7449}{57^d\,17'\,44''}i.\frac{n'}{n}.$$

D'ailleurs, $\frac{n'}{n}=0,402528$. De-là, je conclus

$$\delta\mu.n^{-\frac{1}{3}}[\alpha^2e\delta e+\alpha^2\gamma\delta\gamma]+\delta\mu'.n'^{-\frac{1}{3}}[\alpha^2e'\delta e'+\alpha^2\gamma'\delta\gamma']=0;$$

partant, en négligeant les quantités de l'ordre $\alpha^2\delta n'\delta\mu$, l'équation *(Z)* devient

$$\delta n'=-\delta n.\frac{\delta\mu}{\delta\mu'}.\left(\frac{n'}{n}\right)^{\frac{4}{3}},$$

ce qui donne $\delta n'=-\delta n.0,84149$.

De-là, il suit que l'équation séculaire de Jupiter, est à celle de Saturne dans le même intervalle de temps, comme 1 : 0, 84149, & que d'ailleurs elles ont des signes contraires. Les observations satisfont, à la vérité, à cette dernière condition, mais non pas à la première, puisque l'équation séculaire de Saturne, loin d'être moindre que celle de Jupiter, est beaucoup plus grande.

On peut remarquer en passant, que l'équation séculaire de Jupiter étant nulle, celle de Saturne doit l'être pareillement; ce qui coincide avec les résultats que j'ai trouvés précédemment, & ce qui confirme par conséquent leur exactitude.

Il paroît donc certain que l'on doit chercher ailleurs que dans l'action mutuelle de Jupiter & de Saturne, l'altération que l'on observe dans leurs moyens mouvemens. On l'attribuera peut-être à l'action de leurs satellites; mais cela est impossible. Car si un système de Corps très-voisins les uns des autres, se meut à une fort grande distance du Soleil, le centre de gravité du système décrit très-sensiblement une ellipse constante autour du Soleil *(Voyez le sixième Volume des Opuscules de M. d'Alembert)*. D'ailleurs, par la théorie des satellites, & par les observations, il est prouvé que le système d'une Planète & de ses satellites, est compris dans des limites déterminées, au moins durant un très-grand nombre de siècles. Ainsi, la Planète reste toujours fort près du centre commun de gravité du système; d'où il suit que les élémens de l'ellipse décrite par la Planète, peuvent être considérés comme invariables, en ne considérant que l'action de ses satellites.

LIX.

J'ai observé *(article LVII)* que la substitution des valeurs numériques de b, b_1, &c. b', b'_1, &c. b'', &c. relatives à Jupiter & à Saturne, dans l'expression analytique de l'équation séculaire du moyen mouvement des Planètes, la rendoit nulle à très-peu près, en sorte que les quantités extrêmement petites qui restent à la fin du calcul, peuvent être attribuées

aux

aux erreurs inévitables dans la détermination de b, b_{1}, &c. l'exactitude avec laquelle les différens termes de cette expression se sont mutuellement détruits dans ce cas, m'a fait soupçonner qu'elle est identiquement nulle; en effet, il est assez peu vraisemblable qu'une égalité aussi parfaite entre ses termes positifs & négatifs, soit dûe aux circonstances particulières du mouvement de Jupiter & de Saturne: j'ai donc cherché à vérifier cette conjecture, & je l'ai trouvée juste; d'où il suit que l'action des Planètes les unes sur les autres & sur le Soleil, n'a pu sensiblement altérer leurs moyens mouvemens, depuis le temps au moins auquel on a commencé à cultiver l'Astronomie, jusqu'à ce moment. Comme cette remarque me paroît de la plus grande importance dans la théorie des Planètes, & que d'ailleurs elle est contraire à ce qu'ont cru jusqu'ici tous les Géomètres qui se sont occupés de cet objet; je vais exposer en peu de mots le procédé qui m'y a conduit.

Les Géomètres savent que b, & b_{1}, étant donnés, on a facilement par des expressions finies les autres quantités b_{2}, &c. b', b_{1}', b_{2}', &c. b'', b_{1}'', &c. comme M. d'Alembert l'a trouvé le premier *(voyez le second volume de ses Recherches sur le Système du Monde)*. Soit

$$\frac{1}{(1 - 2z\,\text{cos}.\,\theta + zz)^{\mu}} = b + b_{1}\,.\,\text{cos}.\,\theta + b_{2}\,.\,\text{cos}.\,2\,\theta + \&c.$$

$$\frac{1}{(1 - 2z\,\text{cos}.\,\theta zz)^{\mu+1}} = b' + b_{1}'\,\text{cos}.\,\theta + \&c.$$

on aura *(voyez les Recherches de M. de la Grange sur Jupiter & Saturne)*.

$$b_{2} = \frac{(1 + zz)b_{1} - 2b\mu z}{z(1 - \mu)}, \quad b_{3} = \frac{2(1 + zz)b_{2} - b_{1}\,.\,z(1 + \mu)}{z(3 - \mu)},$$

$$b_{4} = \frac{3(1 + zz)b_{3} - zb_{2}(2 + \mu)}{z(4 - \mu)}, \ \&c.$$

$$b' = \frac{b(1 + zz) + \frac{\mu - 1}{\mu}b_{1}\,.\,z}{(1 - zz)^{2}}, \quad b_{1}' = \frac{4bz + \frac{\mu - 1}{\mu}b_{1}(1 + zz)}{(1 - zz)^{2}};$$

De-là, en faiſant $\mu = \frac{3}{2}$, j'ai conclu

$$b_2 = \frac{2(1+zz)}{z}\, b_1 - 6b.$$

$$b' = \frac{b(1+zz)}{(1-zz)^2} + \frac{\frac{1}{3} b_1 . z}{(1-zz)^2},$$

$$b'_1 = \frac{4bz}{(1-zz)^2} + \frac{\frac{1}{3} b_1 (1+zz)}{(1-zz)^2},$$

$$b'_2 = \frac{2b(1+zz)}{(1-zz)^2} + \frac{\frac{10}{3} b_1 . z - \frac{2}{3}\,\frac{b_1(1-zz)^2}{z}}{(1-zz)^2},$$

$$b'_3 = \frac{\frac{8b(1+zz)^2}{z} - 28bz}{(1-zz)^2} + \frac{11 . b_1(1+zz) - \frac{8}{3}\,\frac{b_1(1+zz)^3}{zz}}{(1-zz)^2},$$

$$b'' = \frac{\frac{12}{5} bzz + b(1+zz)^2}{(1-zz)^4} + \frac{\frac{8}{15} b_1 . z(1+zz)}{(1-zz)^4}.$$

$$b''_1 = \frac{\frac{32}{5} bz(1+zz)}{(1-zz)^4} + \frac{\frac{4}{3} b_1 . zz + \frac{1}{5} b_1 (1+zz)^2}{(1-zz)^4},$$

$$b''_2 = \frac{\frac{56}{5} bzz + \frac{2}{5} b(1+zz)^2}{(1-zz)^4} + \frac{\frac{8}{5} b_1 . z(1+zz) - \frac{2}{15}\,\frac{b_1(1+zz)^3}{z}}{(1-zz)^4},$$

$$b''_3 = \frac{\frac{64}{5} bz(1+zz) - \frac{8}{5}\,\frac{b(1+zz)^3}{z}}{(1-zz)^4} + \frac{12 b_1 zz - \frac{23}{5} b_1 (1+zz)^2 + \frac{8}{15}\,\frac{b_1(1+zz)^5}{zz}}{(1-zz)^4}$$

$$b''_4 = \frac{\frac{362}{5} b(1+zz)^2 - \frac{616}{5} bzz - \frac{48}{5}\,\frac{b(1+zz)^4}{zz}}{(1-zz)^4}$$
$$+ \frac{\frac{272}{5} b_1 . z(1+zz) - \frac{392}{15}\,\frac{b_1(1+zz)^3}{z} + \frac{48}{15}\,\frac{b_1(1+zz)^5}{z^3}}{(1-zz)^4}.$$

Si l'on ſubſtitue ces valeurs dans l'expreſſion de l'équation ſéculaire du moyen mouvement, on trouvera après toutes les réductions, qu'elle ſe réduit à zéro.

J'ai cherché enſuite ſi par de ſemblables ſubſtitutions, il

ne feroit pas possible de simplifier les expressions de l'accroissement de l'équation du centre & du mouvement de l'apogée, & j'ai trouvé qu'elles deviennent par-là extrêmement simples & commodes pour le calcul :

l'accroissement de l'équation du centre =

$$\alpha e' \delta \mu' . \text{sin.} V . i . 360^d [b_{\prime} (1 + zz) - 3 bz].$$

le mouvement de l'apogée suivant l'ordre des signes =

$$\delta \mu' . i . 360^d [\tfrac{1}{4} z b_{\prime} - \frac{\frac{1}{2}\alpha e'}{\alpha e} . \text{cos.} V ({b_{\prime}(1+zz) \atop -3bz})].$$

Si l'on joint à ces formules celles du mouvement rétrograde des nœuds de l'orbite, & de la diminution féculaire de son inclinaison sur le plan fixe, on aura toutes les inégalités féculaires du mouvement moyen des Planètes exprimées par des formules aussi simples qu'on puisse le desirer, en sorte qu'il ne reste plus de difficulté que dans la détermination de b & $b_{\prime}$; mais les Géomètres ont imaginé pour cela différentes méthodes qu'il feroit inutile de rapporter ici.

Je puis me servir, pour prouver l'exactitude des calculs précédens, de la méthode dont j'ai fait usage, *art. LVIII.* Dans le cas particulier de Jupiter & de Saturne; car si les formules précédentes sont exactes, il faut que l'équation *(Z)*

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} \delta \mu . n^{-\frac{4}{3}} \delta n . [1 - \frac{1}{2} \alpha^2 e^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \gamma^2] \\ + \frac{1}{3} \delta \mu . n'^{-\frac{4}{3}} \delta n' [1 - \frac{1}{2} \alpha^2 e'^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \gamma'^2] \\ + n^{-\frac{1}{3}} \delta \mu [\alpha e \delta e + \alpha \gamma \delta \gamma] \\ + n'^{-\frac{1}{3}} \delta \mu' [\alpha e' \delta e' + \alpha \gamma' \delta \gamma'] \end{array}\right\} = 0. (Z)$$

trouvée, *art. LVIII*, soit vraie, en y supposant $\delta n = 0$, $\delta n' = 0$. Il faut donc que les valeurs de δe, $\delta \gamma$, $\delta e'$, $\delta \gamma'$. satisfassent à l'équation

$$\left.\begin{array}{l} n^{-\frac{1}{3}} \delta \mu [\alpha e \delta e + \alpha \gamma \delta \gamma] \\ + n'^{-\frac{1}{3}} \delta \mu' [\alpha e' \delta e' + \alpha \gamma' \delta \gamma'] \end{array}\right\} = 0 \ (\sigma),$$

or, on a .

$$\delta e = \alpha e' \delta \mu' \text{ fin. } V . i . 360^{d} \, [b_{1} (1 + zz) - 3 b z]$$

$$\delta e' = - \alpha e \delta \mu . \text{fin.} V . i . \frac{n'}{n} . 360^{d} z \, [b_{1} (1 + zz) - 3 b z]$$

$$\delta \gamma = \tfrac{1}{4} \alpha \gamma' z b_{1} \text{ fin. } I . \delta \mu' . i . 360^{d}, \; \&$$

$$\delta \gamma' = - \tfrac{1}{4} \alpha \gamma b_{1} . z^{2} \text{ fin. } I . \delta \mu . i . \frac{n'}{n} . 360^{d}.$$

De plus $\frac{n'}{n} = z^{-\frac{3}{2}}$. Cela poſé, ſi l'on ſubſtitue ces valeurs dans l'équation (σ), on verra qu'elles y ſatisfont.

Voici maintenant une petite Table qui renſerme toutes les inégalités ſéculaires du mouvement de la Planète p, troublée par l'action de la Planète p'.

Soit $\delta\mu'$ le rapport de la maſſe de p', à celle du Soleil; a, la moyenne diſtance de p au Soleil; $\alpha e . a$, l'excentricité de ſon orbite, & $\alpha \gamma$, ſon inclinaiſon ſur le plan fixe; L, la Longitude de ſon apogée, & Γ, celle de ſon nœud, à l'époque où l'on fixe l'origine du mouvement; que a', $\alpha e' a'$, $\alpha \gamma'$, L' & Γ', déſignent des quantités analogues pour la Planète p'. Soit de plus,

$$\frac{a}{a'} = z, \; \& \; \frac{1}{(1 - 2 z \operatorname{cof.} \theta + zz)^{\frac{3}{2}}} = b + b_{1} . \operatorname{cof.} \theta + \&c.$$

on déterminera b & b_{1} au moyen des expreſſions ſuivantes. *(Voyez le Calcul intégral de M. Euler).*

$$b = \frac{1}{(1+zz)^{\frac{3}{2}}} . \left\{ \begin{aligned} & 1 + \left(1 - \frac{1}{4^{2}}\right)\left(\frac{2z}{1+zz}\right)^{2} + \left(1 - \frac{1}{4^{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{8^{2}}\right)\left(\frac{2z}{2+zz}\right)^{4} \\ & + \left(1 - \frac{1}{4^{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{8^{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{12^{2}}\right).\left(\frac{2z}{1+zz}\right)^{6} + \&c. \end{aligned} \right.$$

$$b_{1} = \frac{3z}{(1+zz)^{\frac{5}{2}}} . \left\{ \begin{aligned} & 1 + \left(1 + \frac{3}{4(3^{2}-1)}\right)\left(\frac{2z}{1+zz}\right)^{2} + \left(1 + \frac{3}{4(3^{2}-1)}\right)\left(1 + \frac{3}{4(5^{2}-1)}\right).\left(\frac{2z}{1+zz}\right)^{4} \\ & + \left(1 + \frac{3}{4(3^{2}-1)}\right)\left(1 + \frac{3}{4(5^{2}-1)}\right)\left(1 + \frac{3}{4(7^{2}-1)}\right)\left(\frac{2z}{1+zz}\right)^{6} + \&c. \end{aligned} \right.$$

Soit enfin i, le nombre des révolutions de p depuis l'époque donnée, il faudra faire i négatif, ſi l'on veut remonter aux temps antérieurs à cette époque. Cela poſé.

Table des Inégalités ſéculaires du mouvement de p, *produites par l'action de* p'.

Mouvement moyen de l'apogée ſuivant l'ordre des ſignes

$$\delta\mu' . i . 360^d . \left[\tfrac{1}{4} z b_1 - \frac{\frac{1}{2}\alpha e'}{\alpha e} . \text{coſ.}(L' - L) . \left\{ \begin{matrix} b_1 (1 + zz) \\ - 3 b z \end{matrix} \right\} \right]$$

Accroiſſement de l'équation du centre

$$\alpha e' . \delta\mu' . \text{ſin.}(L' - L) . i . 360^d \left[b_1 (1 + zz) - 3 b z \right].$$

Diminution de l'inclinaiſon de l'orbite ſur le plan fixe

$$\tfrac{1}{4} z b_1 . \alpha\gamma' . \text{ſin.}(\Gamma' - \Gamma) . \delta\mu' . i . 360^d.$$

Mouvement rétrograde du nœud ſur le plan fixe

$$\frac{z b_1}{4} . \delta\mu' . \left[1 - \frac{\alpha\gamma'}{\alpha\gamma} . \text{coſ.}(\Gamma' - \Gamma) \right] . i . 360^d.$$

Équation ſéculaire du moyen mouvement, nulle.

Il paroît donc conſtant que l'action réciproque des Planètes ne peut cauſer de variation remarquable dans leurs moyens mouvemens, au moins, aux quantités près de l'ordre $\alpha^2 \delta\mu'$; il pourroit arriver cependant qu'en pouſſant plus loin les approximations, on trouvât une équation ſéculaire; mais il y a tout lieu de croire qu'elle ſeroit inſenſible; car elle ne peut être, ainſi que je l'ai obſervé *art. 55*, que de l'ordre $\alpha^4 \delta\mu'$, c'eſt-à-dire, du même ordre que le produit de la quatrième puiſſance de l'excentricité de la Planète troublante par le rapport de ſa maſſe à celle du Soleil. Or, les quantités de l'ordre $\alpha^2 \delta\mu'$, étant déjà exceſſivement petites, il eſt très-probable que celles de l'ordre $\alpha^4 \delta\mu'$, ſont abſolument inſenſibles.

Les altérations obſervées dans le moyen mouvement de quelques-unes des Planètes, dépendent conſéquemment d'une autre cauſe que de leur action mutuelle. J'avoue que cette concluſion ſeroit moins certaine, ſi ces altérations ſuivoient une loi proportionnelle au quarré des temps, car cela indiqueroit ſûrement une cauſe toujours agiſſante; or, juſqu'à préſent nous n'en connoiſſons point d'autre que leur gravitation mutuelle; il ſeroit donc alors indiſpenſable de pouſſer

la précision jusqu'aux quantités de l'ordre α^4; mais avant que d'entreprendre un calcul aussi pénible par son excessive longueur, & dont on a si peu lieu d'attendre quelqu'équation sensible, il faudroit être bien assuré de l'existence d'une pareille variation; or, les observations sont bien éloignées de la démontrer, puisqu'elles indiquent à peine une altération dans les moyens mouvemens, sans qu'elles puissent même nous en faire connoître la véritable quantité.

L X.

Détermination des inégalités séculaires de la Terre.

Je vais présentement déterminer les inégalités séculaires de la Terre, inégalités qui malgré leur importance, n'ont point encore, ce me semble, été discutées avec exactitude. A la vérité, le célèbre M. Euler a cherché à les déterminer dans sa pièce sur les inégalités séculaires de la Terre, qui a remporté le Prix de l'Académie en 1756; mais 1.° cet Auteur n'a point eu égard à la variation séculaire de l'équation du centre; 2.° sa formule du mouvement moyen de l'apogée me paroît incomplète & diffère de celle trouvée précédemment, ce qui vient de ce qu'il a négligé les termes multipliés par l'excentricité de la Planète troublante, en conservant néanmoins ceux qui sont multipliés par l'excentricité de la Planète troublée; j'ai donc cru qu'il n'étoit pas inutile de discuter de nouveau ces objets, d'autant plus que le mouvement moyen de l'apogée du Soleil, qui paroît connu avec assez de précision, servira à déterminer la masse de Vénus, & par conséquent la diminution de l'obliquité de l'Écliptique résultante de l'action des Planètes.

Inégalités séculaires produites par l'action de Vénus.

Les Tables de M. Halley donnent $\frac{a'}{a} = z = 0{,}72333$; de-là j'ai conclu $b = 4{,}995814$, & $b_{,} = 8{,}871351$. Les mêmes Tables donnent pour le commencement de

1750, la longitude de l'aphélie de Vénus $= 10^s 7^d 18' 31''$, & suivant les Tables du Soleil de M. l'Abbé de la Caille, la longitude de l'apogée du Soleil à cette époque $= 3^s 8^d 38' 4''$. De-là on aura $V = 6^s 28^d 40' 27''$, on a de plus suivant M. Halley,

$$l.\alpha e' = \bar{3},8439549.$$

$$l.\alpha e = \bar{2},2253610.$$

Soit présentement $\delta\mu' = \frac{m_1}{100000}$, & i le nombre des révolutions de la Terre depuis l'époque donnée; cela posé, on aura

L'augmentation de la plus grande équation du centre . . . . $= - 0'',11601 . m_1 . i.$

Le mouvement direct de l'apogée . . . . $= 27'',103 . m_1 . i.$

pour déterminer maintenant le mouvement de l'orbite du Soleil, il faut la rapporter sur un plan fixe; or la position de ce plan étant arbitraire, je choisis celui qui au commencement de 1750 étoit incliné à l'écliptique de $1^d 30'$, & dont le nœud descendant se trouvoit à cette époque dans l'équinoxe du printemps; on aura ainsi pour cet instant

Longitude du nœud ascendant de l'orbite du Soleil sur le plan fixe . . . . $= 0^s 0^d 0' 0''.$

Inclinaison de l'orbite sur son plan fixe . . . . $=$ 1. 30.

Suivant les Tables de M. Halley, on a pour la même époque,

Longitude du nœud ascendant de Vénus sur l'éclipt. $= 2^s 14^d 23' 42''.$

Inclinaison de l'orbite de Vénus à l'Écliptique . . $=$ 3. 23. 20.

De-là j'ai conclu la longitude du nœud ascendant de Venus sur le plan fixe . . . . $=$ 53. 33. 50,

Et l'inclinaison de son orbite sur le plan fixe . . . $=$ 4. 3. 27,

Partant . . . . $I =$ 53. 33. 50,

ce qui donne la diminution de l'inclinaison de l'orbite du Soleil sur le plan fixe $= 1'',1865 . m_1 . i$, & le mouvement direct du nœud $= 12'',6594 . m_1 . i.$

L X I.

Inégalités séculaires produites par l'action de Jupiter.

Les Tables de M. Halley donnent $\frac{a'}{a} = z = 5,20098$;
d'où j'ai conclu $b = 0,0077351$, & $b_1 = 0,00440026$,
on a de plus suivant les mêmes Tables, $l.\alpha e' = \overline{2},6832078$
& la longitude de l'Aphélie de Jupiter au commencement de 1750
$= 6^s\ 10^d\ 33'\ 46''$;
ce qui donne, $V = 3^s\ 1^d\ 55'\ 42''$. D'ailleurs $\delta\mu' = \frac{1}{1067}$.
Cela posé, je trouve

l'augmentation de la plus grande équation du centre du Soleil $= 0'',16038.i$
le mouvement de son apogée .... $= 7'',10990.i$.

Les Tables de M. Halley, donnent encore

La longitude du nœud ascendant de Jupiter sur l'Écliptique, au commencement de 1750 .... $= 3^s\ 8^d\ 15'\ 49''$;
& l'inclinaison de son orbite à l'Écliptique.... $= 1^d\ 19'\ 10''$.

De-là j'ai conclu

Longitude du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter sur le plan fixe .... $= 44^d\ 54'\ 56''$;
& son inclinaison au plan fixe .... $= 1^d\ 51'$.

Partant, $I = 44^d\ 54'\ 56''$. Ce qui donne

La diminution de l'inclinaison de l'orbite du Soleil sur le plan fixe .... $= 0'',15849\ i$,
& le mouvement rétrograde du nœud........... $= 0'',8793\ i$.

La variation de l'équation du centre est proportionnelle à l'excentricité de la Planète troublante. Or, l'excentricité de Mercure étant fort considérable, il sembleroit nécessaire d'avoir égard à son action; mais la petitesse de sa masse & sa proximité du Soleil, rendent son effet presque insensible, comme je m'en suis assuré par le calcul. On peut encore négliger l'action de Mars, quoique son excentricité soit pareillement fort grande, de sorte que je puis me borner ici à ne considérer que l'action de Vénus & de Jupiter.

L'action réunie de Jupiter & de Vénus, produit dans l'équation du centre du Soleil, un accroissement égal à

$$i.0'',16038 - i.0'',11601.m_1$$

& dans son apogée, un mouvement égal à

$$i.27'',103.m_1 + i.7'',1099.$$

Il reste présentement à déterminer la quantité m_1. Le moyen le plus exact pour y parvenir, est de chercher par l'observation, le mouvement annuel de l'apogée du Soleil, & de l'égaler à celui que donne la Théorie. Ce mouvement paroît assez bien déterminé par l'observation, & les meilleurs Astronomes s'accordent à peu-près sur sa quantité. M. le Monnier la suppose dans ses Institutions, de 63 secondes par année, par rapport aux équinoxes; M. l'Abbé de la Caille, de $65''\frac{1}{2}$, & M. Mayer, dans ses nouvelles Tables, de 66 secondes. Je la supposerai avec M. l'Abbé de la Caille, de $65''\frac{1}{2}$; & en admettant avec cet Astronome, la précession moyenne des équinoxes, de $50''\frac{1}{3}$, je formerai l'équation suivante.

$$50'',3333 + 27'',103\, m_1 + 7'',1099 = 65'',5;$$

d'où je conclus $m_1 = 0,29727$, ce qui donne la masse de Vénus égale à $\frac{1}{336399}$, de celle du Soleil.

L'augmentation totale de l'équat. du centre du ☉ sera donc $= i.0'',12589$.
Le mouvement de son apogée . . . . $= i.15'',167$.
La diminution de l'inclinaison de l'orbite du Soleil
sur le plan fixe . . . . $= i.0'',51120$,
& le mouvement direct du nœud . . . . $= 2'',8838.i$.

On voit par ces formules, que l'équation du centre du Soleil n'est pas constante, & qu'elle va en augmentant de 13 secondes environ par siècle.

LXII.

Méthode pour déterminer la variation de l'obliquité de l'Écliptique.

Que *DAS* (*fig. 4.*) représente la position de l'Écliptique

pour une époque donnée; MAB, celle du plan fixe auquel je rapporte le mouvement de l'orbite de la Terre, & AN celle de l'Équateur. Je ſuppoſe maintenant qu'en vertu de la préceſſion des équinoxes, l'Équateur parvienne à un inſtant donné dans la ſituation MOR, & que par le mouvement des nœuds, l'Écliptique parvienne dans la ſituation BO. Cela poſé, je conçois que l'Écliptique BO prend la ſituation infiniment proche CR, & je fais $BO = v$, $BA = z$, & l'angle $ABO = \varphi$, φ étant très-petit. Soit de plus l'angle BOZ, ou l'angle formé par l'écliptique & l'équateur $= V$, on aura par les analogies différentielles de la Trigonométrie ſphérique :

1.° En ſuppoſant φ conſtant, & z variable,

$$\partial V = - \partial z \cdot \text{ſin.}\, v \cdot \text{ſin.}\, \varphi.$$

2.° En ſuppoſant z conſtant, & φ variable,

$$\partial V = \partial \varphi \; \text{coſ.}\, v.$$

Partant, en ſuppoſant φ & z variables à la fois,

$$\partial V = \partial \varphi \cdot \text{coſ.}\, v - \partial z \cdot \text{ſin.}\, v \cdot \text{ſin.}\, \varphi.$$

Ce ſeroit l'expreſſion de la variation de l'obliquité de l'Écliptique, ſi l'équateur étoit fixe dans la poſition MR; mais ſi je conçois qu'il prend la ſituation LH, & que durant ce mouvement l'inclinaiſon de l'Écliptique croiſſe de la quantité $\partial \alpha$, en ſorte que $BKH = BOR + \partial \alpha$, il eſt facile de voir que l'on aura $CHX = CRZ + \partial \alpha$.

Partant,

$$\partial V = \partial \alpha + \partial \varphi \cdot \text{coſ.}\, v - \partial z\, \text{ſin.}\, v \cdot \text{ſin.}\, \varphi,$$

& c'eſt l'expreſſion totale de la variation de l'obliquité de l'Écliptique.

On aura pareillement, 1.° en faiſant varier z ſeul, $\partial v = \frac{\partial z . \text{coſ.}\, RM . \text{ſin.}\, M}{\text{ſin.}\, V}$; or on a, ſin. M : ſin. v :: ſin. φ : ſin. RM. Partant, ſin. $M = \frac{\text{ſin.}\, v\, \text{ſin.}\, \varphi}{\text{ſin.}\, RM}$, & $\partial v = \frac{\partial z, \varphi . \text{ſin.}\, v . \text{cot.}\, RM}{\text{ſin.}\, V}$.

Si du point R on abaiſſe ſur CM l'arc perpendiculaire RF, on aura dans le triangle ſphérique rectangle CRF, $1 : \text{coſ.}\, v :: \text{tang.}\, \varphi : \text{cot.}\, CRF$. Partant, $\frac{\text{coſ.}\, CRF}{\text{ſin.}\, CRF} = \varphi \,.\, \text{coſ.}\, v$, φ étant toujours ſuppoſé très-petit ; on a donc

$$1 - (\text{ſin.}\, CRF)^2 = \varphi^2 \,.\, \text{coſ.}\, v^2 \,.\, (\text{ſin.}\, CRF)^2,$$

ce qui donne $\text{ſin.}\, CRF = 1 - \frac{1}{2}\, \varphi^2 \,.\, \text{coſ.}\, v^2$. Soit $CRF = 90^d - \gamma$, on aura $\text{ſin.}\, CRF = 1 - \frac{\gamma\gamma}{2}$. Donc, $\gamma = \varphi \,.\, \text{coſ.}\, v$. Partant, $MRF = 90^d + \gamma - V$; or on a, $\text{coſ.}\, CRF : \text{coſ.}\, MRF :: \text{cot.}\, v : \text{cot.}\, RM$, ou, $\varphi \,.\, \text{coſ.}\, v : \text{ſin.}\, (V - \varphi\, \text{coſ.}\, v) :: \text{cot.}\, v : \text{cot.}\, RM$. Partant,

$$\text{cot.}\, RM = \frac{\text{cot.}\, v \,.\, \text{ſin.}\, (V - \varphi\, \text{coſ.}\, v)}{\varphi\, \text{coſ.}\, v},$$

Donc,

$$\partial v = \frac{\partial z \,.\, \text{ſin.}\, (V - \varphi\, \text{coſ.}\, v)}{\text{ſin.}\, V} = \partial z - \varphi \partial z \,.\, \text{coſ.}\, v \,.\, \text{cot.}\, V.$$

2.° Si l'on fait varier l'angle B, on a $\partial v = - \frac{\partial \varphi \,.\, \text{ſin.}\, v}{\text{tang.}\, V}$.

Donc,

$$\partial v = \partial z - \frac{(\varphi \partial z \,.\, \text{coſ.}\, v + \partial \varphi \,.\, \text{ſin.}\, v)}{\text{tang.}\, V}.$$

LXIII.

Je ſuppoſe que l'on veuille déterminer la poſition de l'équinoxe pour un inſtant donné ; pour cela je le rapporte, au plan fixe, en abaiſſant des points O & H les arcs OK' & HV perpendiculaires ſur AM. On aura très-ſenſiblement $BK' = BO$, & $CH = CV$; mais ſi l'on fait $HR = \partial \chi$, $\partial \chi$ repréſentant le mouvement inſtantané des équinoxes produit par l'action du Soleil & de la Lune, on aura

$$VK' = VF - FK' = \partial \chi - \frac{(\varphi \partial z \,.\, \text{coſ.}\, v + \partial \varphi\, \text{ſin.}\, v)}{\text{tang.}\, V};$$

ce ſera le mouvement inſtantané en longitude du point de l'équinoxe rapporté au plan fixe.

La latitude du point de l'équinoxe sera, φ sin. v; on aura donc ainsi sa position dans l'espace; l'augmentation différentielle de l'obliquité de l'Écliptique sera

$$\partial V = \partial \alpha + \partial \varphi . \text{cos}. v - \partial \zeta . \text{sin}. v . \text{sin}. \varphi.$$

Pour avoir cette augmentation pour un temps quelconque, il faudroit intégrer les équations

$$\partial v = \partial \chi + \partial \zeta - \frac{(\partial \varphi . \text{sin}. v + \varphi \partial \zeta \text{cos}. v)}{\text{tang}. V},$$

$\partial V = \partial \alpha + \partial \varphi . \text{cos}. v - \partial \zeta . \text{sin}. v . \text{sin}. \varphi$; & si l'on vouloit remonter à des temps éloignés, comme le siècle d'Hipparque, il paroîtroit nécessaire de faire attention dans les expressions de φ & de ζ, aux inégalités proportionnelles au quarré du temps; ce calcul est très-facile, d'après ce que j'ai dit précédemment; mais comme les observations anciennes sont trop peu exactes pour y comparer les résultats du calcul, je me contenterai de déterminer la variation de l'obliquité de l'Écliptique qui a lieu pour ce siècle-ci.

Je puis m'en tenir alors à l'expression différentielle, sans recourir à l'intégration. Je suppose donc que ∂V représente la variation de l'obliquité de l'Écliptique depuis 1750 jusqu'en 1850; au commencement de 1750, on a $\text{cos}. v = 1$, $\text{sin}. v = 0$, de plus, $\partial \varphi = -0'',51120 . i$; & puisqu'il s'agit d'avoir $\partial \varphi$ durant l'espace d'un siècle, il faut faire $i = 100$, ce qui donne $\partial \varphi = -51'',120$. D'ailleurs, je ne ferai ici aucune attention à $\partial \alpha$, qui, comme l'on sait, ne renferme que des quantités périodiques; on aura donc . . . .
$\partial V = -51'',120$; c'est la diminution séculaire actuelle de l'obliquité de l'Écliptique.

Cette diminution est une suite nécessaire des attractions des Planètes, en admettant le mouvement annuel de l'apogée du Soleil, de $65'' \frac{1}{2}$, par rapport aux équinoxes, ce qui paroît assez bien constaté par les observations. Si donc les observations célestes donnoient l'obliquité de l'Écliptique constante ou à peu-près constante, cela indiqueroit sûrement

l'action de quelques causes étrangères; & pour expliquer cette constance, il faudroit recourir aux attractions des Comètes dont l'effet a pu détruire au moins en grande partie, celui des Planètes. En effet, les orbites des Comètes étant fort inclinées à l'Écliptique, il peut arriver que leur action, quoique passagère, fasse équilibre avec l'action permanente des Planètes. Mais une pareille supposition est trop peu vraisemblable pour l'admettre. On doit donc regarder la diminution de l'obliquité de l'Écliptique comme aussi certaine que tous les autres phénomènes célestes, puisqu'elle dépend de la même cause. Les observations anciennes & modernes paroissent même l'indiquer, quoiqu'elles soient encore insuffisantes pour fixer sa valeur. Cette découverte est ainsi réservée aux siècles à venir; mais comme il semble, par le peu de différence qui règne entre les résultats des Astronomes, que le véritable mouvement de l'apogée du Soleil sera plutôt connu par les observations, que la diminution de l'obliquité de l'Écliptique, les calculs précédens qui donnent l'un de ces phénomènes au moyen de l'autre, serviront à accélérer cette découverte.

LXIV.

*Addition à l'*article XLVIII.

J'ai dit, *article XLVIII,* que malgré l'incertitude qui paroît résulter des Recherches de M. de la Grange, sur l'Équation séculaire de la Lune, elle étoit cependant vraisemblable; ayant examiné depuis, avec plus d'attention, les calculs de cet illustre Géomètre, il m'a paru que loin d'être contraires à l'accélération du moyen mouvement de cet astre, ils lui sont favorables; c'est ce que je me propose de faire voir ici. Pour cela, je suppose que l'on ait sous les yeux l'excellente pièce de M. de la Grange, qui a remporté le Prix de l'Académie pour l'année 1774, & qui est imprimée dans ce Volume. J'en extrais la Table suivante. *(Page 56 de cette Pièce.)*

DATE des ÉCLIPSES observées.	ERREURS des Tables DE MAYER avec l'équat. séculaire.	ERREURS des Tables DE MAYER sans l'équat. séculaire.
720 avant J. C.	− 24′ 55″	− 23′ 30″
382.	− 26.	− 11. 30.
200.	− 17.	− 1. 15.
364 après J. C.	− 12. 40.	+ 12. 12.
977.	− 1. 22.	+ 20. 42.
978.	+ 0. 18.	+ 16. 35.

J'obſerverai relativement à cette Table, 1.° que les Calculs où l'on a rejeté l'équation ſéculaire de M. Mayer, ont été faits en rétabliſſant le mouvement moyen ſéculaire de M. Caſſini, lequel eſt de 3′ 42″ moindre que celui de M. Mayer; 2.° que M. de la Grange, conformément à une remarque que M. de la Lande a faite dans ſon Mémoire ſur les équations ſeculaires *(Mémoires de l'Académie, année 1757)*, fixe l'inſtant de l'Éclipſe de 720 avant J. C. 47 minutes plus tôt que M.^{rs} Caſſini & Mayer. Or, ces deux Aſtronomes s'étant appuyés ſur cette obſervation pour déterminer le moyen mouvement de la Lune, il paroît naturel de ſe ſervir 1.° du moyen mouvement ſéculaire que M. Caſſini auroit trouvé en faiſant uſage de la remarque de M. de la Lande; 2.° du mouvement & de l'équation ſéculaire que M. Mayer en auroit tirée. Or, M. de la Grange trouve que le moyen mouvement ſéculaire de la Lune de M. Mayer, en eſt augmenté de 25″, & l'équation ſéculaire de $3'' \frac{1}{2}$. D'ailleurs, le moyen mouvement ſéculaire de M. Caſſini, en doit être diminué de 58″. Il faudroit donc corriger d'après ces nouveaux

élémens, la Table de M. de la Grange; mais j'obſerve que rien n'oblige de ſuppoſer exactement nulle l'erreur de l'obſervation de l'année 720 avant J. C. J'ai donc préféré de n'augmenter le moyen mouvement de Mayer que de 15″, en augmentant ſon équation ſéculaire de 3″ $\frac{1}{2}$, parce que bien qu'il en réſulte une erreur pour l'obſervation de 720 avant J. C. cependant, celles de toutes les autres obſervations ſont par-là beaucoup diminuées. Je dois obſerver encore que j'ai négligé les petites variations qui doivent réſulter de ces changemens dans les équations de la Lune; ſur cela *(voyez la Pièce de M. de la Grange, page 59).* Voici préſentement la Table de cet illuſtre Géomètre corrigée.

DATE des ÉCLIPSES obſervées.	ERREURS des Tables DE MAYER avec l'équat. ſéculaire.	ERREURS des Tables DE MAYER ſans l'équat. ſéculaire.
720 avant J. C.	+ 3′ 12″	0′ 0″
382.	− 5. 55.	+ 8. 38.
200.	− 0. 41.	+ 17. 7.
364 après J. C.	− 5. 36.	+ 25. 7.
997.	− 0. 7.	+ 27. 42.
978.	+ 1. 32.	+ 23. 35.

On voit ainſi, que les Tables de Mayer, en y faiſant les corrections que nous venons d'indiquer, repréſentent avec l'équation ſéculaire, les anciennes obſervations auſſi bien qu'il eſt poſſible, vu le peu d'exactitude de ces obſervations; tandis que ſans l'équation ſéculaire, elles donnent des erreurs beaucoup au-deſſus de celles que l'on peut ſuppoſer à ces mêmes obſervations. On pourroit, à la vérité, diminuer un

peu ces erreurs, en changeant le moyen mouvement de M. Caſſini ; mais quelque combinaiſon que l'on faſſe, on aura toujours une erreur de plus de 20′ ſur quelques-unes de ces Éclipſes.

D'ailleurs, ſuivant M. de la Grange *(page 56)*, ſi l'on veut calculer les éclipſes précédentes ſans l'équation ſéculaire, on doit rétabir le moyen mouvement de M. Caſſini ; ſi cela eſt, il faut pareillement l'adopter pour les Éclipſes modernes. Cependant, ce ſavant Auteur trouve *(page 60)* en comparant aux Tables de Mayer quelques Éclipſes obſervées dans les quatorzième & quinzième ſiècles, que le moyen mouvement paroît bien établi par Mayer ; & il propoſe en conſéquence de le conſerver en ſupprimant l'équation ſéculaire ; or ſi l'on calcule dans cette ſuppoſition, les Éclipſes anciennes de la Table précédente, on trouvera des erreurs énormes. Il paroît donc impoſſible de faire quadrer avec un moyen mouvement conſtant, les obſervations anciennes & modernes ; & partant il ſemble néceſſaire d'admettre une équation ſéculaire à très-peu-près proportionnelle au quarré du temps.

DEUXIÈME

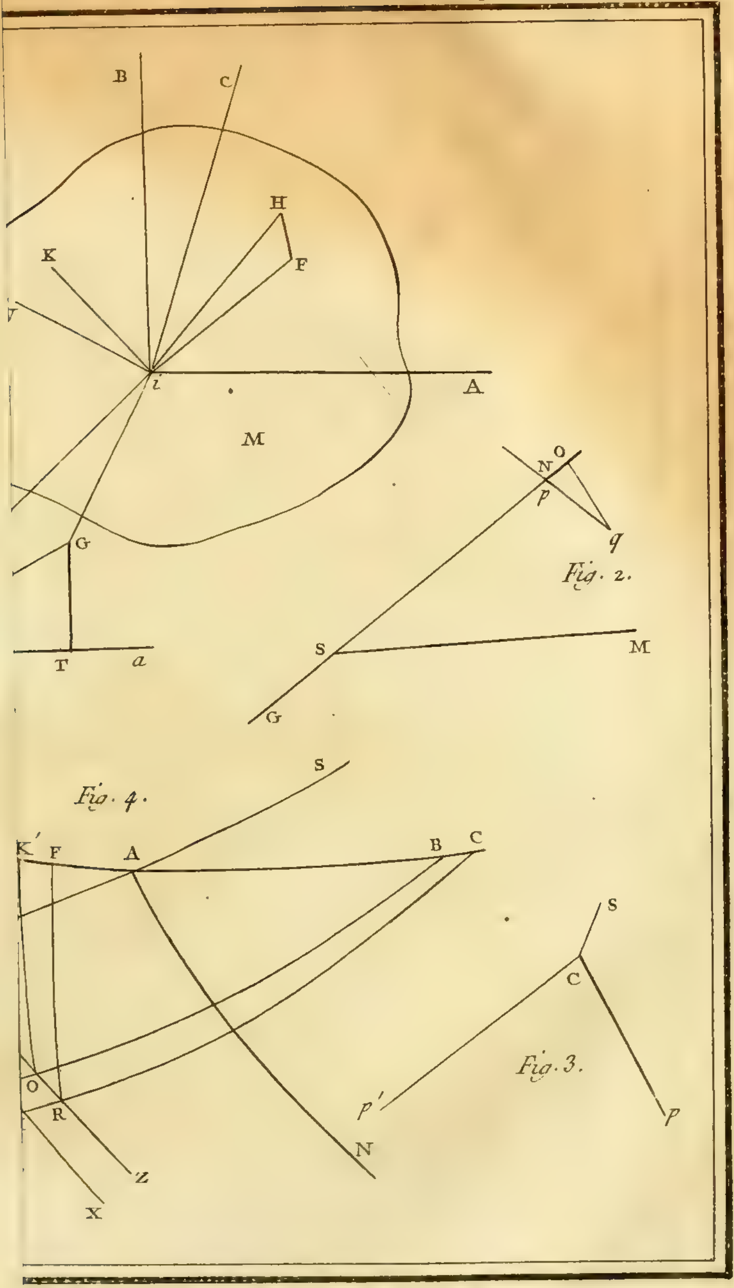
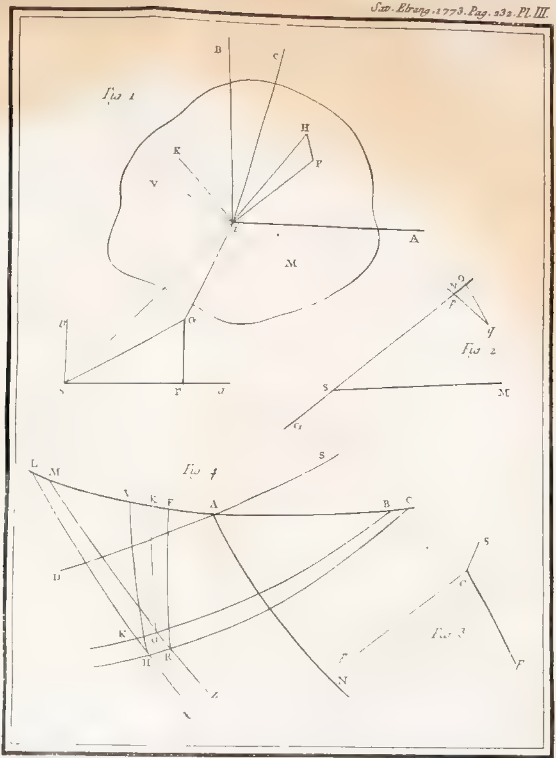


Fig. 2.

Fig. 4.

Fig. 3.



DEUXIÈME MÉMOIRE, POUR SERVIR À L'HISTOIRE ANATOMIQUE DES POISSONS.

Par M. VICQ-D'AZIR.

NOUS avons divisé les Poissons en cartilagineux, en Poissons ronds & longs, ou anguilliformes & en épineux. Déjà nous avons parcouru le premier ordre dans un premier Mémoire: il nous reste maintenant à faire quelques Observations sur le second & sur le troisième: pour suivre la méthode la plus naturelle, nous devons commencer par les individus, dont l'organisation approche le plus de celle de l'homme, des quadrupèdes & des oiseaux. Les Poissons anguilliformes seront, par cette raison, ceux dont nous developperons en premier lieu, la structure *(a)*.

(a) Lorsque des circonstances particulières me mirent à portée de commencer ce travail, je fus embarrassé sur le choix des moyens. Je savois que la méthode est ce dont les Sciences ont le plus de besoin, & que c'est à son défaut que l'on doit attribuer tant de veilles inutiles. Ces réflexions augmentèrent singulièrement mon incertitude, & je restai long-temps indécis sans savoir par où je devois commencer. Quelque parti que je prisse, il étoit indispensable de lire avec attention, tout ce que l'on a écrit sur l'anatomie des poissons. Je commençai donc par faire l'extrait de ces différens ouvrages; & si on en excepte les observations de M.rs Duverney & de la Hire, qui ne sont point encore imprimées, & le Mémoire de M. Camper, sur l'ouïe des Poissons, qui devoit alors faire partie du VI.e volume des Savans étrangers, il n'y en a peut-être aucun que je n'aie consulté dans ce temps. Je crus même apercevoir un défaut de méthode en les parcourant. Aucun, en effet, n'a fixé ses idées avant de prendre le scalpel; il semble qu'ils ne se soient proposé aucun but, & qu'ils n'aient formé aucun plan. Presque toutes leurs descriptions sont telles, qu'elles ne sont point susceptibles d'une mesure commune, & qu'on ne peut les comparer ensemble. Cette faute une fois aperçue, je devois l'éviter. Avant donc de me livrer aux détails minutieux que la structure délicate de

ORDRE SECOND.

Poissons longs & ronds, ou anguilliformes.

Nous considérerons dans cet ordre comme dans le précédent, les os, les muscles & les viscères.

Squelette des poissons anguilliformes.

Le squelette des poissons longs & ronds, est composé de la tête, de l'épine & des côtes.

---

quelques organes exige, il falloit prendre une idée générale & précise de l'Anatomie des poissons. J'ai, pour cet effet, cherché dans leur économie, des rapports & des différences suffisantes pour établir des divisions, afin que chaque description que je ferai dans la suite, trouve facilement sa place, & que chaque fait devienne utile. Tel est le plan que j'ai formé & d'après lequel, dans ces deux premiers Mémoires, j'ai dû plutôt ébaucher l'histoire générale & anatomique des poissons, que faire une description suivie des genres, des espèces & des organes qui leur sont propres. Il étoit donc inutile que j'insistasse sur les descriptions très-détaillées que plusieurs Anatomistes ont faites de quelques-uns de leurs viscères. Les travaux *de Willis, de Stenon, de Ray, de Klein, de Willulgby, de Swammerdam, de Duverney, de Collins, de Petit, de M. Geoffroy, de M. de Haller,* & tout nouvellement, *de M. Duhamel,* sont donc autant de connoissances acquises, sur lesquelles on ne doit revenir que lorsque l'on y découvrira quelques fautes, ou lorsque nous serons assez avancés pour entreprendre une histoire complète des poissons. Cet Ouvrage qui sera celui de nos Neveux, est sans doute d'une assez grande importance, pour mériter, dès-à-présent, tout le zèle des Physiciens; & je me propose de faire, pour y contribuer, tous les efforts dont je suis capable. Mais on doit sur-tout beaucoup attendre de M. Camper, dont je connois depuis peu l'excellent Mémoire. Cet Anatomiste célèbre a développé la structure de l'organe de l'ouïe & du cerveau des cartilagineux plats, & de quelques poissons épineux arrondis. Les cartilagineux longs & ronds sont, dit-il, trop précieux en Hollande, pour qu'on les emploie à la dissection. Il ne dit rien non plus des anguilliformes, ni des épineux plats que je décris assez au long. Depuis que M.rs les Secrétaires ont bien voulu me communiquer sa dissertation, & M. Tenon, ses dessins, j'ai été curieux d'admirer dans le brochet & dans la raye, la structure du cerveau & de l'organe de l'ouïe, telle que l'auteur l'expose; je ferai, à ce sujet, quelques remarques dans la suite de ce Mémoire. Je dois encore observer que, me trouvant dans une ville de province, où il n'y avoit aucun Artiste capable de me seconder dans mon travail, j'ai été obligé de faire moi-même la plupart de mes dessins; ce qui fait que je les regarde moins comme ayant le mérite de l'exactitude, que comme propres à faciliter l'intelligence des descriptions.

1.° La tête peut être divisée en crâne & en mâchoire. Le crâne n'est formé que d'une seule pièce: en dessus il est surmonté par une crête légèrement exprimée; le dessous est convexe & devient plus étroit, en arrière, auprès de la première vertèbre; antérieurement il s'élargit & s'articule avec un os aplati, creusé en gouttière, & qui tient la place du vomer. L'intérieur du crâne est triangulaire, plus étroit en devant, & ressemble d'ailleurs assez à celui des cartilagineux; il faut seulement observer que la fosse pituitaire est plus petite, & les fosses cérébrales plus excavées. De plus, on trouve dans ces fosses les deux osselets dont M. Camper a déterminé la véritable situation dans les épineux, & que Klein regardoit comme appartenant à l'organe de l'ouïe. Sur les côtés du crâne, on remarque deux os plats, situés obliquement en forme d'ailes, qui se terminent par un prolongement uniforme entre les branches de la mâchoire supérieure, & semblent lui tenir lieu de pommette. *Voyez pl. I, fig. 1.*

La mâchoire supérieure est formée de trois pièces; l'une est moyenne, creusée longitudinalement pour le passage des nerfs de la première paire, & remarquable par deux cavités de chaque côté, dont la première est antérieure & nasale, & la seconde est postérieure & orbitaire: les deux autres pièces sont situées sur le côté, elles se portent obliquement vers les branches de la mâchoire inférieure, & sont unies avec elle par le moyen d'un ligament dans la commissure.

La mâchoire inférieure est, comme la supérieure, terminée en pointe, creusée intérieurement par un conduit, armée de petites dents pyramidales très-acérées, & articulée par le moyen d'un petit condile court & aplati avec les côtés de la base du crâne. Il faut observer de plus, que dans l'angle que font entr'elles les deux mâchoires, il se trouve un petit os long & arrondi qui est placé obliquement, qui remonte en arrière sur les côtés du crâne, où il soutient les mâchoires dans leur action. *Voyez pl. I, fig. 1.*

L'os hyoïde est semi-circulaire & assez large; il soutient dans son milieu la base de la langue, & s'articule postérieurement

rement au-deſſous de cet os qui eſt placé en forme d'aiſes ſur les côtés de la baſe du crâne. Les opercules ſont dans ces Poiſſons, formés par de petits os arrondis, figurés comme une petite côte, élargis à leur extrémité, & articulés avec l'os hyoïde dont ils paroiſſent être un épanouiſſement. *Voyez pl. I, fig. 2.*

Les os de l'épine reſſemblent à ceux des reptiles ; les côtes ſont légèrement recourbées, pointues en devant, rangées des deux côtés de l'abdomen, & articulées avec le corps de chaque vertèbre : cette conformation eſt la même dans la vipère.

Ces obſervations nous font voir combien eſt grande l'analogie de la tête des Poiſſons anguilliformes, avec celle des oiſeaux dont les mâchoires ſont diſpoſées preſque de la même façon ; les petites côtes des opercules reſſemblent aſſez bien aux extrémités poſtérieures & recourbées de l'os hyoïde des oiſeaux, qui, à la vérité, eſt beaucoup plus ſimple. D'un autre côté, ſi on lit la deſcription de la vipère, faite par Charas, & qu'on la compare avec la deſcription que nous venons de faire du ſquelette des anguilliformes, on y trouvera des rapports encore plus marqués ; ce que l'on n'obſerve point dans les épineux.

Muſcles des Poiſſons anguilliformes.

Les muſcles des poiſſons anguilliformes ſont moins nombreux que ceux des cartilagineux, & ils le ſont plus que ceux des poiſſons épineux : ils n'ont été décrits par aucun Anatomiſte ; les plus remarquables ſont 1.° deux muſcles placés entre les branches de la mâchoire inférieure, & qui répondent au milo-hyoïdien ; ils vont à la baſe de la langue qu'ils relèvent en la portant en devant. 2.° Deux très-gros crotaphites qui font une boſſe ſur les côtés du crâne, ils s'inſèrent à l'arcade zygomatique, & ſont compoſés d'un nombre prodigieux de faiſceaux bien diſtincts ; l'angle de la mâchoire qu'ils relèvent fortement, en eſt recouvert : dans

les oiſeaux, la ſtructure eſt la même, avec cette ſeule différence que leur crotaphite n'eſt pas auſſi exprimé. 3.° Un gros muſcle placé ſur chaque branche de l'os hyoïde, ce muſcle s'insère au crâne; il relève la langue & la tend avec beaucoup de force. 4.° Pluſieurs petits muſcles qui vont d'un cercle des ouïes à l'autre, & qui peuvent les rapprocher. 5.° Les muſcles abdominaux qui s'étendent depuis l'anus juſques à la partie moyenne de l'os hyoïde, & qui, en ſe contractant, ouvrent les angles des ouïes, tirent la langue en arrière, & compriment les viſcères: ces muſcles ſont ſéparés par un raphé. 6.° Trois autres couches muſculeuſes placées auprès de l'épine, dont une qui eſt la plus voiſine, peut s'appeler *ſpinale*, la ſeconde portera le nom de *moyenne*, & celui de *latérale* ſera réſervé pour la troiſième. Cette dernière touche dans une grande étendue les muſcles abdominaux, au-deſſous deſquels celle du côté gauche ſe réunit à celle du côté droit, & n'en eſt ſéparée que par une ligne blanche juſqu'à l'extrémité de la queue. La coupe perpendiculaire des muſcles latéraux préſente des ovales concentriques, entre leſquels ſupérieurement ſont placées les couches ſpinales & moyennes. Cette conformation eſt à peu-près la même dans les reptiles, & les muſcles de la tête reſſemblent à ceux des oiſeaux. *Voyez les fig. 4 & 7, pl. I.*

Viſcères des Poiſſons anguilliformes.

1.° Le cerveau eſt étroit & alongé; on y diſtingue deux faces, l'une ſupérieure & l'autre inférieure: la face ſupérieure eſt remarquable par ſix lobes, dont deux ſont impairs & les deux autres pairs; le lobe antérieur eſt ovale, fort mince & ſéparé en deux par un raphé longitudinal, il donne naiſſance aux nerfs de la première paire, qui ſe portent l'un à côté de l'autre dans le canal de la mâchoire ſupérieure, juſques aux trous des narines: ces nerfs ſont pulpeux, plus alongés & moins gros que dans les cartilagineux; les quatre lobes moyens ſont pairs, & irrégulièrement quadrangulaires; le lobe poſtérieur eſt arrondi, détaché de la moelle épinière,

& tient lieu de cervelet ; la face inférieure, outre les lobes que j'ai déjà décrits, en présente un impair, situé dans le milieu qui est le plus profond de tous, & placé au-dessus des osselets de l'ouïe ; tout-à-fait en arrière, & au-dessous du cervelet, se trouve la moelle alongée & une espèce de pont de varole ; les nerfs optiques naissent de la partie antérieure des lobes pairs & postérieurs qui sont de vraies couches optiques : ces nerfs se rapprochent & se distribuent ensuite à l'œil après avoir passé sous la première paire, deux rameaux nerveux prennent aussi naissance de ces mêmes lobes, & se distribuent aux accessoires de l'œil ; quatre autres nerfs naissent de chaque côté de la moelle alongée, au-dessous du cervelet ; deux sont antérieurs & vont au palais, à l'œsophage, aux ouïes & au cœur : deux sont postérieurs & moins gros que les premiers, ils se réunissent & passent par un trou à côté de la première vertèbre, pour se distribuer aux couches musculeuses & à la peau.

En écartant les deux lobes pairs & postérieurs, on aperçoit un ventricule étroit & très-alongé, qui s'étend au-dessous du cervelet ; les éminences qui dans l'homme soutiennent la glande pinéale, sont à peine sensibles, & cette dernière m'a paru manquer absolument ; l'entonnoir y est au contraire très-exprimé. M. Camper qui n'a point décrit le cerveau des anguilliformes, a aussi rencontré *l'infundibulum* dans celui des épineux, & l'on ne sauroit douter que les usages de cette partie ne soient très-importans, puisqu'on la retrouve dans presque toute l'étendue du règne animal.

Des deux côtés de la moelle alongée, & au-dessus des osselets du crâne, on observe trois canaux demi-circulaires aqueux, renfermés dans une membrane qui se termine à une petite éminence figurée comme une tête : cet appareil est à peu-près semblable à celui des cartilagineux, avec cette différence que ces derniers ont l'organe de l'ouïe renfermée dans une cellule osseuse derrière l'orbite. Je ne doute pas qu'en suivant cette dissection avec plus de soin, l'on n'y retrouve la bourse élastique que M. Camper a observée

dans les épineux : c'eſt ce que je me propoſe d'examiner dans la ſuite de mes travaux.

2.° La poitrine de ces poiſſons eſt beaucoup plus étroite que celle des cartilagineux, elle eſt également triangulaire, & placée entre les branches des ouïes ; après l'avoir ouverte on remarque une veſſie qui paroît flaſque & oblongue, c'eſt le péricarde. Il faut ſe rappeler que les cartilagineux n'en ont point ; ce qui met entr'eux & les anguilliformes une très-grande différence : l'inciſion de cette veſſie permet au fluide qui la remplit de s'échapper, & laiſſe apercevoir le cœur. Sa forme & ſes appartenances ſont encore bien différentes de ce qu'elles ſont dans les cartilagineux ; 1.° le cœur eſt triangulaire, mais de telle ſorte que ſon grand bord eſt à gauche, & qu'en haut & en bas la pointe eſt fort mouſſe. Dans quelques eſpèces d'anguilles, il reſſemble à un loſange alongé & recourbé ſur les côtés avec une ligne ſaillante au milieu, & une baſe taillée obliquement de haut en bas, & de devant en arrière ; 2.° l'artère qui ſort de la pointe ſupérieure de cet organe eſt remarquable par un renflement en larmes de Job, dont la baſe touche la pointe du cœur : ce renflement charnu ſemble être un cœur ſecondaire, deſtiné à augmenter la force du fluide qui circule. Il faut ſe ſouvenir que dans les cartilagineux, cette appendice n'eſt qu'un renflement cylindrique qui imite la figure de l'artère ; 3.° vers la gauche & plus bas, on trouve un ſinus ou golfe veineux très-conſidérable, irrégulièrement cubique, & dont la figure varie d'ailleurs relativement à ſon degré de plénitude : le ſang qui le remplit eſt toujours noir & caillé ; ce qui eſt bien différent dans les cartilagineux dont le ſang eſt toujours très-rouge & très-fluide, & chez leſquels la figure de l'oreillette eſt bulleuſe & cordiforme. *Voyez les fig. 5 & 6, planche I.*

3.° Le bas-ventre renferme le foie, la véſicule du fiel, l'eſtomac, les inteſtins, la rate, la veſſie aërienne & les rubans ou cordons ſexuels ; le foie n'eſt guère diviſible en pluſieurs lobes, il eſt moins étendu ſur les côtés que dans les cartilagineux ; les vaiſſeaux adhèrent peu à ſon parenchime,

& ſont très-faciles à ſuivre dans leurs ramifications ; le conduit hépatique ſe porte vers l'inteſtin, & le perce obliquement au-deſſous du pilore ; la véſicule du fiel eſt arrondie & détachée du foie, ce qui établit une nouvelle analogie entre ces Poiſſons & les reptiles ; elle renferme une liqueur ſemblable à l'huile d'olive, & le conduit ciſtique ſe porte juſque dans l'épaiſſeur des membranes, avant de ſe confondre avec l'hépatique *(b)*. Dans les cartilagineux, ils s'uniſſent plus tôt enſemble ; le foie eſt diviſé en pluſieurs lobes, & la véſicule du fiel eſt logée dans la ſubſtance même de ce viſcère. La rate, dans les anguilliformes, eſt petite, arrondie & placée à l'oppoſite de la véſicule du fiel, dans la courbure que fait l'inteſtin en s'abouchant avec l'eſtomac. Ce dernier eſt ſitué perpendiculairement ; ſon ouverture ſupérieure eſt très-large : inférieurement il s'arrondit, & occupe en longueur le tiers ſupérieur de l'abdomen ; l'inteſtin naît près de l'orifice ſupérieur, & laiſſe une portion conſidérable de l'eſtomac au-deſſous de ſon embouchure, qui forme une eſpèce de *cæcum*. Le congre nous fournit un exemple de cette conformation ; dans les anguilles on obſerve quelques différences, leur eſtomac eſt également perpendiculaire, mais il eſt arrondi en haut comme en bas ; & l'œſophage, en s'ouvrant dans la cavité, en laiſſe une portion au-deſſus, comme l'inteſtin en laiſſe une au-deſſous ; ce dernier eſt ouvert plus haut que l'œſophage : le pilore eſt dur & étroit, mais ſans appendice ; l'inteſtin s'élargit au-deſſous, & paroît comme ondé le long de la veſſie aërienne ; enfin, il ſe porte perpendiculairement vers l'anus. Nous avons à peu-près rencontré la même ſtructure dans les cartilagineux plats, avec cette différence que leur eſtomac a une grande & une petite courbure comme celui des quadrupèdes. *Voyez la planche I, figures 8 & 10.*

Les poiſſons anguilliformes ont une veſſie aërienne double,

(b) Je ne ſuis pas encore pleinement convaincu qu'il s'y confonde ; même il me reſte là-deſſus des doutes que je me propoſe de lever le plus tôt qu'il me ſera poſſible.

avec

avec des glandes dans l'endroit où les deux vessies se joignent, & un conduit qui s'ouvre d'un côté vers le haut de l'estomac, & qui de l'autre se glisse entre les membranes de la vessie aërienne antérieure, qui lui servent comme de valvules : cet organe qui se rencontre simple dans un grand nombre de Poissons épineux, a été décrit très-soigneusement par plusieurs Naturalistes, entr'autres par Needham; il n'y a rien à ajouter à ce qu'il a dit de sa forme, de sa situation & de sa structure; mais nous ne croyons pas que l'idée qu'il donne de son mécanisme soit également heureuse. Cet Auteur, après avoir discuté les différentes opinions des Physiciens, établit que l'air se sépare du sang, & passe sous la forme de vapeurs dans la vessie natatoire, il ajoute que cet air passe ensuite de la vessie dans l'estomac, pour y réveiller la fermentation & accélérer la digestion des alimens. Ce sentiment adopté par un grand nombre de Physiciens, peut être combattu par les raisons suivantes; 1.° les membranes ligamenteuses qui forment la vessie aërienne, ne sont nullement disposées de manière à faire une secrétion de quelque nature qu'elle puisse être, si ce n'est peut-être celle de quelques vapeurs aqueuses; 2.° quand on supposeroit la secrétion possible, l'air ne pourroit refluer dans l'estomac, puisque les membranes entre lesquelles le conduit est logé, s'y opposent absolument, de la même manière que la bile ne peut refluer par son conduit, lorsqu'elle a été versée dans l'intestin; on peut même appeler l'expérience à l'appui de nos réflexions. En effet, il est impossible de faire refluer le fluide contenu dans la vessie aërienne par aucun conduit, quelque pression que l'on exerce. Il est donc probable qu'il ne se fait aucune secrétion dans cet organe, & il est bien démontré qu'il ne passe aucun fluide de la vessie aërienne dans les voies alimentaires. Comment donc se remplit-elle? il faut se rappeler que son conduit s'ouvre à la partie supérieure de l'estomac dans presque tous les Poissons, excepté l'*alose* dans laquelle Needham l'a vu s'ouvrir au fond du ventricule. On observera de plus que les Poissons sont très-voraces, que la plupart vivent de crustacées, ou d'autres Poissons; que

les corps marins contiennent beaucoup d'air; que cet air se dégage dans la digestion, qu'il dilate l'estomac, qu'il doit s'étendre sur-tout en haut & en devant où il trouve moins de résistance; & qu'en supposant le poisson plongé dans l'eau, cet air rencontre de nouveaux obstacles dans ce fluide, qui s'oppose à sa sortie, & qui, lorsqu'il cède à la pression, le laisse échapper sous la forme de bulles. Ne seroit-il pas possible que cet air chargé des vapeurs alimentaires les plus subtiles, entrât dans la vessie natatoire par le conduit qui s'ouvre au haut de l'estomac? & ne pourroit-on pas croire que cet air combiné avec des parties aqueuses, est absorbé & passe dans le système vasculaire du Poisson, de la même manière que l'air dégagé des alimens & combiné de nouveau dans l'intestin, est absorbé par les pores lactés, & circule dans les vaisseaux chyleux? Suivant ces vues, la vessie natatoire ne seroit qu'un estomac secondaire destiné à recevoir les vapeurs les plus subtiles des alimens, à les transmettre dans l'organe cellulaire par le moyen des pores absorbans, & à soutenir en même temps le Poisson dans le milieu qu'il habite. Gesner n'étoit donc pas si loin de la vérité, lorsqu'il comparoit les Poissons qui ont une vessie natatoire aux animaux ruminans. Il suit de-là que l'air renfermé dans cette vessie n'est point inné comme l'a cru Severinus: il est d'ailleurs facile de prouver que cet air n'est point pur & dégagé de parties grossières; en brisant une de ces vessies dans le vide pneumatique; on s'aperçoit alors qu'un certain volume d'air est restitué, & les coups de piston que l'on donne ensuite, font précipiter quelques parties nébuleuses; d'ailleurs, il est clair qu'il n'est pas besoin de glandes pour faire la secrétion de cet air, comme Needham semble le desirer, puisque son dégagement peut être l'ouvrage de la digestion *(c)*.

(c) Le Lecteur doit être prévenu que cette exposition est contraire au sentiment adopté par M. Petit dans les Mémoires de l'Académie. Cet Anatomiste dit avoir vu des valvules capables d'empêcher un fluide de passer de l'estomac dans la vessie natatoire. Je crois avoir aperçu dans un grand nombre de dissections que M. Petit a pris pour des valvules, des

Des deux côtés du boyau & de la vessie aërienne sont deux organes figurés comme un ruban plissé, qui s'étendent depuis le foie jusqu'à l'anus, & qui, lorsqu'on les coupe, offrent une cavité ; en devant ils se terminent par une tête arrondie; en arrière ils s'ouvrent dans le cloaque : j'ajouterai seulement que j'ai trouvé quelques œufs nichés dans l'extrémité supérieure de l'ovaire d'un *congre* où ils étoient enchaînés les uns avec les autres par une espèce de fil rougeâtre, dont les divisions observées à la loupe ressembloient au chevelu d'une racine, & s'épanouissoient dans l'intérieur de chaque œuf; ces observations sont les seules que l'on puisse faire hors le temps de la fécondation. C'est ce défaut de développement qui a fait croire à Aristote qu'il n'y avoit point de sexe différent dans les anguilliformes: cette opinion a été long-temps celle de tous les Naturalistes, & ce n'est que depuis peu que Rédi & Vallisnieri nous ont désabusés en décrivant les parties sexuelles de l'anguille. *Voyez pl. I, fig. 11 & 12.*

L'anus est placé de sorte que la cavité abdominale est prolongée plus loin, & forme un espace conique assez considérable: cette arrière-cavité est remplie par une glande noirâtre qu'une membrane épaisse recouvre; cette glande, si on la déchire, laisse suinter un fluide qui a la saveur de l'urine, & l'on ne sauroit douter qu'elle ne fasse la fonction de reins; antérieurement cet organe a deux prolongemens qui sont placés des deux côtés de l'épine, & l'on y trouve des conduits qui s'ouvrent dans le cloaque. *Voyez pl. I, fig. 11.*

Tous ces viscères sont recouverts par un péritoine dont la couleur est dans les uns noirâtre, dans les autres argentée: la portion des reins qui est voisine des prolongemens antérieurs, y adhère très-fortement. De plus, on trouve dans l'abdomen de ces Poissons un tissu cellulaire lâche, qui, presque

---

membranes flasques, qui cessent de l'être pendant la digestion ; au reste, je me propose de faire sur cet objet, de nouvelles recherches. J'exhorte les Naturalistes à en faire de leur côté, afin de confirmer ou de détruire l'explication que je fais aujourd'hui des usages & de la circulation de l'air dans l'estomac & dans la vessie natatoire des poissons.

toujours, eſt gorgé de graiſſe & tient lieu d'épiploon ; cette remarque convient auſſi à la plupart des épineux.

Il eſt eſſentiel d'obſerver que ces deſcriptions ne doivent être entendues que des Poiſſons longs, & dont la forme approche le plus de la ronde; on ſait quelle différence il y a entre les anguilliſormes & les cartilagineux-longs qui ſont plus ou moins aplatis ; les autres Poiſſons longs & à pans n'offrent pas non plus la même ſtructure: les aiguilles de mer, par exemple, qui ſont recouvertes d'une peau analogue à celle des ſerpens, n'ont pas l'eſtomac diſtinct du boyau; elles ont le cœur pyramidal, leurs œufs & leurs parties ſexuelles ſont faciles à démontrer; mais, outre ces obſervations qui ont été déjà faites par Olaüs Borrichius, nous avons trouvé dans l'eſpèce d'aiguille que Rondelet appelle *acus ariſtotelis ſive ſecunda ſpecies*, un petit boyau alongé plein de fluide & placé entre ſes cordons ſexuels; quand on comprimoit cette veſſie, le fluide ſortoit par l'anus, & l'on ne peut douter que ce ne fût de l'urine, d'autant plus que cet organe étoit placé dans le voiſinage des reins. Nous ajouterons que ce poiſſon eſt vivipare, & que ſes petits ſe rangent & ſe placent les uns ſur les autres derrière l'anus, entre deux feuillets qui bordent la partie poſtérieure du corps juſqu'à l'extrémité de la queue. Ces réflexions font voir les différences qu'apporte le changement de figure dans les Poiſſons alongés, & prouvent en même temps l'exactitude de notre diviſion.

Les Poiſſons anguilliformes que j'ai diſſéqués, ſont le congre, l'anguille, l'eſpèce appelée *pinpernau* ou anguille de mer, & un ſerpent marin dont la forme approche du *myrus* de Rondelet. L'anguille eſt la ſeule que l'on ait diſſéquée; & ceux qui en ont donné la deſcription ſe ſont arrêtés à diſcourir ſur la forme des ouïes, ſur les phénomènes très-obſcurs de la génération, & n'ont parlé que de quelques viſcères. Il ſuffira pour s'en convaincre de jeter les yeux ſur ce qu'en ont dit Valliſnieri, Sancaſſanus, Paullini, Rédi & quelques autres Naturaliſtes; ce que j'obſerve afin de juſtifier les motifs de mon travail.

ORDRE TROISIEME.

Poissons épineux.

Les Poissons épineux portent ce nom à raison de la dureté de leurs os, & des piquans dont ils sont surmontés en plusieurs endroits. Parmi les Poissons auxquels ces caractères sont communs, on en trouve qui sont arrondis & d'autres qui sont aplatis, connus par les Latins sous le nom de *plani;* ces différences nous fournissent une division naturelle & très-anatomique, dont nous parcourrons successivement les deux branches.

Poissons épineux arrondis.

Les Poissons épineux arrondis sont ceux de tous sur lesquels il nous reste le moins d'observations à faire; M. Gouan les ayant disséqués & décrits avec beaucoup de soin dans son Ictyologie. Nous nous permettrons cependant quelques additions, soit pour suppléer à ce que cet Auteur célèbre peut avoir oublié, soit pour relever quelques fautes légères s'il s'en est glissé dans son Ouvrage.

M. Gouan a très-bien décrit le squelette; il a seulement oublié le vomer qui, dans plusieurs individus, dans le brochet, par exemple, est très-remarquable; c'est un os placé au milieu du palais, creusé par une gouttière supérieurement, aplati inférieurement, & qui s'articule avec la base du crâne & avec la mâchoire supérieure. On pourroit encore faire quelques observations relatives à la nomenclature; il donne le nom d'os du palais à des tubercules osseux qui font la fonction de dents, & qui sont placés auprès de l'insertion des ouïes; ce nom ne leur convient point, puisqu'ils n'ont aucune analogie avec ceux qui s'appellent ainsi dans l'homme & dans les quadrupèdes; les noms de clavicules & d'omoplatte ne conviennent pas mieux à des os qui terminent postérieurement l'ouverture bronchiale, & qui n'en ont absolument aucun usage: celui de bassin doit être également banni, puisque l'anus de ces Poissons & leurs parties naturelles en sont, dans

la plupart, très-éloignés. En un mot, ne doit-on pas regarder comme une règle conſtante & inviolable, qu'en Anatomie comparée, il ne faut ſe ſervir des noms reçus, que pour exprimer des reſſemblances, des analogies ou des uſages communs?

Nous n'avons rien à ajouter à ce que M. Gouan a dit des muſcles; nous ferons ſeulement quelques obſervations ſur les viſcères.

Le cerveau eſt compoſé de ſept ou au moins de cinq lobes, parmi leſquels trois ou deux ſont pairs, & un impair; les deux lobes antérieurs ſont peu profonds, & recouvrent les nerfs optiques: les lobes moyens, quand ils exiſtent, ſont très-petits, & cependant très-diſtincts; les lobes poſtérieurs ſont les plus volumineux de tous, & donnent naiſſance aux nerfs optiques, aux petits oculaires & à ceux qui ſe diſtribuent aux ouïes & au cœur. Les nerfs de la première paire naiſſent des lobes antérieurs *(d)*; mais une remarque curieuſe, qu'il convient de faire, & qui n'a point échappé à quelques Phyſiciens, c'eſt que dans pluſieurs épineux, les nerfs optiques ſe croiſent ſans mélange de ſubſtance, *voy. pl. V, fig. 9*. Dans quelques-uns cependant, comme dans une eſpèce appartenante au genre que Rondelet appelle *mullus*, les nerfs optiques ſont diſpoſés de ſorte qu'ils ſont l'un au-deſſus de l'autre dans leur naiſſance, & qu'ils divergent en ſe portant vers les orbites *(e)*. Le lobe poſtérieur eſt impair & tout-à-fait détaché de la moelle alongée; en deſſous on obſerve encore un petit lobe impair & placé dans le milieu: nous avons déja dit qu'il ſe trouvoit dans le crâne une excavation propre à le loger; ce lobe n'a point été décrit par les Anatomiſtes, à moins qu'il ne ſoit connu par quelques-uns ſous le nom de *eminentiæ candicantes*: nom qui ne lui convient point, puiſqu'à proprement parler, il n'y a qu'une ſeule éminence.

(d) On doit conſulter Morgagni, *epiſt. anct. XVII*, dans laquelle il décrit l'organe de l'odorat de quelques Poiſſons.

(e) On trouvera des détails curieux & intéreſſans, dans une Diſſertation de M. Haller, ſur les yeux de quelques Poiſſons.

Pour résumer, le cerveau des épineux diffère de celui des anguilliformes, en ce que dans les épineux il est plus court, moins volumineux & plus arrondi, & que les lobes sont plus inégaux, moins développés & moins nombreux; la structure intérieure diffère moins que l'extérieure. En écartant les lobes principaux, on aperçoit une fente qui répond au troisième ventricule de l'homme; en devant on reconnoît de la manière la plus frappante, la commissure antérieure même dans le brochet; observation qui a échappé à M. Camper, & que M. Huller a faite dans la carpe; en arrière sont les tubercules quadrijumeaux que M. Camper a très-bien décrits: au-dessous du cervelet on trouve la continuation du ventricule, & une petite éminence annulaire; & vers le milieu de la face inférieure du cerveau on remarque la tige & la glande pituitaire.

Dans la base du crâne sont creusées deux petites fosses, qui ne sont séparées que par une crête peu épaisse & peu saillante; c'est dans chacune de ces fosses que sont placés un ou deux osselets dont Klein a connu le nombre & la position; sur les côtés se trouvent deux enfoncemens, dans lesquels sont logés trois conduits demi-circulaires aqueux, que Swammerdam & Duverney ont décrits, & quelquefois un troisième osselet: un mucus gélatineux & la pulpe d'un nerf, environnent les conduits & les osselets. M. Camper qui s'est occupé de cet objet avec beaucoup de succès, a décrit, de plus que les autres, la position respective de toutes ces parties, la bourse qu'il nomme élastique, l'ouverture des conduits & une partie figurée comme une petite raquette dans le brochet, & qu'il croit capable de rendre la bourse élastique dans certaines circonstances. Je l'ai examiné avec le plus grand soin; je n'ai pas observé qu'elle eût l'apparence aucunement musculeuse, & je crois qu'il est facile de démontrer que ce n'est autre chose qu'une bourse subalterne, continue avec la bourse élastique, également creuse & transparente, & qui n'en diffère qu'en ce qu'elle forme un petit cul-de-sac, & que ses parois sont plus épaisses. Les conduits aqueux des épineux ne m'ont

pas ſemblé faire des contours auſſi réguliers que ceux des anguilliſormes. J'ajouterai une obſervation relative à l'adminiſtration anatomique. M. Camper, dans ſes diſſections du cerveau & de l'organe de l'ouïe, recommande de couper le crâne perpendiculairement dans le milieu, & ſuivant la longueur du corps. Mais les petits oſſelets ſont placés dans des foſſes ſi voiſines les unes des autres, qu'une pareille coupe les dérange néceſſairement; & j'ai toujours mieux réuſſi en enlevant avec des ciſeaux la paroi ſupérieure du crâne; par ce moyen l'on aperçoit les oſſelets de chaque côté en place, ainſi que le mucus gélatineux & les conduits demi-circulaires aqueux, ſans qu'ils aient ſouffert le moindre dérangement.

La poitrine eſt à peu-près de la même grandeur que celle des anguilliformes; le cœur eſt également enveloppé par un péricarde mince & adhérent à un diaphragme membraneux, mais la forme eſt un peu différente. Dans la plupart des individus qui appartiennent à cet ordre, il reſſemble à une pyramide à trois angles, dont la pointe ſeroit en devant, un des angles en deſſus, & la baſe en arrière. Dans quelques-uns elle eſt coupée obliquement comme dans le *ſcomber* ou *maquereau*, & dans l'*éperlan ;* dans quelques autres il s'éloigne de la figure pyramidale, & il approche de la cubique. Dans la morue, par exemple, il ſemble que la partie ſupérieure de la pyramide ait été coupée. Dans quelques Poiſſons épineux qui, ſans avoir les deux yeux du même côté, ſont cependant très-aplatis, il offre encore une ſingularité: c'eſt qu'il eſt preſque auſſi blanc que ſon appendice; ces variétés, au reſte, ſurprendront moins ſi l'on ſe ſouvient que les individus de cet ordre ſont plus nombreux que ceux du précédent; quelle que ſoit la forme du cœur, il eſt preſque toujours ſurmonté par un appendice blanc & pyramidal, qui, dans quelques individus, eſt irrégulièrement quadrangulaire, & toujours ſéparé du cœur par un étranglement. *Voyez pl. II, fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.*

L'eſtomac fait dans la plupart un cul-de-ſac, & reſſemble plus à celui des cartilagineux plats qu'à tout autre. Dans

quelques-uns

quelques-uns cependant comme dans l'éperlan & le poiſſon nommé vrac ou carpe de mer, il eſt peu diſtinct de l'inteſtin; les poiſſons très-aplatis, & qui cependant n'ont point les yeux binés *(binati)*, ont l'eſtomac globuleux. Dans le rouget & le ſurmulet il eſt en quelque ſorte triangulaire; dans le maquereau, l'inteſtin ſort de la partie ſupérieure de l'eſtomac à peu-près comme dans l'anguille; dans le poiſſon connu en Normandie ſous le nom de *talput*, il fait en bas une petite boſſe conique. M. Gouan dit que dans quelques Poiſſons il eſt en partie muſculeux, & en partie membraneux comme le géſier des oiſeaux. Je n'ai jamais rencontré cette variété; & ceux que j'ai vus reſſembloient plutôt à la poche ou premier eſtomac des oiſeaux, qu'à leur géſier.

L'inteſtin eſt dans tous les Poiſſons très-étroit auprès du pylore; dans quelques-uns tels que le colin ou lieu, & la morue, on obſerve un renflement du côté de l'eſtomac: la plupart ont la portion du conduit la plus étroite, entourée par un nombre quelquefois très-conſidérable d'appendices vermiculaires, qui s'ouvrent dans ſa cavité: on les trouve deſſinées dans Valentini; mais cette figure pèche en ce qu'elle ne préſente ces appendices que comme ſortant de la partie inférieure du pylore; quelques individus en ont un moindre nombre, & alors elles ſont plus groſſes comme dans le *cottus* de Rondelet, que les Normands appellent vulgairement crapaud de mer; d'autres n'en ont qu'un ou deux, comme l'éperlan. Le colin ou lieu, outre ſes appendices, a une eſpèce de cœcum plus gros & placé tout auprès; enfin, pluſieurs Poiſſons comme la carpe de mer ou vrac n'en ont point, & le pylore eſt moins étroit chez eux. Aucun Anatomiſte n'avoit donné l'hiſtoire de leurs variations: ces appendices logent des vers longs & aplatis qui étoient connus de Peyer *(f)*; on en trouve auſſi de répandus entre les inteſtins & le péritoine: Malpighy croyoit qu'il s'y filtroit un ferment; on les trouve ordinairement

(f) M. Duhamel a dernièrement fait deſſiner ces vers, ainſi que les appendices vermiformes, dans ſon Traité général des Pêches & Hiſtoire des Poiſſons.

remplis d'un chile blanc, & l'on n'a encore rien dit de vraisemblable sur leurs usages, non plus que sur ceux de l'appendice vermiforme du cœcum humain, qui a avec eux beaucoup d'analogie. *Voy. pl. II, fig. 8, 9, 10, 11, 12 & 13.*

La vessie urinaire & les reins qui n'étoient point connus par Needham, ont été très-bien décrits par M. Gouan; nous ferons seulement quelques remarques sur la conformation singulière de ces organes dans quelques Poissons. La vessie urinaire de la gode est fortifiée supérieurement par un muscle creux, & elle s'ouvre au-dessus de l'anus par un conduit particulier. Dans le rouget, les reins forment en bas une tumeur ovale; plus haut ils se rétrécissent, & se terminent par deux espèces de cornes qui sont placées des deux côtés de l'épine *(pl. III, fig. 3)*; le même Poisson est remarquable par un viscère singulier: au-devant des reins se trouve une poche charnue inférieurement, membraneuse vers le haut, qui contient un fluide gélatineux, & de la partie supérieure de laquelle partent deux conduits qui se recourbent & vont aboutir à une petite glande creuse *(pl. III, fig. 2)*; on trouve encore dans la vive deux petites vessies auprès de l'anus, qui communiquent avec les reins, & au-dessus desquels sont deux autres vessies plus grandes qui se rapprochent par le bas, & qui appartiennent aux organes de la génération *(pl. III, fig. 6)*. Le cottus ou crapaud de mer a deux poches auprès du rectum, qui sont remplies par une humeur glaireuse: le surmulet en a aussi deux; mais l'humeur qui les remplit n'est pas aussi épaisse; enfin on remarque un grand nombre de variétés à cet égard, qui, si on y joint les différentes dimensions de l'abdomen, la place qu'occupe l'anus, l'absence ou la présence de la vessie aërienne, les appendices vermiformes plus ou moins nombreuses, les circonvolutions des intestins, la figure de l'estomac, celle du cœur & la structure des parties sexuelles, sont plus que suffisantes pour servir de caractères anatomiques propres à faire des genres & des espèces, quand on sera plus riche en descriptions.

Poissons épineux plats.

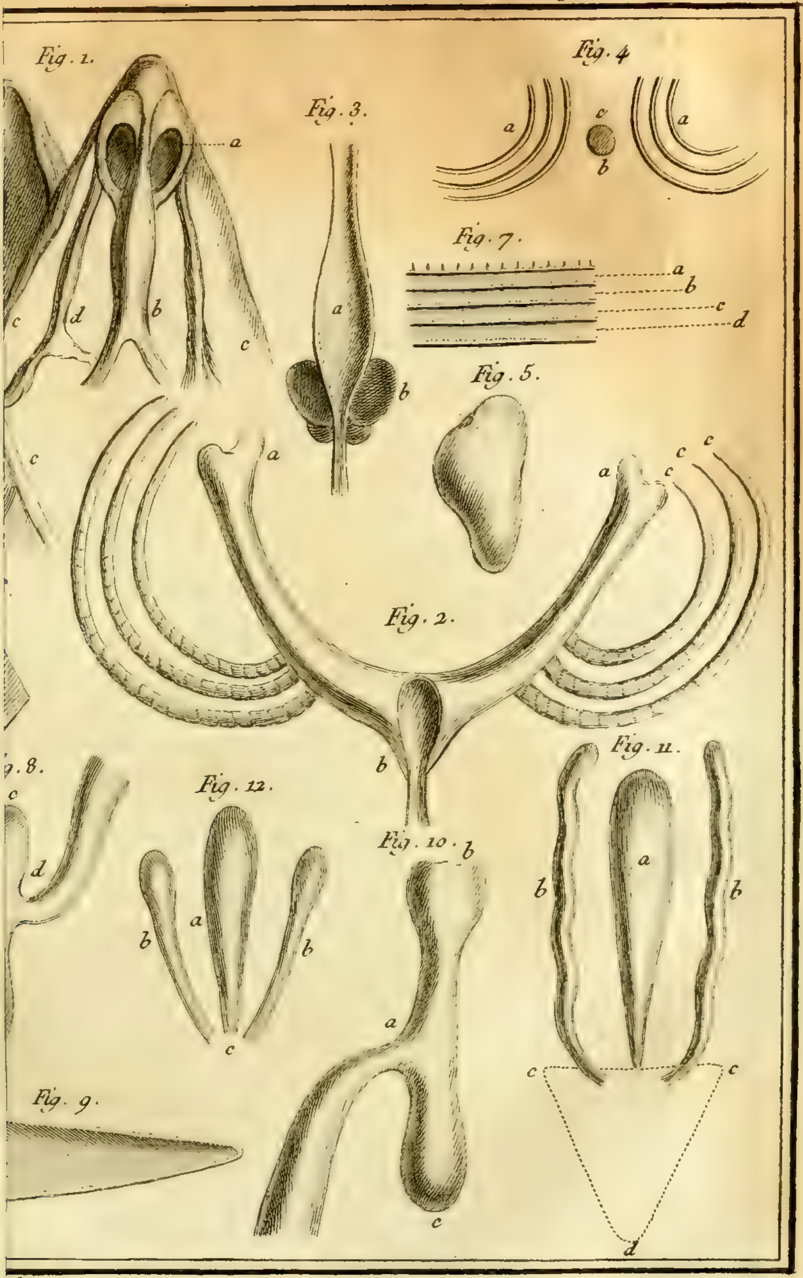
Les Poissons épineux plats, nommés *plani* par les Latins, sont ceux par lesquels nous finirons nos observations. La raison qui nous a déterminés à suivre cet ordre, c'est que ces derniers sont tellement disposés, que la bizarrerie de leur forme, l'obliquité de leur marche, la position de leurs yeux, semblent les éloigner plus que tous les autres du modèle que nous regardons comme le mieux fini & comme parfait, qui est l'homme. Malgré ces différences, ils ont une très-grande analogie avec les Poissons épineux arrondis; leurs muscles latéraux inter-épineux & natatoires sont absolument les mêmes, & nous avons seulement quelques remarques à faire sur leur squelette & sur leurs viscères.

Le crâne est horizontal, quoiqu'il paroisse oblique; on y remarque deux cavités cérébrales plus profondes que dans les Poissons des ordres précédens, & qui contiennent les deux osselets dont nous avons déjà parlé plusieurs fois; à la partie antérieure de la fosse pituitaire sont creusés obliquement plusieurs conduits qui s'étendent jusqu'aux yeux & aux narines; sur les côtés du crâne on trouve quatre ou cinq pièces courbes & mobiles les unes sur les autres: celles du côté des yeux sont plus grandes, & toutes se réunissent vers les deux angles de la bouche; deux autres sont recourbées & remontent en arrière; elles sont principalement destinées à soutenir les mâchoires, & à faire la fonction des os de la pommette. La mâchoire supérieure est formée par deux portions de cercles placés l'un derrière l'autre, réunis vers les commissures, & qui, vers la partie supérieure & moyenne, sont joints ensemble par deux pièces mobiles; ces deux segmens composent une double mâchoire qui s'alonge & se raccourcit à volonté: pareille structure se trouve dans la plupart des épineux arrondis & dans quelques cartilagineux; la mâchoire inférieure n'a rien de remarquable, si ce n'est un double condile dont un s'articule avec les deux segmens réunis, dont nous venons de parler; & l'autre, avec l'os qui fait

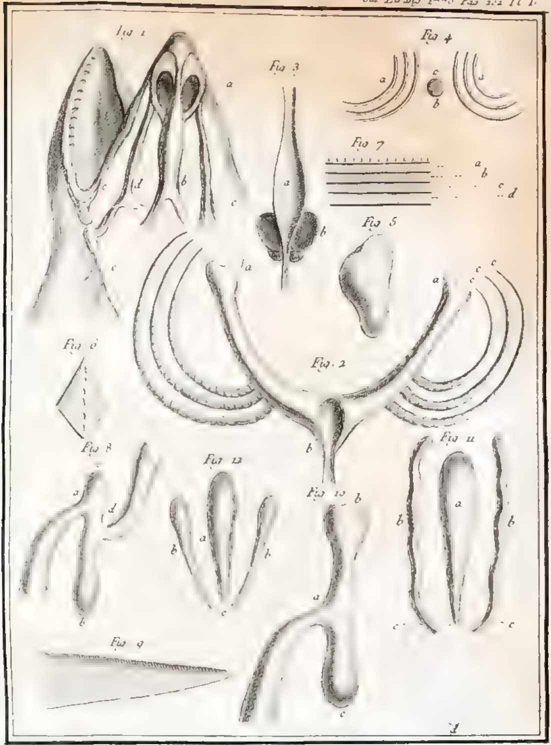
fonction d'arcade zigomatique. *Voyez planche IV, figure 8.*

La poitrine est très-étroite & placée derrière un os recourbé, qui s'articule en arrière avec l'épine auprès des opercules; cet os fait en devant une saillie qui met le cœur à couvert, qui supplée au sternum des animaux parfaits, & qui donne insertion à deux nageoires entre lesquelles est l'anus. La colonne épinière fait un contour très-remarquable auquel répond une ligne extérieure, & qui rend la cavité abdominale plus grande; cette dernière est plus étroite dans ces Poissons que dans les ordres précédens: en devant elle est bornée par les ouïes & par l'os sternal, en haut par l'épine, latéralement par les côtes, & en arrière par un os tranchant, semi-circulaire, articulé avec l'épine qui s'avance jusqu'à l'os sternal, derrière lequel il fait une seconde saillie; cet os est particulier aux Poissons épineux plats. Nous avons aussi trouvé deux os particuliers aux cartilagineux; le squelette varie donc à raison des conformations extérieures, & des grandes différences qui partagent en différens ordres les individus d'une même famille. *Voyez pl. IV, fig. 2.*

Les cerveaux vont toujours en diminuant, depuis les cartilagineux jusqu'aux épineux plats. La raie a deux masses cérébrales jointes ensemble par un étranglement; l'anguille a huit lobes; les Poissons épineux arrondis en ont un ou deux de moins que les anguilliformes, & les épineux plats sont encore moins bien organisés, ils ont en tout cinq lobes apparens en dessus, dont deux sont antérieurs & très-petits, deux sont plus gros & donnent naissance aux nerfs de l'œil, & un est tout-à-fait postérieur, qui tient lieu de cervelet: la face inférieure présente un lobe de plus, qui est arrondi, impair & placé dans le milieu. *Voyez pl. V, fig. 6 & 7.* Les nerfs optiques naissent l'un au-dessus de l'autre, de sorte cependant que l'un est plus antérieur, & tous les deux se portent du même côté *(voyez pl. V, fig, 10)*; les osselets de l'ouïe y sont peu considérables, & les conduits aqueux moins régulièrement contournés que dans les épineux arrondis. M. Camper n'a point décrit le cerveau ni l'organe de l'ouïe des



ulp.



... Hussard Sculp.

Poissons épineux plats; mais l'analogie lui a fait soupçonner la même conformation, & je me suis convaincu depuis peu par la dissection d'une sole, que l'appareil de cet organe ne diffère en rien dans ce Poisson de celui du brochet, si ce n'est que l'on n'y trouve point le troisième osselet; je n'y ai point trouvé non plus la partie que M. Camper appelle du nom de *tensor bursæ;* la structure intérieure du cerveau est aussi la même que celle que nous avons observée dans les épineux arrondis; ce qui fait voir combien est grande l'analogie qui existe entre ces deux familles de Poissons, que nous regardons comme appartenans au même ordre.

Le cœur est situé profondément, & enveloppé d'un péricarde mince; il a de même un appendice, & il varie dans quelques espèces; dans le barbue, par exemple, il est tronqué supérieurement, la base est oblique au plan du Poisson; dans la flondre il est irrégulièrement arrondi. *Voyez planche IV, fig. 1 & 3.* Le foie est composé d'un seul lobe très-aplati, au-dessous est la vésicule du fiel qui, dans quelques-uns, ressemble à une goutte d'huile isolée; la tête est arrondie, & l'estomac, lorsqu'il est gonflé, est globuleux, ses membranes sont fort minces, & dans quelques espèces, comme dans le barbue, il est plus alongé avec deux appendices au pylore; plus communément cependant les Poissons épineux plats n'en ont point, l'intestin est soutenu par un petit mésentère, & fait au moins trois circonvolutions. *Voy. pl. IV, fig. 5.*

J'ai trouvé dans la plie une poche placée derrière l'anus, & remplie par un fluide assez consistant, & qui communiquoit par un conduit très-court avec ses reins. Dans les Poissons plats, ces organes sont semi-circulaires, placés dans l'arrondissement de la cavité abdominale, & toujours derrière la poitrine; si on se rappelle que j'ai trouvé dans la vessie de plusieurs Poissons épineux & ronds, un fluide presque gélatineux, on verra que l'urine des Poissons a en général plus de consistance que celle des autres animaux; peut-être est-ce la grande quantité de leur huile qui est la cause de ce phénomène. *Voyez pl. IV, fig. 4.*

Des deux côtés de l'os courbe & tranchant qui termine l'abdomen en arrière, & des os interépineux qui s'étendent jusqu'à l'extrémité de la queue, sont deux prolongemens coniques qui communiquent avec la cavité abdominale, & dans lesquels sont logés les organes sexuels; ce sont deux sacs triangulaires dont les pointes sont prolongées; l'une s'insinue dans l'arrière-cavité, l'autre se porte en dessus & le long des reins, la troisième est dirigée vers le rectum; là les deux pointes ou angles antérieurs se réunissent en un conduit commun, qui s'ouvre dans le voisinage de l'anus: l'intérieur de ces organes est rempli dans les femelles par un nombre prodigieux de petits grains qui sont des œufs, & dans les mâles, par un amas de filets très-fins qui ne sont autre chose que des vaisseaux roulés les uns sur les autres; l'abdomen de ces Poissons, quoique fort étroit, renferme donc tous les viscères possibles, & ils sont tous très-faciles à démontrer, ce que l'on ne trouve pas ainsi dans l'abdomen des Poissons épineux & arrondis. *Voyez pl. IV, fig. 6 & 7.*

Les Poissons que j'ai disséqués sont parmi les épineux arrondis, la morue, le merlan, le maquereau, le rouget, le mulet, le surmulet, la vive, l'éperlan, le gougeon, le colin ou lieu, le poisson Saint-Pierre, la truite, la tanche, la carpe, le brochet, une espèce de turdus, ou grive de mer, la gode & le poisson nommé *talput;* & parmi les épineux plats, la limande, le turbot, la plie, la flondre & la sole; il faut ajouter la première espèce d'aiguille de Rondelet & le cottus, vulgairement appelé crapaud de mer.

Telle est la suite des faits les plus importans & les moins connus, que j'ai observés & qui m'ont été fournis par la dissection d'un nombre de Poissons assez grand pour décrire un objet quelconque avec précision; il faut commencer par établir des divisions méthodiques: pénétré de cette vérité, j'ai rangé sous différentes classes les individus dont j'avois à développer la structure. Les muscles & le squelette des cartilagineux, & celui des poissons plats, les viscères qui servent à la digestion, les reins, les cœurs & les cerveaux sont les

parties dont la forme & la position respectives sont exposées avec le plus de soin dans ces deux Mémoires. Il reste encore bien des choses à desirer sur les organes de la génération, sur l'Anatomie interne des viscères, & sur l'histoire des nerfs. Ces dernières Recherches me paroissent être sur-tout de la plus grande importance; peut-être sont-elles capables de jeter un grand jour sur les questions les plus obscures de la Philosophie; peut-être aussi les Métaphysiciens ne se sont-ils égarés dans la nuit des systèmes, que parce que les Anatomistes ne leur ont pas fourni un nombre suffisant de données, & parce qu'ils ont parlé de la sensibilité des brutes, sans en avoir auparavant étudié les organes: des circonstances plus favorables me mettront peut-être un jour à portée de suivre ce travail dont je connois l'importance & la difficulté. Tout le fruit que je me suis proposé de recueillir jusqu'ici, consiste à rassembler des caractères anatomiques, qui dans la suite puissent me servir à classer mes observations.

Caractères anatomiques des cartilagineux.

Crâne d'une seule pièce; mâchoire supérieure d'une ou de quatre pièces; mâchoire inférieure comme celle d'un enfant; deux grandes fosses dans le crâne placées l'une derrière l'autre; cellule située derrière l'orbite qui renferme l'organe de l'ouïe; trois conduits membraneux renfermés dans trois conduits osseux; corps blanchâtre semblable à l'amidon, qui tient lieu d'osselets; gelée & pulpe auditive; côtes dans les cartilagineux arrondis, qui manquent dans les cartilagineux plats; sternum avec quatre branches; os innominé figuré en fer-à-cheval; os hyoïde formé de deux pièces qui s'unissent à angle aigu. Squelette.

Plusieurs muscles placés en dessous dans la région thorachique, & en-dessus derrière la tête; & entr'autres quatre muscles longuets qui se rapprochent par la forme de ceux des animaux plus parfaits; muscles latéraux; muscles des nageoires & des ouïes. Muscles.

Cerveau divisé en deux lobes ou bosses considérable, l'une antérieure & l'autre postérieure, jointes par un étranglement; Viscères.

cervelet très-exprimé; ventricules; point de tubercules quadrijumeaux; nerfs olfactoires très-gros; tige pituitaire.

Cavités thorachiques assez amples; plèvre épaisse & peu adhérente; point de péricarde; oreillette transparente, gonflée comme une bulle d'air & cordiforme; sang fluide & très-rouge; cœur irrégulièrement triangulaire & festonné dans un de ses bords; muscle blanc qui fortifie l'artère dans sa naissance.

Foie divisé en trois lobes principaux dans les cartilagineux plats, en deux lanières dans les arrondis; vésicule du fiel adhérente au foie; rate oblongue & double dans quelques-uns; pancréas triangulaire & collé le long de l'intestin; estomac oblique & formant un cul-de-sac; intestin large & allant presque directement à l'anus.

Dans les femelles, sac double qui s'ouvre dans l'anus en forme de cloaque, & qui tient lieu de cornes de l'utérus; paquet d'œufs jaunes & de toutes sortes de grandeurs, grouppés au-dessus de chaque extrémité de ce double intestin; sac quadrangulaire & aplati, destiné à renfermer le fœtus qui s'ouvre facilement de dedans en dehors par son extrémité postérieure, & qui est placé dans l'intestin susdit; organe semblable à un testicule; dans les mâles un viscère blanc alongé, creux, ayant des parois épaisses, & s'ouvrant auprès de l'anus par un conduit avec une ou deux appendices charnues; reins derrière le péritoine, & s'ouvrant dans l'anus par un conduit court & très-dilatable.

Vaisseaux glaireux, noueux, parallèles dans leur trajet, placés sous la peau, & contenant un fluide analogue à celui qui est renfermé dans les conduits aqueux de l'organe de l'ouïe.

Caractères anatomiques des anguilliformes.

Squelette. Crâne d'une seule pièce; fosse cérébrale & pituitaire étroite; osselet de Klein très-gros; espèce de bec comme aux oiseaux; os vomer; os uniforme qui tient lieu de pommette; petit os mobile dans la commissure des mâchoires: os hyoïde demi-circulaire; opercules formés par des cercles concentriques

&

& ployans ; côtes & vertèbres très-nombreuſes qui vont toujours en décroiſſant.

Pluſieurs paires de muſcles bien organiſés dans la région du thorax & de l'abdomen ; muſcles latéraux ; muſcles des nageoires & des ouïes. Muſcles.

Cerveau compoſé de quatre lobes pairs & deux impairs ; ou de ſix lobes pairs, & de deux impairs dans tous les individus ; un lobe impair & inférieur ; ventricule prolongé ſous le cervelet ; tubercules peu ſaillans & tenant la place des quadrijumeaux ; tige pituitaire ; trois conduits demi-circulaires aqueux de chaque côté de la moelle alongée, dans l'intérieur du crâne & au-deſſus de l'oſſelet ſuſdit. Viſcères.

Poitrine étroite triangulaire ; péricarde ; eau du péricarde ; cœur triangulaire ayant ſon grand bord à gauche, & en haut comme en bas une pointe fort mouſſe ; appendice du cœur en larme de Job ; ſang noir & caillé ; réſervoir cubique.

Foie preſque d'un ſeul lobe, peu étendu ſur les côtés ; véſicule du fiel détachée ; rate petite & arrondie ; eſtomac long, droit & parallèle à la longueur de l'animal ; inteſtin naiſſant près du cardia, faiſant angle avec l'eſtomac, court & allant droit à l'anus.

Veſſie aérienne double ; rubans ſexuels pliſſés, creux & ſitués des deux côtés du boyau ſur la veſſie aérienne ; cavité abdominale prolongée au-delà de l'anus ; reins noirâtres & placés dans cette arrière-cavité ; péritoine noir ou argenté ; tiſſu cellulaire graiſſeux qui ſupplée à l'épiploon.

Caractères anatomiques des Poiſſons épineux arrondis.

Tête compoſée d'un nombre conſidérable & indéterminé de pièces oſſeuſes ; un, deux & quelquefois trois oſſelets de l'ouïe ; vomer ; os hyoïde formant un angle aigu par ſes deux branches ; opercules écailleux ; vertèbres & côtes beaucoup moins nombreuſes que dans les anguilliformes ; elles finiſſent par nuances moins inſenſibles ; queue avec des os interépineux, ſupérieurs & inférieurs ; nageoires & os qui les ſoutiennent. Squelette.

Muſcles latéraux, muſcles des nageoires & des ouïes. Muſcles.

Viſceres. Cerveau compoſé de ſept, ou au moins de cinq lobes ſupérieurs, dont deux ſont très-petits, & d'un impair inférieur & moyen; ventricule moins alongé que dans les anguilliformes; tubercules quadrijumeaux; commiſſure du cerveau; valvule au-deſſus du ventricule poſtérieur; trois conduits demi-circulaires de chaque côté; membrane qui les entoure; nerf auditif qui a deux branches; nerfs optiques qui ſe croiſent dans pluſieurs de ces Poiſſons; nerfs de la première paire qui ſont alongés, pulpeux & parallèles.

Cavité de la poitrine triangulaire & étroite; péricarde; cœur pyramidal & appendice en larme de Job.

Foie peu diviſé; rate oblongue; véſicule du fiel adhérente au foie & à l'eſtomac; eſtomac plus ou moins arrondi; pylore étroit; appendices du pylore très-nombreuſes dans la plupart; inteſtin long, mince & remarquable par un grand nombre de circonvolutions

Dans les mâles, organe blanchâtre creux ayant des parois épaiſſes, & compoſé de pluſieurs pelotons de fibres blanches roulées les unes ſur les autres, & qui s'ouvrent dans le conduit de la veſſie; dans les femelles, organe compoſé de grains qui ſont des œufs: l'ouverture de ce viſcère eſt placée au bas de la veſſie urinaire.

Veſſie urinaire avec un conduit particulier; reins rougeâtres, ovales & placés derrière le péritoine; veſſie natatoire dans le plus grand nombre.

Caractères anatomiques des Poiſſons épineux plats.

Squelette. Un nombre très-conſidérable d'os dans la tête; quatre foſſes cérébrales étroites, mais profondes; oſſelets de l'ouïe peu volumineux; conduits obliques qui mènent aux yeux & aux narines pluſieurs ſegmens de cercles tranchans, & placés latéralement dans l'angle des mâchoires; opercules écailleux; os recourbé qui ſe termine en devant par une ſaillie analogue au ſternum; os tranchant & ſemi-lunaire qui termine poſtérieurement l'abdomen.

Muſcles. Muſcles latéraux peu épais; muſcles des nageoires & des ouïes.

Cinq lobes cérébraux supérieurs, dont deux sont pairs, antérieurs & très-petits, deux pairs moyens & plus gros, & un impair & postérieur; un lobe inférieur & impair; structure interne du cerveau, la même que dans les épineux arrondis; organe de l'ouïe aussi le même. Viscères.

Cavités de la poitrine étroite; cœur prismatique ou alongé & arrondi à ses extrémités; appendice en larme de Job; sang noir & caillé dans le réservoir.

Foie aplati & composé d'un seul lobe; vésicule du fiel isolée; rate arrondie; estomac globuleux & très-mince; pylore dans la plus grande partie des individus sans appendices; intestin étroit & faisant un assez grand nombre de circonvolutions.

Cavité abdominale arrondie; reins semi-lunaires; vessie urinaire alongée en forme de boyau; deux prolongemens latéraux & postérieurs de la cavité abdominale dans lesquels sont logés les organes sexuels.

EXPLICATION DES FIGURES.

PLANCHE I.

FIGURE 1. Mâchoire de congre. *b*, pièce moyenne de la mâchoire supérieure. *a*, narines. *cc*, pièces latérales de la mâchoire supérieure. *d*, petit os ensiforme placé entre les pièces de la mâchoire supérieure. *e*, petit os figuré comme une clavicule qui remonte en arrière & en haut, en partant de l'angle des mâchoires.

Fig. 2. Os hyoïde du congre. *b*, base de la langue. *aa*, branches de l'os hyoïde. *ccc*, petits cercles qui forment les opercules.

Fig. 3. Coupe du crâne du congre; cette coupe est horizontale.

Fig. 4. Coupe des muscles spinaux de l'anguille. *aa*, portions d'ovales décrites par les muscles latéraux. *b*, épine. *c*, place qu'occupent supérieurement les couches spinales & moyennes.

Fig. 5 & 6. Figures des cœurs des anguilliformes.

Fig. 7. Désigne les couches musculeuses du tronc. *a*, couche spinale. *b*, couche moyenne. *c*, couche latérale. *d*, couches abdominales.

Figure 8. Eſtomac de l'anguille de mer. *a*, pylore. *d*, cardia. *c b*, extrémités.

Fig. 9. Arrière-cavité conique qui ſe trouve derrière l'anus, & qui loge les reins dans les anguilliformes.

Fig. 10. Eſtomac de congre. *b*, cardia. *a*, pylore. *c*, extrémité inférieure.

Fig. 11. Veſſie aérienne, reins, les cordons ſexuels du congre. *a*, veſſie aérienne. *b b*, cordons ſexuels. *c c d*, reins placés dans l'arrière-cavité. *Fig. 9.*

Fig. 12. Veſſie urinaire & organes ſexuels de l'anguille. *a*, veſſie urinaire. *b b*, ſacs ſexuels. *e*, réunion des conduits.

PLANCHE II.

Fig. 1. Cœur de ſcomber ou maquereau.

Fig. 2. Cœur d'éperlan.

Fig. 3. Cœur du poiſſon Saint-Pierre.

Fig. 4. Cœur du poiſſon nommé *talput.*

Fig. 5. Cœur de morue.

Fig. 6. Fait voir la grandeur du thorax des épineux.

Fig. 7. Cœur, appendice en forme de larme de Job, & deux principales veines du crapaud de mer.

Fig. 8. Eſtomac du poiſſon Saint-Pierre avec ſes appendices.

Fig. 9. Eſtomac du rouget avec ſes appendices.

Fig. 10. Eſtomac du maquereau avec ſes appendices.

Fig. 11. Eſtomac de l'éperlan avec deux appendices.

Fig. 12. Eſtomac du poiſſon nommé *talput.*

Fig. 13. Eſtomac du colin ou lieu, avec un renflement près le pylore.

PLANCHE III.

Fig. 1. Cordons ſexuels du maquereau. *a*, épine ; place qu'occupent les reins. *b b*, cordons ſexuels.

Fig. 2. Veſſie du rouget. *d*, veſſie. *a a*, partie ſupérieure charnue avec les deux conduits recourbés. *a c d*, qui ſe réuniſſent vers la caroncule *b*.

Fig. 3. Repréſente les reins du rouget.

Fig. 4. Veſſie urinaire, veſſie aérienne & reins de la gode. *a*, veſſie urinaire très-épaiſſe en haut. *b*, veſſie aérienne. *c*, reins. *d*, conduit qui fait les fonctions d'uretère.

Fig. 5. Reins & veſſie aérienne du poiſſon nommé talput. *a*, veſſie aérienne. *b c*, deux glandes qui occupent la place & qui

font la fonction de reins. *d,* conduit qui va d'une glande à l'autre.

Figure 6. Organes fexuels & petites veffies de l'anus, obfervées dans un poiffon femblable au rouget, & que les Normands appellent roulet. *a,* place qu'occupent les reins des deux côtés de l'épine. *bb,* facs ou organes fexuels, *cc,* deux petites veffies placées derrière l'anus. *d,* place de l'anus.

Fig. 7. Deux petites veffies que l'on trouve derrière l'anus du crapaud de mer.

Fig. 8. Organes fexuels du poiffon nommé talput. *a,* organe qui reffemble à un ruban pliffé. *bb,* deux facs que j'ai trouvés flafques. *c,* réunion des conduits.

PLANCHE IV.

Fig. 1. Cœur de barbue avec fon appendice charnu.

Fig. 2. Défigne la grandeur de l'abdomen dans les poiffons épineux plats. *ab,* os fternal. *cd,* os tranchant femi-lunaire qui termine l'abdomen en arrière.

Fig. 3. Cœur de flondre avec fon appendice.

Fig. 4. Les reins & la veffie de la plie. *a,* la veffie urinaire. *b,* les reins.

Fig. 5. Eftomac & inteftin de la barbue. *a,* eftomac. *bc,* appendice du pylore. *d,* premier inteftin. *e,* rétréciffement de l'inteftin. *f,* fecond inteftin ou rectum.

Fig. 6. Organes fexuels de la barbue. *ab,* angles qui font logés dans les arrières-cavités coniques. *dd,* angles qui remontent en fuivant les reins. *c,* réunion des deux organes latéraux en un conduit.

Fig. 7. Rectum & organes fexuels de la limande. *a,* rectum. *bb,* deux facs fexuels. *c,* cloaque ou réunion de ces conduits à l'anus.

Fig. 8. Tête d'un poiffon épineux plat, dans laquelle les os des deux mâchoires font principalement deffinés. *ah,* deux condiles ou articulations de la mâchoire inférieure. *ee,* traverfe qui unit les os de la mâchoire fupérieure avec le crâne; cette traverfe eft mobile. *cd,* os plat & oblique qui fe porte vers l'angle des deux mâchoires. *ab,* autre os plat placé dans le milieu. *ma,* os recourbé qui fe porte auffi vers la commiffure de la bouche. *mb,* os tranfverfal qui réunit les précédens entr'eux; ces os font mobiles les uns fur les autres.

PLANCHE V.

Figure 1. Cerveau de congre avec les principaux nerfs qui en partent. *aa,* nerfs optiques. *b,* lobe antérieur, impair & séparé en deux par un petit raphé. *cc,* les deux lobes pairs & antérieurs. *dd,* deux lobes pairs moyens, & qui donnent naissance aux nerfs optiques & aux petits nerfs oculaires. *e,* le cervelet. *fg,* deux nerfs qui percent le crâne & qui se distribuent au palais, aux narines, aux ouïes & au cœur. *hi,* deux nerfs qui partent de la moelle alongée, & qui se réunissent en *K. l,* moelle épinière avec ses nerfs.

Fig. 2. Cerveau de congre vu en dessous. *a,* petit lobe impair & moyen. *dd,* lobes moyens & pairs qui tiennent lieu de couches optiques. *bb,* nerfs optiques. *cc,* nerfs oculaires; les nerfs optiques sont plus rapprochés à leur origine qu'ils ne le sont

Fig. 8. Cerveau d'anguille qui est très-alongé, & dont les lobes antérieurs sont mieux développés & plus nombreux.

Fig. 3. Cerveau de la carpe de mer ou vrac vu en-dessus; il a deux lobes antérieurs *aa. bb,* petits lobes moyens. *cc,* lobes postérieurs qui donnent naissance aux nerfs optiques. *d,* cervelet.

Fig. 4. Même cerveau vu en dessous. *c,* lobe impair, inférieur & moyen. *aa,* nerfs optiques. *bb,* petits nerfs oculaires. *de,* principaux nerfs latéraux.

Fig. 5. Cerveau d'un petit poisson qui s'appelle vive en Normandie, & qui n'a que cinq lobes en comptant le cervelet; ce petit poisson est aplati horizontalement & a les deux yeux en dessus.

Fig. 6. Cerveau de plie vu en dessus; il a cinq lobes en tout. *aa,* petits lobes antérieurs très-superficiels. *cc,* lobes qui tiennent lieu de couches optiques. *b,* cervelet. *de,* principaux nerfs latéraux.

Fig. 7. Même cerveau vu en dessous. *e,* petit lobe moyen, impair & inférieur. *ab,* nerfs optiques. *cd,* nerfs oculaires.

Fig. 9. Cerveau d'une espèce de turdus ou grève de mer vu en dessous. *a,* lobe inférieur & impair. *bb,* nerfs optiques qui se croisent en *C.*

Fig. 10. Cerveau de turbot vu en dessous. *a,* lobe inférieur & impair. *bb,* nerfs optiques dont un est plus antérieur & plus élevé.

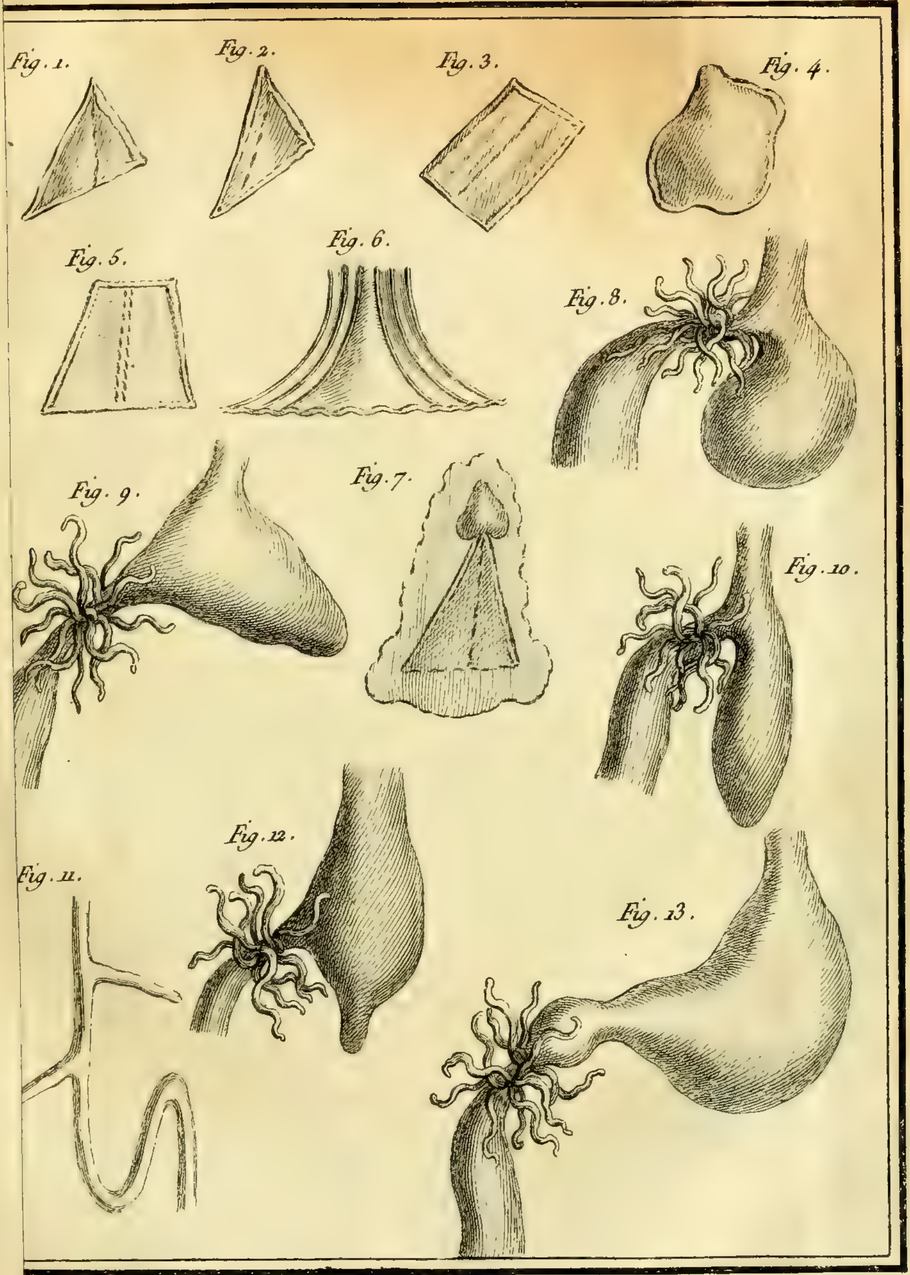
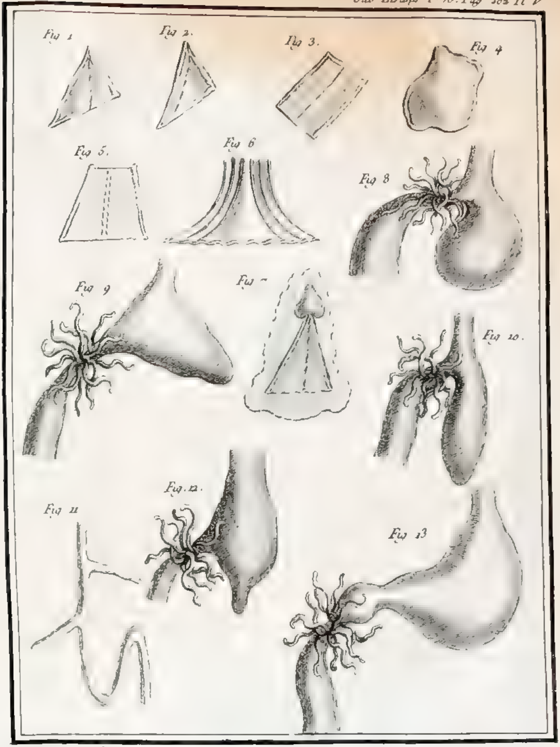
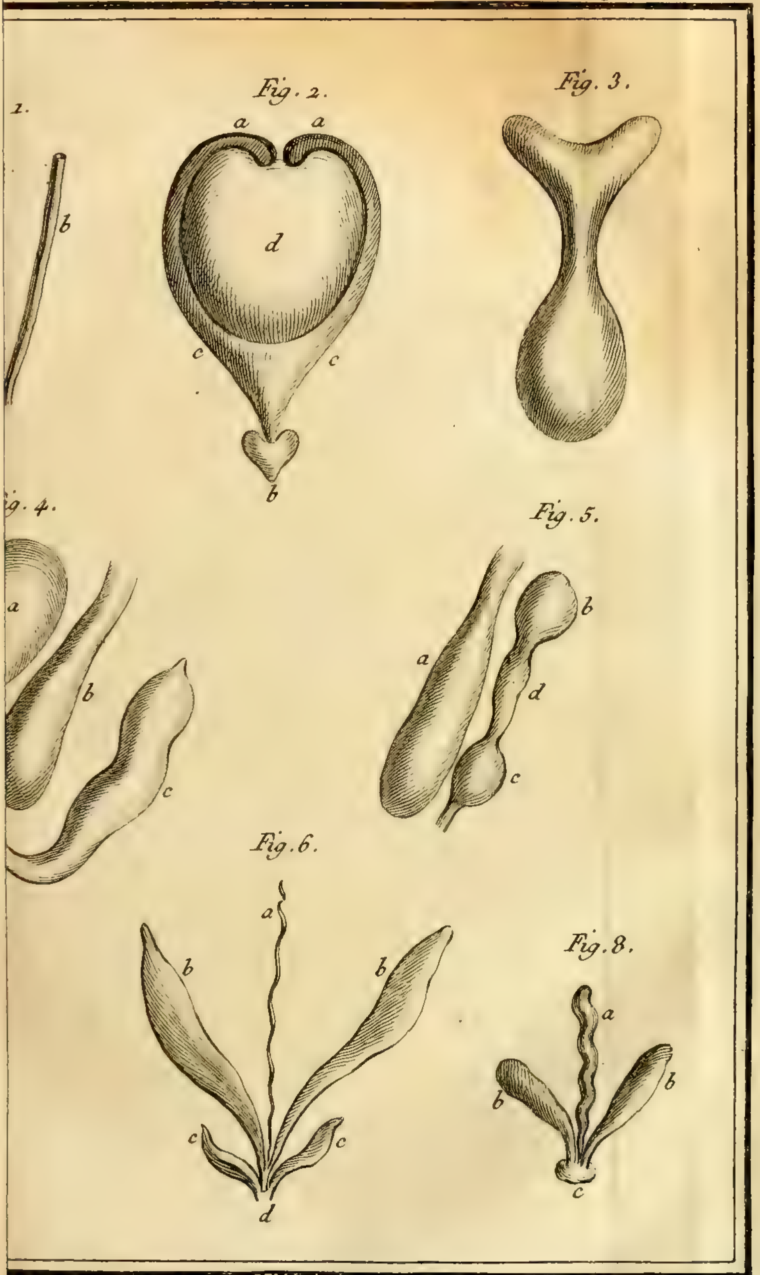


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 7.
Fig. 10.
Fig. 12.
Fig. 11.
Fig. 13.

...sard Sculp.



Ch. Haussard Sculp.


1.
b
Fig. 2.
a a
d
c c
b
Fig. 3.
ig. 4.
a
b
c
Fig. 5.
a
b
d
c
Fig. 6.
a
b b
c c
d
Fig. 8.
a
b b
c

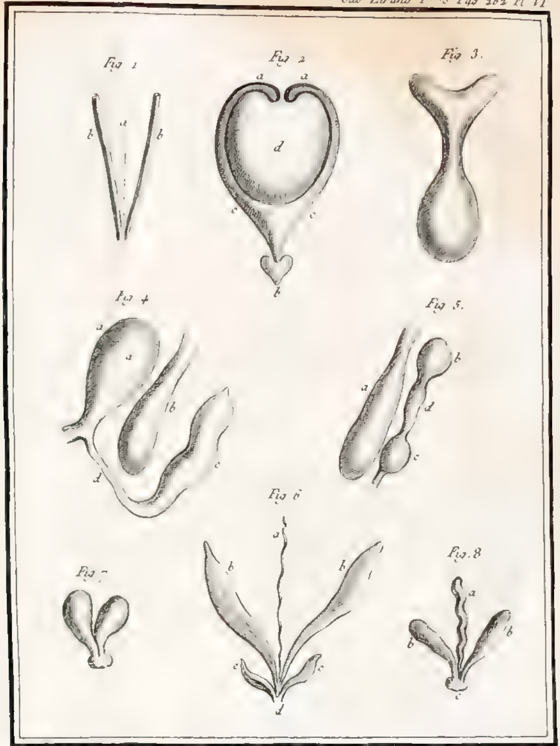


Fig 1
Fig 2
Fig 3.
Fig 4
Fig 5.
Fig 6
Fig 7
Fig 8

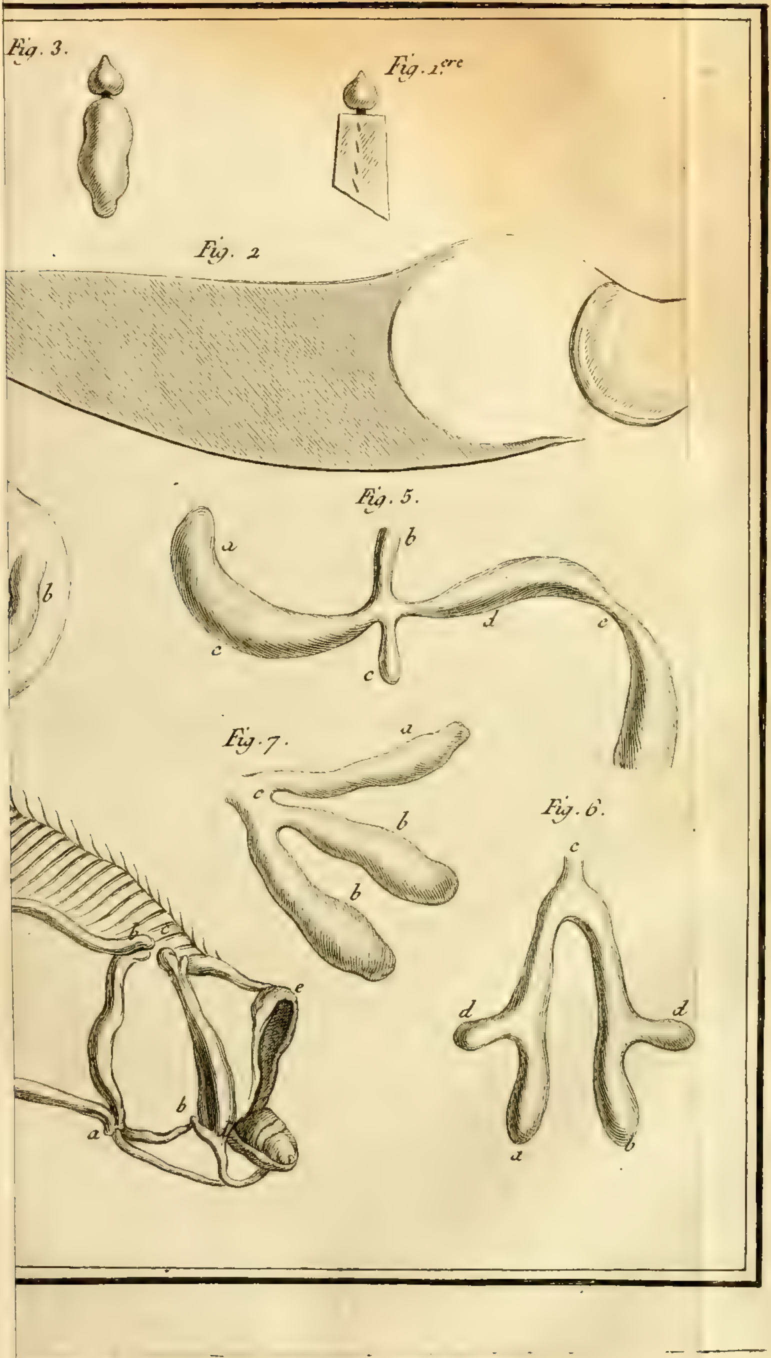


Fig. 3.
Fig. 1.ere
Fig. 2
Fig. 5.
a
b
c
c
d
e
b
Fig. 7.
a
c
b
b
Fig. 6.
c
d
d
a
b
b
c
e
b
a
d

Fig. 3
Fig. 1re
Fig. 2
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 8
Fig. 6

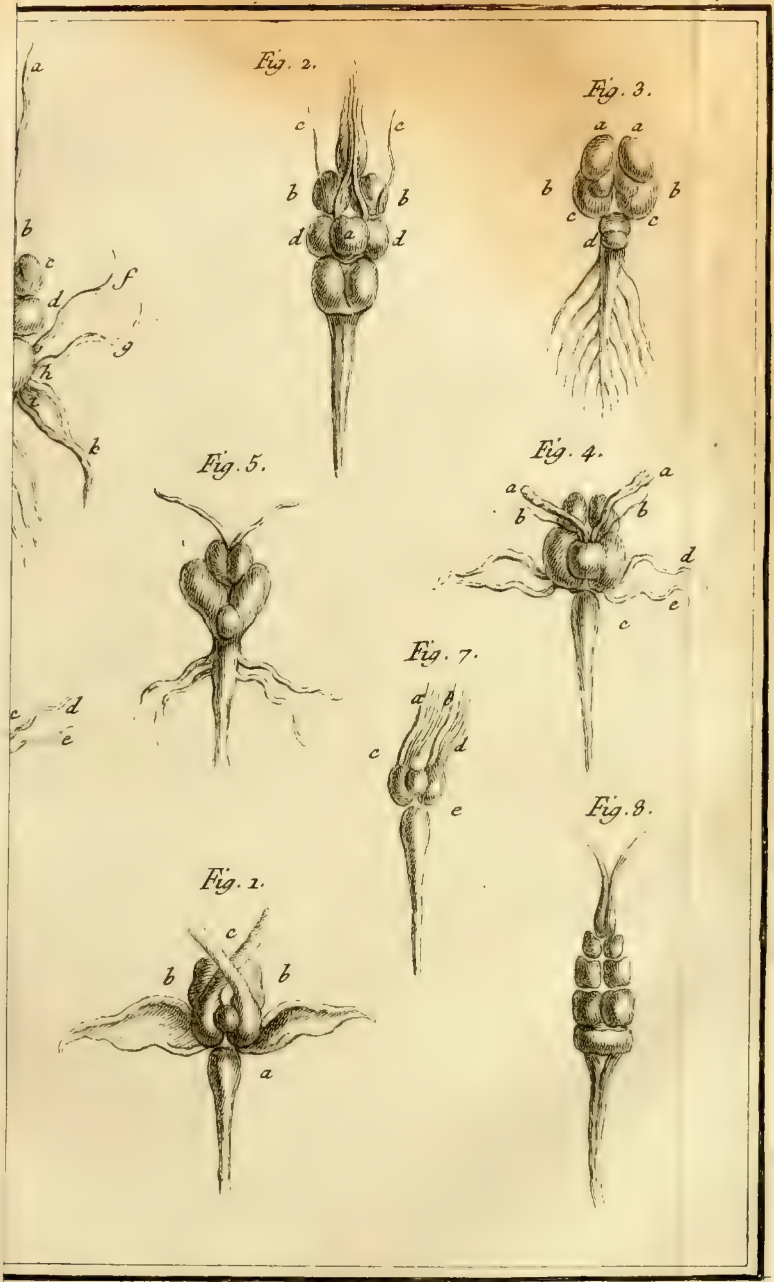
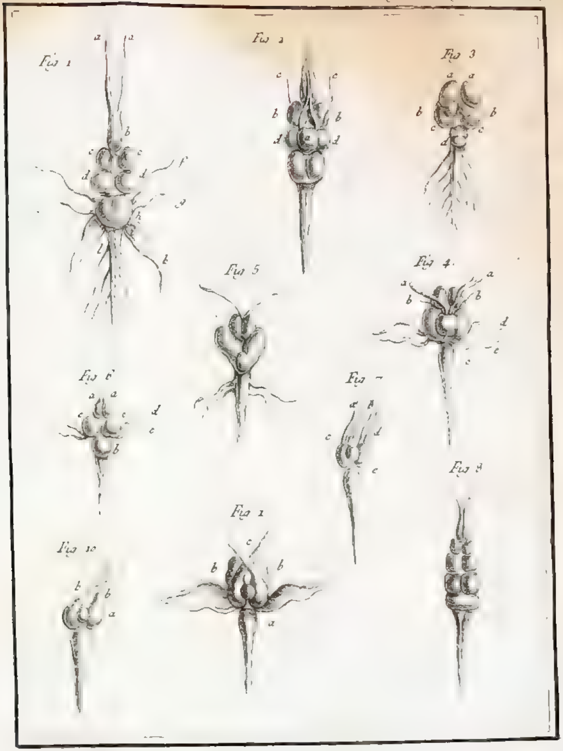


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 4.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 1.



Haussard Sculp.

DESCRIPTION DU COCOS DE L'ÎLE PRASLIN,

vulgairement appelé Cocos de mer.

Par M. SONNERAT.

L'ÎLE Praſlin ou l'île des Palmiers, eſt juſqu'à préſent le ſeul endroit où l'on ait trouvé l'arbre qui produit ce Cocos ſi recherché, qu'on n'avoit connu juſqu'alors que ſous le nom de Cocos de mer, Cocos de Salomon, Cocos des Maldives. La rareté de ce fruit, ſa forme bizarre, ſon origine inconnue, tout avoit contribué à lui faire attribuer de grandes propriétés, & imaginer des fables ſur ſon exiſtence, comme c'eſt la coutume dans tous les pays, à l'égard de ce qui eſt inconnu & ſingulier.

L'arbre qui produit le cocos de mer, s'élevant en beaucoup d'endroits de l'île ſur le rivage de la mer, la plus grande partie de ſes fruits tombe dans ſes eaux, ſe ſoutient à leur ſurface, le vent les pouſſe, les courans dont la direction eſt dans ces parages à l'Eſt-Nord-Eſt, les portent juſque ſur le rivage des Maldives, ſeule partie de la Terre où l'on avoit trouvé ce fruit avant la découverte de l'île Praſlin; ce qui lui fit donner le nom de *Cocos des Maldives* par les Européens; & les Maldivois le nommèrent *Travarcarné* (ce qui veut dire tréſor); il fut enſuite appelé *Cocos de Salomon*, pour lui donner apparemment un nom qui répondît au merveilleux qu'on attachoit à ſon origine. Ne connoiſſant point l'arbre qui le produiſoit, ne le pouvant découvrir, on avoit imaginé que c'étoit le fruit d'une plante qui croiſſoit au fond de la mer, qu'il ſe détachoit quand il étoit mûr, & que ſa légèreté le faiſoit ſurnager au-deſſus des flots, il reſtoit pour achever la fable, à prêter à ce fruit ſi extraordinaire, les plus grandes & les plus rares propriétés; c'eſt ce qui ne

manqua pas d'arriver. On débita, on crut & l'on croit encore, non-ſeulement aux Indes, mais dans toute l'Aſie, que l'amende du Cocos de mer a toutes les propriétés que nous attribuons à la thériaque, & que nous exagerons peut-être; que ſa coque eſt un antidote aſſuré contre toutes ſortes de poiſons. Les grands Seigneurs de l'Indoſtan achettent encore ce fruit à très-haut prix; ils font faire de ſa coque des taſſes qu'ils enrichiſſent d'or & de diamans; ils ne boivent jamais que dans ces taſſes, perſuadés que le poiſon qu'ils ne craignent tant, que parce qu'ils s'en ſervent eux-mêmes, ne ſauroit leur nuire, quelqu'actif qu'il ſoit, quand leur boiſſon a été verſée & s'eſt purifiée dans ces coupes ſalutaires. Le Souverain des îles Maldives met à profit l'erreur générale : ſes prédéceſſeurs ſe ſont attribués, & il conſerve la propriété excluſive d'un fruit qui, porté ſur les eaux, pouſſé ſur les côtes par le vent, devroit appartenir à celui qui le ramaſſe, il le vend à un très-haut prix, ou l'envoie aux différens Souverains de l'Aſie, comme le plus précieux don qu'ils puiſſent recevoir. Mais le Cocos de mer devant bientôt n'être plus rare, ne paroiſſant plus un être ſingulier, perdra bientôt ſans doute, ſa valeur, ſes propriétés, & le Souverain des Maldives le tribut que lui payoit l'ignorance & l'erreur.

L'île Praſlin ou l'île des Palmiers a tout au plus ſix ou ſept lieues de tour; elle fait partie de l'Archipel, connu autrefois ſous le nom de *Trois-frères*, puis ſous celui de *Mahé*, & enfin aujourd'hui ſous celui de *Sechelles;* c'eſt dans cette île d'une étendue ſi bornée, & dans cette île ſeule, qu'on a découvert juſqu'à préſent ce Cocos ſi précieux dans l'Inde. Comment ne s'eſt-il point trouvé dans les îles adjacentes? Comment l'arbre qui le produit n'y croît-il pas? Pourquoi étoit-il borné à la ſeule étendue de l'île Praſlin, quand cet Archipel fut ſéparé du Continent, & que l'irruption des mers changea cette portion du globe en un amas d'îles? Je laiſſe aux Phyſiciens & aux Naturaliſtes ces queſtions qui ſeroient d'une longue & trop difficile diſcuſſion, & je me borne à parler de l'arbre qui produit ce fruit ſi ſingulier.

Cet

Cet arbre obſervé attentivement, a été reconnu pour une eſpèce de latonier ou de lontar des Indes; il s'élève juſqu'à quarante-deux pieds de hauteur, ſa tête ſe couronne de dix ou douze feuilles en éventail de vingt-deux pieds de haut, ſur quinze pieds de large, portées ſur des pédicules longs de ſix ou ſept pieds; elles ſont échancrées aſſez profondément dans leur contour, & chaque lobe eſt lui-même ſubdiviſé en deux portions par le haut; leur conſiſtance eſt ferme & coriace: ce qui les rend préférables aux feuilles de nos Cocotiers ordinaires, pour faire des couvertures de maiſons à la façon indienne.

De l'aiſſelle des feuilles ſort une panicule conſidérable & très-ramifiée, de ſix pieds de longueur; ſa baſe eſt charnue, épaiſſe, ſes rameaux ſont terminés par des amas de fleurs femelles qui paroiſſent avoir toutes un calice compoſé de pluſieurs pièces, à cinq, ſix, & quelquefois ſept diviſions: leur piſtile en mûriſſant devient un fruit ſphérique d'un pied & demi de diamètre, dont l'enveloppe eſt très-épaiſſe & fibreuſe comme celle du Cocos; elle renferme trois coques dont une avorte le plus ſouvent: ces coques ſont très-groſſes, preſque ſphériques, comprimées ſur un de leurs côtés, & diviſées juſque dans le milieu de leur longueur, en deux portions; ce qui leur donne une figure très-bizarre; leur intérieur ſe remplit d'abord d'une eau blanche d'un goût amer & aſſez déſagréable; à meſure que le fruit mûrit, cette eau ſe change comme dans les Cocos ordinaires en une ſubſtance ſolide, blanche, huileuſe, qui s'attache aux parois intérieures du fruit.

Clutius donne une légère deſcription de ce Cocos, ſous le nom de *nux medica.*

Il ſeroit à ſouhaiter qu'on pût ſavoir par différens eſſais, ſi l'opinion des Anciens ſur les propriétés de cette noix eſt fondée.

Ces fruits ont chacun à leur baſe le calice dont j'ai parlé ci-deſſus, il ne les quitte point, même après leur parfaite maturité.

Le tronc de l'arbre ſemblable à celui du Cocotier par ſa forme, eſt en général plus gros, plus dur, & d'une couleur plus noire.

On a tranſporté à l'île-de-France des plants & des noix de cet arbre, qui ont très-bien réuſſi.

L'arbre que je viens de décrire paroît être, comme l'on voit, un individu femelle; je n'en ai point rencontré d'autres, ainſi que ceux qui ont voyagé comme moi dans ces îles où j'ai paſſé en Juin, qui étoit ſans doute le temps de la parfaite maturité de leur fruit; mais depuis j'ai reçu de M. Cordé, ancien Officier de la Compagnie des Indes, qui avoit relâché dans cet Archipel en Octobre, une portion d'un régime de fleurs mâles de cet arbre; ce qui ſemble fixer le temps de la floraiſon au mois de Septembre, qui répond au printemps de l'Europe, & le temps de ſa maturité aux mois de Juin & Juillet qui répondent à notre hiver. Cette portion de régime, dont j'ai joint ici le deſſin, avoit environ deux pieds & demi de longueur, ſans aucune ramification, elle étoit d'une forme cylindrique, de quatre pouces de diamètre, couverte entièrement d'un nombre infini de fleurs mâles, compoſée d'un calice à ſix diviſions, & de ſix étamines oppoſées à chacune de ces diviſions. Les régimes de fleurs mâles n'ayant point encore été rencontrées ſur les pieds qui produiſent les fruits; il eſt probable que cet arbre les portent ſur des individus différens, de ſorte que l'on peut regarder ce palmier comme une eſpèce de latonier, c'eſt-à-dire, de lontar des Indes, auquel il reſſemble d'ailleurs par toutes ſes autres parties, comme on peut en juger par la comparaiſon des figures que j'ai cru mériter d'être préſentées à l'Académie, puiſqu'elles n'ont point encore été publiées.

MÉMOIRE

Sur la Conſtruction des Fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des Équations aux différences partielles.

Par M. MONGE, Profeſſeur royal de Mathématiques & de Phyſique à l'École du Génie.

J'AI donné ailleurs la manière générale de conſtruire les intégrales des équations aux différences partielles du premier ordre, lorſqu'elles ſont de cette forme $z = M + N\varphi V$, les quantités M, N & V étant données en x & y, quelle que ſoit la condition à laquelle, par la nature de la queſtion, l'on ſoit obligé de ſatisfaire. Le lieu geométrique de l'intégrale précédente eſt une famille de ſurfaces courbes, qui renferme autant d'eſpèces, que la fonction arbitraire φ peut avoir de formes différentes; & l'on diſtingue celle qui ſatisfait à une queſtion, en aſſignant dans l'eſpace une courbe par laquelle elle doive paſſer. J'ai fait voir qu'il n'y a point de courbe continue ou diſcontinue, quand même tous ſes points ſeroient donnés au haſard, & ſe ſuccèderoient ſans loi, par laquelle on ne puiſſe faire paſſer une ſurface courbe dont l'équation ſeroit $z = M + N\varphi V$, & j'ai donné la manière générale de les conſtruire. J'ai pareillement conſtruit les intégrales des ordres ſupérieurs dans certains cas, par exemple, lorſque les différentes fonctions arbitraires ſont compoſées de la même quantité, ou, lorſqu'étant compoſées de quantités différentes, il ſe trouve quelques particularités dans les conditions à remplir. Mais je n'ai fait voir que dans certains cas particuliers, que la ſurface qui eſt le lieu de l'intégrale d'une équation aux différences partielles, eſt auſſi celui de ſa différentielle; de plus, je n'ai pas conſtruit l'équation $z = M + N\varphi V$ en ſuppoſant les quantités M, N & V fonctions des trois variables x, y & z, auquel cas on peut les mettre ſous cette forme plus ſimple $M = \varphi V$. Je me

propose de le faire ici d'une manière propre à jeter encore quelque jour sur cette matière.

Pour avoir la différentielle de l'équation $z = M + N\varphi V$, il faut d'abord la mettre sous cette forme, $\frac{z - M}{N} = \varphi V$, ensuite la différentier en ne faisant varier que x; ce qui donne

$$N\delta z - N\delta M - z\delta N + M\delta N = N^2\varphi' V.\delta V;$$

puis en ne faisant varier que y, d'où l'on tire

$$N\partial z - N\partial M - z\partial N - M\partial N = N^2\varphi' V.\partial V;$$

enfin éliminer la fonction arbitraire $N^2\ \varphi'\ V$, qui se trouve dans les deux équations, & il vient pour différentielle partielle de la proposée,

$$(A) \qquad \partial V\,[N\delta z - N\delta M - z\delta N + M\delta N] = \delta V\,[N\partial z - N\partial M - z\partial N + M\partial N].$$

(J'emploierai dans la suite, comme je l'ai toujours fait, des caractéristiques différentes pour les différentes manières de différentier; cette méthode est plus commode, en ce qu'il est inutile d'avoir recours à une forme fractionnaire pour représenter une différentielle partielle).

Il s'agit donc de faire voir que toute surface qui satisfait à l'équation $z = M + N\varphi V$, satisfait aussi à l'équation (A); mais j'ai déjà dit que cette intégrale appartient à une infinité de surfaces courbes différentes, & qui n'ont de commun que le procédé de la construction; donc, la question consiste à démontrer que par cela seul qu'une surface courbe aura été construite par un certain procédé, quelle que soit d'ailleurs la courbe génératrice, continue ou discontinue, qui aura servi à sa construction, cette surface satisfera à une équation aux différences partielles.

Pour me rendre intelligible, je vais le démontrer d'abord pour des cas simples, & ensuite par gradation pour les cas les plus compliqués. Mais, parce que dans chaque cas la

démonstration est fondée sur le procédé de la construction, je crois nécessaire de faire précéder chaque démonstration par la construction du cas dont il sera question; & pour ne pas me répéter pour les constructions que j'aurai données dans les Mémoires précédens, je supposerai autant qu'il sera possible qu'il n'y ait rien d'analytique dans les intégrales; par exemple, que dans l'équation $z = M + N\varphi V$, les quantités données M, N & V soient discontinues.

PROBLÈME I.

Construire l'équation $z = \varphi V$ *de manière que la surface qui en sera le lieu géométrique, passe par une courbe donnée, continue ou discontinue, & dont les projections aient pour symboles d'équations* $y = F.x$ *&* $z = f.x$; *la quantité* V *étant une fonction quelconque, analytique ou non, mais donnée, des deux variables* x *&* y.

SOLUTION.

Soient PAD & PAB les deux plans, l'un horizontal & l'autre vertical, auxquels est rapportée l'équation de la surface à construire, de manière que les droites AP, AD & AB soient les axes rectangulaires des coordonnées x, y & z. Soit smS la courbe donnée dans l'espace par lequel doit passer la surface, & dont les projections continues ou discontinues rqR & $sm'S'$ ont pour symboles d'équations $y = Fx$ & $z = f.x$. Soit Q un point quelconque pris sur le plan horizontal, & auquel répondent les coordonnées $AP = x$ & $PQ = y$ prises à volonté; il est évident que la question consiste à construire l'ordonnée QM de la surface. Pour cela, supposons d'abord que la quantité V soit analytique, & soit construite sur le plan horizontal la courbe Qq, qui ait pour équation $V = \alpha$, α étant une constante telle que cette courbe passe par le point donné Q; enfin, soit imaginé par cette courbe une surface cylindrique verticale, prolongée jusqu'à ce qu'elle puisse couper la surface à construire suivant une courbe Mm, il est clair que l'on aura l'équation de la pro- Fig. 1.

jection verticale de cette courbe, en faisant $V = \alpha$ dans l'équation proposée $z = \varphi V$. Cette équation sera donc $z =$ const. donc la projection verticale de cette courbe sera une droite horizontale; donc la courbe Mm sera elle-même plane & horizontale. Mais cette courbe étant sur la surface à construire, doit couper la courbe donnée smS quelque part en un point m dont la projection horizontale sera le point q, intersection des deux courbes Qq & rqR; donc, ayant mené $q\pi$ parallèle aux y, & élevé la verticale $\pi m'$, prolongée jusqu'à la rencontre de la courbe $sm'S'$, le point m' sera la projection verticale du point m, & si l'on mène par le point m' la droite horizontale $m'M'$, on aura la projection horizontale de la courbe Mm; donc, élevant la verticale PM', & faisant $QM = PM'$, le point M sera dans la surface demandée.

J'ai supposé, pour construire la courbe Qq, que la quantité V fut analytique; mais, si cette quantité n'est soumise à aucune loi de continuité, alors V n'est plus qu'un symbole, & représente une grandeur dont il est impossible d'avoir l'expression; par conséquent l'équation de la courbe Qq ne peut plus être exprimée, puisque les élémens de cette courbe se succèdent sans loi: & cette équation ne peut qu'être représentée par le symbole $V =$ const. $= \alpha$; néanmoins dans cette hypothèse il est possible de construire la courbe Qq. En effet, quoique la quantité V soit discontinue, cependant, puisqu'elle est donnée, elle peut être représentée par l'ordonnée verticale d'une surface courbe discontinue, donnée dans l'espace de quelque manière que ce soit, ou constructible par des procédés analogues à ceux que j'ai donnés dans le Mémoire auquel celui-ci doit servir de supplément; & le symbole d'équation de cette surface sera $V = z$; par conséquent, pour cette surface, deux des trois coordonnées x, y & z étant données à volonté, la troisième sera donnée ou constructible. Soit donc imaginée cette surface dans l'espace; il est évident que si on la coupe par un plan horizontal, on aura une section dont la projection horizontale aura pour

ſymbole d'équation, $V = \alpha$; il ne s'agit donc plus que de placer ce plan horizontal de telle manière que cette projection paſſe par le point Q. Pour cela, ſoit V le point où la verticale QM coupe cette ſurface; la droite QV ſera conſtructible, puiſqu'elle répond à un x & à un y donnés, & par conſéquent le point V ſera connu; ſoit mené par ce point un plan horizontal, il coupera la ſurface donnée en une courbe Vu, dont la projection horizontale ſera la courbe Qq demandée.

COROLLAIRE.

Donc, quelle que ſoit la courbe donnée smS, la ſurface que je viens de conſtruire aura cette propriété, qu'étant coupée par une ſurface cylindrique qui ait une courbe Qq pour baſe, ou dont l'équation ſoit $V = \alpha$, elle donnera pour ſection une courbe plane & horizontale.

C'eſt cette propriété qui peut s'exprimer analytiquement, quoique la quantité V & la courbe smS ſoient diſcontinues; & ſon expreſſion eſt $\partial V \delta z - \delta V \partial z = 0$, différentielle de l'équation $z = \varphi V$, comme je vais le démontrer dans le théorème ſuivant.

THÉORÈME I.

Quelle que ſoit la courbe génératrice, par cela ſeul qu'une ſurface aura été conſtruite par le procédé du Problème précédent, c'eſt-à-dire, d'après cette ſeule propriété qu'étant coupée par une ſurface cylindrique verticale dont l'équation ſoit $V = \alpha$, elle donnera pour ſection une courbe plane & horizontale, l'on aura dans tous les points de cette ſurface, l'équation aux différences partielles $\partial V \delta z = \delta V \partial z$.

DÉMONSTRATION.

Soient, comme dans la figure précédente, PAD & PAB le plan horizontal & le plan vertical auxquels eſt rapportée la ſurface; ſoit $AP = x$ & $Pp = dx$; par le point P ſoit Fig. 2.

mené perpendiculairement aux x un plan vertical qui coupera le plan horizontal ſuivant la droite indéfinie PT, le plan vertical ſuivant PE, & la ſurface conſtruite ſuivant une courbe EMF; ſoit $PQ = y$; par le point Q ſoit élevée l'ordonnée verticale QM, & par le point M ſoit menée une tangente à la courbe EMF, qui prolongée rencontrera le plan horizontal quelque part en un point T de la droite PT. Par le point Q ſoit mené de même perpendiculairement aux y un plan vertical qui coupera le plan horizontal ſuivant une droite Qt, la ſurface ſuivant une courbe dont la tangente en M rencontrera la droite Qt quelque part en un point t; & la droite tT ſera l'interſection du plan horizontal par le plan tangent à la ſurface au point M. Enfin ſoient Qq la courbe dont l'équation eſt repréſentée par $V = \alpha$, & Mm l'interſection de la ſurface, par la ſurface cylindrique qui auroit Qq pour baſe. Cela poſé, il eſt clair, d'après la conſtruction, que la courbe Mm eſt horizontale & parallèle à Qq; de plus, ſon élément au point M eſt dans le plan tangent, & par conſéquent parallèle à Tt; donc Qq eſt parallèle à Tt; donc les triangles tQT & $QQ'q$ ſont ſemblables & donneront $tQ : QT :: QQ' : Q'q$. Or, des deux ſous-tangentes tQ & QT, la première eſt égale à $\frac{z\,dx}{\delta z}$, & la ſeconde à $\frac{-z\,dy}{\partial z}$; de plus, le rapport de QQ' à $Q'q$ eſt égal à celui de dx à dy pris dans l'équation $V = \alpha$ de la courbe Qq, & ce rapport ſe trouvera en différentiant l'équation $V = \alpha$, qui donne $dV = 0$, ou $dx \,.\, \frac{\delta V}{dx} + dy\,\frac{\partial V}{dy} = 0$, & par conſéquent $dx : dy = -\frac{\partial V}{dy} : \frac{\delta V}{dx}$; donc, en ſubſtituant ces valeurs, l'analogie précédente deviendra $\frac{z\,dx}{\delta z} : -\frac{z\,dy}{\partial z} :: -\frac{\partial V}{dy} : \frac{\delta V}{dx}$, d'où l'on tirera $\partial V \delta z = \delta V \partial z$, équation différentielle de $z = \phi V$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

COROLLAIRE.

Dans cette démonſtration, il n'a nullement été queſtion de la courbe génératrice, elle n'eſt fondée que ſur cette propriété de la ſurface courbe, qu'étant coupée par une ſurface cylindrique, dont l'équation eſt $V = \alpha$, l'interſection eſt une courbe plane & horizontale. Donc, la concluſion auroit également lieu, quand même la courbe génératrice ſeroit diſcontinue: or, on peut employer une courbe diſcontinue pour la conſtruction; donc, il y a des ſurfaces diſcontinues qui ſatisfont dans chacun de leurs points à cette équation $\partial V \delta z = \delta V \partial z$.

PROBLÈME II.

Conſtruire l'équation $z = M + N \varphi V$, *de manière que la ſurface qui en ſera le lieu géométrique, paſſe par une courbe quelconque donnée, continue ou diſcontinue, & dont les projections aient pour ſymboles d'équations* $y = Fx$ *&* $z = fx$. *Les quantités* M, N *&* V *étant des fonctions données, analytiques ou non, des deux variables* x *&* y.

SOLUTION.

Soient, comme dans la figure première, *PAD* & *PAB* le plan horizontal & le plan vertical, auxquels eſt rapportée la ſurface; *smS* la courbe donnée, par laquelle doit paſſer la ſurface; *rqR* & *sm'S'* ſes deux projections. Soient *AP* & *PQ* les deux coordonnées qui répondent au point *Q*, pris à volonté, pour lequel il faille conſtruire l'ordonnée verticale *QM*. Cela poſé, on conſtruira de même que dans le Problème I, la courbe *Qq* dont l'équation ſoit $V = \alpha$, la conſtante α étant telle que cette courbe paſſe par le point *Q*; ce qui eſt toujours poſſible, ſoit que la quantité *V* ſoit analytique ou non. On concevra par la courbe *Qq* une ſurface cylindrique verticale, prolongée juſqu'à la rencontre de la ſurface, & qui la coupera ſuivant une courbe *Mm*, dont la verticale *QM* ſera une ordonnée. Soit *M'm'* Fig. 3.

la projection verticale de cette courbe; on aura son équation en éliminant y de l'équation $z = M + N\varphi V$ à l'aide de l'équation $V = \alpha$. Soient donc M' & N' ce que deviennent les quantités M & N, en y mettant pour y sa valeur prise dans l'équation $V = \alpha$. L'équation de la courbe $M'm'$ sera $z = M' + N'A$, A étant une constante arbitraire dont la détermination dépend de la considération suivante.

La courbe Mm étant sur la surface à construire, doit nécessairement couper la courbe donnée smS, quelque part en un point m, dont la projection horizontale est le point q, intersection de la courbe Qq avec la courbe rqR. Donc, si l'on mène $q\pi$ parallèle aux y, & que l'on élève la verticale indéfinie $\pi l'$, cette droite rencontrera la courbe $s m' S'$ en un point m' qui sera la projection verticale du point m, & par lequel passera nécessairement la courbe $M'm'$. Ainsi l'équation de la courbe $M'm'$ est $z = M' + N'A$, A étant telle que la courbe passe par le point déterminé m'.

Pour construire cette équation, il faut d'abord construire les quantités M' & N'. Imaginons dans l'espace deux surfaces courbes, dont les équations aient pour symboles $z = M$ & $z = N$; ces deux surfaces continues ou discontinues doivent être données ou constructibles, puisque les quantités M & N sont supposées données; concevons ensuite que les deux surfaces soient coupées par la surface cylindrique verticale qui a Qq pour base, la première suivant Nn, & la seconde suivant la courbe Ll; ces deux courbes seront constructibles, de même que leurs projections verticales $N'n'$ & $L'l'$. Or, les équations de ces projections sont ce que deviennent les équations $z = M$ & $z = N$ en éliminant y à l'aide de l'équation $V = \alpha$; donc, elles seront $z = M'$ & $z = N'$; donc, si l'on construit les courbes $N'n'$ & $L'l'$, les quantités M' & N' seront construites. Quant à la constante indéterminée A, il faut que dans la courbe $M'm'$, pour l'abscisse $x = A\pi$, on ait $z = \pi m'$; mais pour la même abscisse on a $M' = \pi n'$ & $N' = \pi l'$; donc, on aura $\pi m' = \pi n' + \pi l' \times A$; d'où l'on tire $A = \frac{\pi m' - \pi n'}{\pi l'} = \frac{m'n'}{\pi l'}$.

Actuellement que les quantités M', N' & A sont construites, il sera facile de construire l'équation $z = M' + N'A$, & par conséquent d'avoir la courbe $M'm'$. On élèvera la verticale PM', on portera PM' de Q en M, & le point M appartiendra à la surface demandée.

La même courbe $M'm'$ servira pour tous les points de la courbe Qq; mais lorsqu'il s'agira de construire l'ordonnée verticale de la surface, qui répondra à un autre point Q', il faudra mener une nouvelle courbe $Q'q'$, dont l'équation sera $V = \alpha'$, ce qui donnera une nouvelle courbe $M'm'$, qui servira à déterminer toutes les ordonnées correspondantes aux différens points de la courbe $Q'q'$; & ainsi de suite.

COROLLAIRE.

Toute surface construite par le procédé précédent, quelle que soit la courbe par laquelle on l'ait fait passer pour satisfaire aux conditions de la question, aura donc cette propriété, qu'étant coupée par une surface cylindrique dont l'équation soit $V = \alpha$, elle donnera pour section, une courbe dont la projection verticale aura pour symbole d'équation $z = M' + N'A$, M' & N' étant ce que deviennent les quantités M & N, après en avoir éliminé y à l'aide de l'équation $V = \alpha$, & A étant une constante. C'est cette propriété qui, quoique la surface puisse être discontinue, peut avoir une expression analytique, & qui, comme je vais le démontrer, est réellement exprimée par l'équation aux différences partielles de $z = M + N\varphi V$.

THÉORÈME II.

Quelle que soit la courbe génératrice, par cela seul que dans la construction d'une surface on aura suivi le procédé du Problème précédent, ou par cela seul qu'en coupant la surface par une surface cylindrique dont l'équation soit $V =$ const. on a une courbe dont la projection verticale a pour symbole d'équation $z = M' + N'A$, on aura pour chacun de ses points l'équation Fig. 4.

$$\partial V[N\delta z - N\delta M - z\delta N + M\delta N]$$
$$= \delta V[N\partial z - N\partial M - z\partial N + M\partial N].$$

DÉMONSTRATION.

Fig. 4. Concevons cette ſurface conſtruite & rapportée aux deux plans PAD & PAB, l'un horizontal & l'autre vertical. Soit $AP = x$, $Pp = dx$; par les points P & p ſoient menés perpendiculairement aux x deux plans infiniment proches, qui couperont le plan horizontal ſelon les droites indéfinies PH & ph, le plan vertical ſuivant PE & pe, & la ſurface courbe, ſuivant les deux courbes EMH & emh. Soit $PQ = y$, & par le point Q ſoit élevée la verticale QM, qui coupera la courbe EMH en un point M, par lequel ſoit imaginée la tangente MT, prolongée juſqu'à ce qu'elle rencontre le plan horizontal quelque part en un point T, qui ſera néceſſairement ſur la droite PH, ou ſur ſon prolongement. Par la verticale QM ſoit de même imaginé un plan vertical perpendiculaire aux y, qui coupera le plan horizontal en une droite $Q'Qt$, parallèle aux x, & la ſurface en une courbe dont la tangente en M rencontrera la droite Qt quelque part en t. Par conſéquent la droite tT ſera la ſection du plan horizontal par le plan tangent à la ſurface au point M. Soit Qq la courbe qui a pour ſymbole d'équation $V = \alpha$; Mm un élément de l'interſection de la ſurface par la ſurface cylindrique qui auroit Qq pour baſe; & Gg la projection verticale de cet élément. Par le point t ſoit mené parallèlement à l'élément Mm une droite tR qui ſera néceſſairement dans le plan tangent, & ſoit prolongée cette droite juſqu'à la rencontre de la tangente MT, qu'elle coupera en un point R, par lequel ſoit abaiſſée la verticale Rr; ſi l'on mène tr, on aura la projection horizontale de tR. Soit menée $t\theta$ perpendiculairement aux x, & θK parallèle à l'élément Gg; cette droite ſera la projection verticale de tR, & l'on aura par conſéquent $PK = Rr$, & la droite KR ſera horizontale; enfin ſoit menée la petite horizontale Gg.

Cela posé, les deux triangles $QQ'q$ & tQr seront semblables & donneront $QQ' : Q'q :: tQ : Qr$; or, on a vu (Théorème I), que le rapport de QQ' à $Q'q$ est égal à celui de $-\frac{\partial V}{dy}$ à $\frac{\delta V}{dx}$; de plus la sous-tangente tQ est $= \frac{z\,dx}{\delta z}$; donc on aura (A) $-Qr \times \partial V . \delta z = z\,dy\,\delta V$. Pour trouver l'expression de $Qr = VR$, il faut considérer que les triangles MVR & MQT sont semblables & donnent $-\partial z : dy :: (z - Rr) : VR$; d'où l'on tire VR ou $Qr = -(z - Rr)\frac{dy}{\partial z}$. Mais Rr est $= PK$, & les deux triangles semblables θPK & Ggg donnent $Gg : gg :: \theta P$ (ou $\frac{z\,dx}{\delta z}$) $: PK$; d'où l'on tire PK ou $Rr = \frac{z\,dx}{\delta z} . \frac{gg}{Gg}$; donc, en substituant cette valeur, on aura

$$Qr = -\left[z - \frac{z\,dx}{\delta z} . \frac{gg}{Gg}\right]\frac{dy}{\partial z},$$

& par conséquent l'équation (A) deviendra

$$(B)\quad \left[\delta z - dx . \frac{gg}{Gg}\right]\partial V = \partial z\,\delta V,$$

dans laquelle il ne s'agit plus que de trouver le rapport de gg à Gg, ou celui de dz à dx pris dans l'équation de la courbe Gg.

Cette équation est par hypothèse $z = M' + N'A$, ou $\frac{z - M'}{N'} = A$; d'où l'on tire par la différentiation, dz ou $gg = dM' + \frac{z - M'}{N'}dN'$; donc, l'équation (B) revient à celle-ci,

$$(C)\ [N'\delta z - N'dM' + (z - M')\,dN']\,\partial V = N'\partial z\,\delta V.$$

Il reste donc à substituer aux quantités M', N', dM' & dN' leurs valeurs en quantités données immédiatement.

Or, puisque les quantités M' & N' sont ce que deviennent

respectivement M & N, en éliminant y à l'aide de l'équation $V = \alpha$, si l'on imagine les surfaces qui auroient pour symboles d'équations $M = z$ & $N = z$, il est évident que M' & N' sont les ordonnées de ces surfaces considérées
Fig. 3. dans la surface cylindrique qui a Qq pour base; donc *(fig. 3)* la droite QN considérée comme ordonnée de la courbe Nn, sera $= M'$; de même la droite QL regardée comme ordonnée de la courbe Ll sera $= N'$. Mais cette abstraction n'empêche pas que les droites QN & QL ne soient, pour le point Q, les ordonnées des surfaces dont les équations sont représentées par $M = z$ & $N = z$; donc, dans l'équation *(C)* il faudra mettre M à la place de M', & N à la place de N'.

Fig. 4. Il n'en est pas de même des différentielles dM' & dN'; ces quantités ne sont point égales à dM & dN. En effet, dM & dN sont les différentielles des ordonnées QN & QL, prises de quelque manière que puisse varier x & y, c'est-à-dire, sans qu'il y ait de rapport déterminé entre dx & dy, au lieu que dM' & dN' sont les différentielles de ces ordonnées considérées comme mobiles sur la surface cylindrique verticale, c'est-à-dire, prises dans cette hypothèse que si AP devient Ap, PQ devienne pk; enfin elles sont les différentielles partielles des ordonnées M & N, prises en regardant V comme constant; donc, on aura les quantités dM' & dN' en substituant à la place de $\frac{dy}{dx}$ dans dM & dN sa valeur prise dans l'équation $dV = 0$ ou $dx \cdot \frac{\delta V}{dx} + dy \frac{\partial V}{dy} = 0$.

Or, on a $dM = dx \frac{\delta M}{dx} + dy \frac{\partial M}{dy}$

& $dN = dx \frac{\delta N}{dx} + dy \frac{\partial N}{dy}$;

on aura donc $dM' = \delta M - \partial M \frac{\delta V}{\partial V}$

& $dN' = \delta N - \partial N \frac{\delta V}{\partial V}$;

& ſubſtituant ces valeurs dans l'équation *(C)*, on aura

$$\partial V[N\delta z - N\delta M - z\delta N + M\delta N]$$
$$= \delta V[N\partial z - N\partial M - z\partial N + M\partial N]$$

Donc, &c. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

Cette démonſtration eſt indépendante de la nature de la courbe qui a dû ſervir à la conſtruction de la ſurface; donc, il eſt indifférent à la vérité du Théorème, que cette courbe ſoit ou ne ſoit pas continue. Or, on peut employer une courbe diſcontinue pour cette conſtruction; donc, il y a des ſurfaces diſcontinues qui ſatisfont à l'équation précédente aux différences partielles.

REMARQUES.

Dans tout ce qui précède, j'ai ſuppoſé, non-ſeulement que la courbe donnée fut diſcontinue & tracée au haſard, mais encore que la quantité V & les facteurs M & N ne fuſſent pas analytiques. La première hypothèſe étoit la ſeule néceſſaire; je n'ai fait la ſeconde que pour une plus grande généralité, & je pouvois m'en diſpenſer. Il eſt bien en effet un grand nombre de queſtions où l'on eſt obligé de ſatisfaire à des conditions diſcontinues, mais je n'en connois pas où l'on doive employer des quantités M, N & V qui ne ſoient pas ſoumiſes à la loi de continuité.

J'ai encore ſuppoſé que les quantités M, N & V fuſſent ſimplement fonctions des deux variables x & y, & qu'elles puſſent par conſéquent être repréſentées par les ordonnées de ſurfaces courbes données; mais il peut arriver que ces quantités ſoient en même temps fonctions de z, & qu'elles ne puiſſent plus être repréſentées que par des aires de ſurfaces courbes, ou par des ſolides variables, & terminés par des limites données. En effet, les équations $M = \omega$, $N = \omega$ & $V = \omega$ . . . &c. étant alors à quatre variables, ne peuvent plus être conſtruites ſimplement avec des lignes droites,

parce que l'eſpace ne nous offre que trois dimenſions, & que ces équations en ont quatre. Or, l'uſage des quadratures & des cubatures eſt peu commode dans les conſtructions, ſur-tout lorſqu'on eſt obligé d'opérer ſur des aires & des ſolides diſcontinus. Néanmoins il ſe préſente ici deux cas, ou les quantités *M*, *N* & *V* ſont analytiques, ou elles ſont diſcontinues; dans le premier cas, l'analyſe nous donne des moyens de conſtruire les équations où elles ſe trouvent, d'une manière analogue à celle que j'ai déjà employée; dans le ſecond, outre que je ne connois aucune queſtion qui le produiſe, il ne ſera pas plus difficile de conſtruire l'équation, que de repréſenter les quantités *M*, *N* & *V*, qui ne peuvent pas être données ſans être repréſentées. Ainſi je me contenterai de conſtruire les intégrales dans l'hypothèſe que ces grandeurs ſoient analytiques, ce qui n'empêche pas que la courbe donnée ne puiſſe être diſcontinue. Je commence par le cas le plus ſimple.

PROBLÈME III.

Conſtruire l'équation $z = \varphi V$ *de manière que ſon lieu géométrique paſſe par une courbe donnée à volonté, & dont les projections horizontale & verticale aient pour ſymboles d'équations* $y = Fx$ *&* $z = fx$, *les fonctions* Fx *&* fx *étant continues ou diſcontinues, mais la quantité* V *étant une fonction analytique & donnée des trois variables* x, y *&* z.

SOLUTION.

Fig. 5. Soient *AP*, *AD* & *AB* les axes des trois coordonnées rectangulaires x, y & z; *smS* la courbe donnée par laquelle doit paſſer la ſurface à conſtruire, *rqR* & *sgS'* les projections de cette courbe, & *Q* le point pour lequel il s'agit de conſtruire l'ordonnée verticale *QM* de la ſurface. Cela poſé, ſuppoſons pour un inſtant que cette verticale ſoit connue, & que l'on ait $QM = a$; il eſt évident que ſi l'on mettoit a à la place de z dans V, qui par-là deviendroit une fonction de x & y que j'indique par V'; que ſi l'on conſtruiſoit

conſtruiſoit la courbe Qq dont l'équation fut $V' = \alpha$, la conſtante α étant telle que la courbe paſſât par le point Q, & qu'enſuite on imaginât la ſurface cylindrique qui auroit Qq pour baſe, cette ſurface couperoit la ſurface demandée en une courbe Mm qui ſeroit plane & horizontale, puiſque ſa projection verticale Gg ſeroit une droite horizontale, dont l'équation ſeroit $z = const.$ Il eſt clair de plus, 1.° que cette valeur conſtante de z ſeroit $z = a$; 2.° qu'ayant mené $q\pi$ parallèle aux y, & élevé la verticale πg, on auroit $\pi g = qm = QM = PG = a$; mais l'on ne connoît pas cette valeur de z, qui eſt au contraire l'objet du Problème.

Soit donc fait z égale à une certaine conſtante a' priſe à volonté, & que je ſuppoſe repréſentée par PG''; ſoit miſe cette valeur dans V, qui par-là deviendra $'V$; ſoit conſtruite la courbe Qq'' dont l'équation ſoit $'V = \alpha'$, cette conſtante étant telle que la courbe paſſe par le point Q; ſoit menée $q''\pi''$ parallèle aux y, & élevée la verticale $\pi'' h'$, qui rencontrera la droite horizontale menée par le point G'' en un point g''; cela fait, ſi les points g'' & h' coïncidoient, la valeur de $z = PG'' = a'$ ſeroit bonne, & l'on auroit $PG'' = QM$. Mais ſuppoſons que les points g'' & h' ne ſe confondent pas, on fera z égale à une autre conſtante a'' qu'on portera de P en G', on mettra a'' à la place de z dans V, qui deviendra $''V$, & l'on conſtruira une nouvelle courbe Qq' qui aura pour équation $''V = \alpha''$; cette conſtante faiſant paſſer la courbe par le point Q, on mènera $q'\pi'$ parallèle aux y, & l'on élevera la verticale $\pi' h'$ qui coupera la droite horizontale menée par le point G' quelque part en un point g'. On continuera ainſi de ſuite à déterminer par le même procédé tant de points $g''g'g$...&c. qu'on voudra, par leſquels on fera paſſer la courbe $g''g'g$, qui coupera sgS' quelque part en un point g, par lequel on abaiſſera la verticale $g\pi$, on fera $QM = \pi g$, & le point M ſera dans la ſurface demandée. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

Quelle que ſoit la courbe donnée smS, une ſurface conſtruite par le procédé que je viens de décrire, aura donc cette propriété, qu'étant coupée par une ſurface dont l'équation ſera $V =$ conſt. quelconque, elle donnera pour interſection une courbe plane & horizontale. C'eſt cette propriété qui peut s'exprimer analytiquement, quoique la courbe donnée puiſſe être diſcontinue; & ſon expreſſion eſt l'équation différentielle de la propoſée $z = \varphi V$, c'eſt-à-dire, $\partial V \delta z = \delta V \partial z$, comme on le verra dans la propoſition ſuivante.

THÉORÈME III.

Toute ſurface conſtruite par le procédé du Problème précédent, & qui par conſéquent aura la propriété d'être coupée ſuivant une courbe plane & horizontale par toute ſurface qui aura pour équation, V (fonction de x, y & z) $=$ conſt. donnera dans chacun de ſes points $\partial V \delta z = \delta V \partial z$.

DÉMONSTRATION.

Fig. 2. Tout étant de même dans la figure 2 que pour le Théorème I, ſoit Mm l'interſection de la ſurface conſtruite par celle qui auroit pour équation $z =$ certaine conſtante, il eſt évident que la projection horizontale Qq de cette courbe aura pour équation $V' = \alpha$, & que tout ce qui a été dit dans la démonſtration du Théorème I, peut s'appliquer ici; car les triangles $QQ'q$ & tQT ſeront toujours ſemblables & donneront de même $\partial V' \delta z = \delta V' \partial z$. Mais l'on a $\delta V' = \delta V$ & $\partial V' = \partial V$; en effet, pour avoir δV il faut différentier V en regardant z & y comme conſtans, de même pour avoir ∂V, il faut différentier V ſans faire varier x & z; or dans V', z eſt déjà conſtant par conſtruction, ou, pour mieux dire, V' n'eſt autre choſe que V où l'on regarde z comme conſtant; donc, $\delta V'$ ſera égale à la différentielle de V, priſe en regardant z & y comme conſtans; donc, on aura $\delta V' = \delta V$, pareillement $\partial V' = \partial V$;

donc, l'équation aux différences partielles que l'on vient de trouver, eſt la même que celle-ci $\partial V \delta z = \delta V \partial z$.

COROLLAIRE I.

Il ſuit de la comparaiſon de ce Théorème avec le Théorème I, que ſoit que la quantité V renferme ou ne renferme pas la variable z, ſi une ſurface ſatisfait à l'équation $z = \varphi V$, elle ſatisfera auſſi à celle-ci $\partial V \delta z = \delta V \partial z$.

COROLLAIRE II.

Donc, *ſi l'équation aux différences partielles* M $\frac{\delta z}{dx}$ + N $\frac{\partial z}{dy} = 0$, *dans laquelle les facteurs* M *&* N *ſont fonctions de* x, y *&* z, *eſt intégrable en traitant comme conſtante la quantité* z *qui ſe trouve dans les facteurs, & que ſon intégrale ſoit* $z = \varphi V$, *cette équation ſera auſſi intégrable en regardant* z *comme variable, & ſon intégrale ſera encore* $z = \varphi V$.

Quoique cette propoſition ſoit étrangère à l'objet de ce Mémoire, je la crois d'une aſſez grande utilité pour trouver ici ſa place. On vient d'en voir la démonſtration par des conſidérations géométriques, on peut s'en aſſurer encore par la différentiation, & je penſe qu'on ne ſera pas fâché d'en voir la démonſtration analytique par l'intégration.

Soit $dz = p\,dx + q\,dy$, la propoſée $M \frac{\delta z}{dx} + N \frac{\partial z}{dy} = 0$, deviendra $Mp + Nq = 0$, & donnera par la ſubſtitution

$$dz = p\,dx - \frac{Mp}{N} dy = \frac{p}{N} [N dx - M dy].$$

Soit actuellement ω le facteur qui rendroit la formule $N dx - M dy$ différentielle complète, en regardant z comme conſtant, & ſoit V ſon intégrale, on aura

$$dz = \frac{p}{N\omega} [N\omega\,dx - M\omega\,dy] = \frac{p}{N\omega} [\delta V + \partial V],$$

& par conſéquent ſi V n'étoit pas fonction de z, on auroit $z = \varphi V$. Mais en regardant z comme variable, la quantité

$\delta V + \partial V$ n'eſt pas une différentielle complète, il manque le terme $'dV$, $'d$ étant le caractère de la différentielle d'une quantité priſe en ne faiſant varier que z; ſoit donc ajouté de part & d'autre le terme $\frac{p}{N\omega}\,'dV$, on aura

$$dz + \frac{N\omega}{p}\,'dV \text{ ou } \left[dz + \frac{N\omega}{p}\,\frac{'dV}{dz}\,dz\right]$$
$$= \frac{p}{N\omega}\left[\delta V + \partial V + 'dV\right] = \frac{p}{N\omega}\,dV,$$

ou enfin $dz = \dfrac{p}{N\omega + p\,\frac{'dV}{dz}}\,.\,dV$, dont l'intégrale eſt encore $z = \varphi V$. Donc, &c.

En effet, on ſait que l'intégrale de $dy\,\delta z - a\,dx\,\partial z = 0$ eſt $z = \varphi\,(ax + y)$, & l'intégrale de $dy\,\delta z - z\,dx\,\partial z = 0$ eſt $z = \varphi\,(zx + y)$. Ces deux intégrales, comme leurs différentielles, ne diffèrent l'une de l'autre, qu'en ce que dans la ſeconde, la variable z tient par-tout la place qu'occupe la conſtante a dans la première. De même, l'intégrale de $dy\,\delta z - Z\,dx\,\partial z = 0$, Z étant une fonction quelconque de z, ſera $z = \varphi\,(Zx + y)$.

On pourra m'objecter que lorſque j'ai ajouté aux deux membres de l'équation $dz = \frac{p}{N\omega}\,[\delta V + \partial V]$, la quantité $\frac{p}{N\omega}\,'dV$, je pouvois encore leur ajouter le terme $\frac{p}{N\omega}\,d.\psi.z$; que par-là l'équation ſeroit devenue

$$dz + \frac{p}{N\omega}\,\frac{'dV}{dz}\,dz + \frac{p}{N\omega}\,d.\,\frac{\psi z}{dz}\,dz = \frac{p}{N\omega}\,[dV + d\psi z],$$

dont l'intégrale eſt $z = \varphi\,(V + \psi z)$, & non pas $z = \varphi V$.

Je répondrai que tant que la fonction φ reſtera arbitraire comme elle l'eſt ici, il ſera indifférent d'écrire $z = \varphi V$ ou $z = \varphi\,(V + \psi z)$, parce que les deux équations ſe ſuppoſent réciproquement l'une l'autre. Pour le démontrer,

ſoit $'\varphi$ le caractère de la fonction φ renverſée, c'eſt-à-dire, qu'ayant $z = \varphi V$ l'on ait $V = '\varphi z$; cela poſé, l'équation $z = \varphi (V + \psi z)$ donnera $V + \psi z = '\varphi z$, ou $V = '\varphi z - \psi z$. Or, la fonction $'\varphi$ étant arbitraire, on a $'\varphi z - \psi z$ = fonction arbitraire de z, $= '\varphi z$; donc, on aura $V = '\varphi z$, & par conſéquent $z = \varphi V$. Ainſi cette objection n'infirme en aucune manière la vérité de la propoſition, & j'en tire la concluſion ſuivante.

COROLLAIRE III.

Puiſque l'équation $z = \varphi V$, à laquelle ſatisfait la ſurface conſtruite par le Problème précédent, eſt la même que celle-ci $z = \varphi (V + \psi z)$, tant que la fonction φ ſera arbitraire, il s'enſuit que cette ſurface aura encore la propriété d'être coupée ſuivant une courbe plane & horizontale, par une ſurface dont l'équation ſera $V + \psi z =$ conſt. ou $V = \psi z$, ou enfin $z = '\psi V$. *Donc, deux ſurfaces conſtruites par le procédé précédent, rapportées à la même origine des coordonnées, & dont les équations ſeront par conſéquent* $z = \varphi V$ & $z = \psi V$, *auront la propriété de ſe couper réciproquement ſuivant une courbe horizontale.* Voilà la propriété générale qui eſt exprimée par l'équation $\partial V \delta z = \delta V \partial z$; je n'avois fait juſqu'ici qu'en développer des cas particuliers.

Cette propriété peut ſe démontrer encore directement par l'analyſe. En effet, ſoit éliminée z des deux équations $z = \varphi V$ & $z = \psi V$, on aura $\varphi V = \psi V$ pour équation de la projection horizontale de l'interſection des deux ſurfaces; or, l'équation $\varphi V = \psi V$ donne $V =$ conſt. on aura donc $z =$ conſt. pour équation de la projection verticale de cette interſection; donc, &c.

PROBLÈME IV.

Conſtruire l'équation générale $M = \varphi V$, *de manière que la ſurface qui en ſera un lieu géométrique, paſſe par une courbe à double courbure, continue ou diſcontinue, mais donnée, & dont les*

projections horizontale & verticale aient pour symboles d'équations y = Fx *&* z = fx; *les quantités* M *&* V *étant des fonctions analytiques & données des trois variables* x, y *&* z.

SOLUTION.

Soient, comme dans les figures précédentes, *AP, AD* & *AB* les trois axes des coordonnées rectangulaires, *smS* la courbe donnée par laquelle doit passer la surface à construire, *rqR* & *sgS'* les projections de cette courbe que je suppose construites, & *Q* le point pour lequel il s'agit de construire l'ordonnée *QM* de la surface. Cela posé, imaginons une surface courbe dont l'équation soit $V = \alpha$, α étant une constante dont la détermination dépend des considérations suivantes; cette surface coupera la surface demandée en une courbe dont la projection horizontale aura pour équation ce que devient la proposée $M = \varphi V$ en y substituant pour z sa valeur prise dans $V = \alpha$, & la projection verticale de cette courbe aura pour équation ce que devient $M = \varphi V$ en mettant pour y sa valeur prise dans $V = \alpha$. Soient donc $'M$ la fonction de x & y, que devient la quantité M en éliminant z à l'aide de $V = \alpha$, & M' la fonction de x & z que devient la même quantité en éliminant y, il est évident que les équations des projections de la courbe d'intersection seront

$'M = A$ pour la projection horizontale,

& $M' = A$ pour la projection verticale,

A étant une constante indéterminée & la même pour les deux équations.

Nous avons donc deux constantes indéterminées dans ces équations, 1.° α qui entre dans $'M$ & M'; 2.° la quantité A; supposons que l'une de ces constantes, α, par exemple, soit déterminée, ou, pour mieux dire, donnons à α une certaine valeur prise à volonté, & soit construite sur le plan horizontal la courbe Qq'' qui ait pour équation $'M = A$, la constante A étant telle que cette courbe passe par le point

Q; ſoit auſſi conſtruite ſur le plan vertical la courbe $G''g''$ qui ait pour équation $M' = A$, A ayant la valeur qui lui convient pour ſatisfaire à la courbe Qq'', c'eſt-à-dire, A étant ce que devient $'M$ en mettant AP pour x, & PQ pour y; enfin ſoit $N'n'$ l'interſection de la ſurface demandée par celle qui a pour équation $V = \alpha$, il eſt évident que ſi α avoit ici la valeur qui lui convient, la courbe $N'n'$ couperoit la courbe donnée smS en un point dont la projection horizontale ſeroit en q''; ou, ce qui revient au même, qu'ayant mené $q''\pi''$ parallèle aux y, & élevé la verticale $\pi''h'$, les points g'' & h' devroient coïncider. La queſtion eſt donc réduite à donner à α une valeur telle que ces deux points ſe confondent.

Pour cela, ſoit donné à α une autre valeur un peu différente; ſoient conſtruites les nouvelles courbes Qq' & $G'g'$ dont les équations ſoient $'M = A$ & $M' = A$, α ayant ſa nouvelle valeur dans $'M$ & M', & A étant toujours telle que la courbe Qq' paſſe par le point Q, ſoit menée $q'\pi'$ parallèle aux y, & élevée la verticale $\pi'g'$, ce qui donnera un nouveau point g'. Soit donnée à α une troiſième valeur pour avoir un autre point g, & ainſi de ſuite. Par tant de points g'', g', g.....&c. qu'on voudra, déterminés & conſtruits de la même manière, ſoit menée la courbe $g''g'g$ qui rencontrera sgS' en un point g, par lequel on abaiſſera la verticale $g\pi$; ſoit menée πq parallèle aux y, & qui coupera la courbe donnée rqR en un point q; enfin ſoit conſtruite la courbe Qq qui ait pour équation $'M = A$, les deux conſtantes α & A ayant des valeurs telles que cette courbe paſſe par les deux points déterminés Q & q, je dis que la valeur de α qu'on aura trouvée, ſatisfera à la queſtion. Car ſi on conſtruit la courbe Gg, α & A ayant dans ſon équation $M' = A$, les valeurs qui ſatisfont à la courbe Qq, cette courbe paſſera par le point g; donc, ayant élevé la verticale PG, ſi l'on porte PG de Q en M, le point M ſera dans la ſurface demandée.

En effet, ſoit Mm la courbe dont les projections horizontale

& verticale sont Qq & Gg, cette courbe sera sur une des surfaces qui satisfont à l'équation $M = \varphi V$, puisqu'elle est l'intersection d'une pareille surface avec une autre dont l'équation est $V = \alpha$; de plus, cette courbe sera sur celle de ces surfaces qui passe par la courbe smS, puisque la courbe Mm & la courbe smS se coupent, ce dont on peut s'assurer en remarquant que le point q est la projection commune de deux points qui se trouvent chacun sur une des courbes Mm & smS, & dont le point g est la projection verticale commune. Or, deux points qui ont mêmes projections horizontale & verticale, se confondent.

Donc, &c.

COROLLAIRE.

Quelle que puisse être la courbe donnée smS, qu'elle soit soumise ou non à la loi de continuité, la surface construite par le procédé précédent, n'en aura pas moins cette propriété, que si on la coupe par une surface courbe, dont l'équation soit $V =$ constante quelconque, on aura pour section une courbe à double courbure, dont les projections horizontale & verticale auront pour équation, la première $'M = A$, & la seconde $M' = A$, $'M$ étant ce que devient la fonction M donnée en x, y & z, en substituant pour z sa valeur prise dans $V =$ const. & M' ce que devient la même quantité M, en éliminant y à l'aide de l'équation $V =$ const. C'est cette propriété qui peut s'exprimer analytiquement, quoique la surface soit discontinue; & son expression est l'équation aux différences partielles de $M = \varphi . V$.

Avant que de le démontrer, différentions d'abord cette équation.

En ne faisant varier que x, on a $\delta M = \delta V \varphi' V$,

En ne faisant varier que y, on a $\partial M = \partial V \varphi' V$,

En ne faisant varier que z, on a $'d M = 'd V \varphi' V$;

donc, en éliminant la quantité arbitraire $\varphi' V$, on aura les trois équations suivantes aux différences partielles.

(A).

(A) $\partial V \delta M - \delta V \partial M = 0.$

(B) $'d V \delta M - \delta V 'd M = 0.$

(C) $'d V \partial M - \partial V 'd M = 0.$

dont deux étant données, la troisième s'ensuit nécessairement.

Chacune de ces équations n'est pas la différentielle complète de l'équation $M = \varphi V$; car la première (A), ne comprend pas les différentielles partielles de V & de M prises par rapport à z, & par conséquent seroit la même que s'il n'y avoit point de z dans V & dans M; de même, l'équation (B) qui ne renferme pas de différentielles prises en ne faisant varier que y, seroit la même quand même il n'y auroit point de y dans les quantités M & V; enfin, la troisième équation (C), ne renfermant point de quantités δM, δV, suppose que les fonctions M & V ne contiennent point x. Ainsi, c'est le système des trois équations (A), (B) & (C), ou tout au moins des deux quelconques d'entr'elles, qu'il faut regarder comme la différentielle de l'équation $M = \varphi V$. Mais cette forme est peu commode & d'ailleurs inusitée; il faut trouver une équation unique qui tienne lieu des précédentes, & qui soit telle que deux d'entr'elles étant données, il en vienne la troisième.

Pour cela, je reprends l'équation $M = \varphi V$, & je remarque que la quantité z est une certaine fonction de x & y; d'où il suit qu'absolument parlant, les quantités M & V ne sont que des fonctions de x & y; par conséquent lorsque l'on fait varier les quantités par rapport à x, elles varient encore par rapport à z, en tant que z est fonction de x & y. Soit Δ le caractère de cette manière de différentier, la différentielle ΔM sera de cette forme $\Delta M = p\,dx + q\,\delta z$, & il est évident que le terme $p\,dx$ est celui que l'on auroit en ne faisant varier M que par rapport à dx. On aura donc $p\,dx = \delta M$; mais $q\,\delta z$ est la différentielle de M, prise en ne faisant varier que z dont on ne prend que la partie qui dépend de la variation de x; donc on aura $q\,\delta z = \frac{'dM}{dz}\,\delta z$.

Ainsi l'on aura $\Delta M = p\,dx + q\,\delta z = \delta M + \frac{'dM}{dz}\,\delta z$.

Pareillement, lorsqu'on fait varier M & V par rapport à y, elles varient encore par rapport à z, en tant que z est fonction de x & y; d'où il suit que si Δ' est le caractère de cette différentiation, on aura

$$\Delta' M = \partial M + \frac{'dM}{dz} \partial z;$$

on aura aussi $\Delta V = \delta V + \frac{'dV}{dz} \delta z$

$$\& \ \Delta' V = \partial V + \frac{'dV}{dz} \partial z.$$

Avant que d'aller plus loin, il faut bien distinguer les différentes manières de différentier représentées par les caractères δ, ∂, Δ & Δ' que j'expose très-clairement de la manière suivante.

Pour Δ, x varie seule } & z ne varie point.
Pour d, y varie seule }

Pour Δ', x varie } & z varie aussi en tant que fonction de x & y.
Pour Δ, y varie }

Cela posé, on aura $\Delta M = \Delta V \varphi' V$; on aura aussi $\Delta' M = \Delta' V \varphi' V$; éliminant l'arbitraire $\varphi' V$, on aura l'équation

$$\Delta M \cdot \Delta' V - \Delta V \cdot \Delta' M = 0;$$

substituant à la place de ces quantités leurs valeurs que nous venons de trouver, & réduisant, on trouvera pour équation différentielle unique & complète de $M = \varphi V$,

$$\text{(D)} \quad \begin{aligned} &\delta z\, [\partial V\, 'dM - {}'dV \partial M] \\ &- \partial z\, [\delta V\, 'dM - {}'dV \partial M] \\ &+ dz\, [\partial V \delta M - \delta V \partial M] = 0. \end{aligned}$$

Cette équation est la différentielle unique & complète de $M = \varphi V$, 1.° parce qu'elle renferme, comme l'équation $\Delta V . \Delta' M - \Delta' V . \Delta M = 0$, les différences partielles des quantités M & V, prises de toutes les manières possibles; 2.° parce qu'en y supposant deux des trois équations (A), (B) & (C), la troisième s'ensuit nécessairement.

Je vais faire voir actuellement que la surface précédemment construite, satisfait à cette équation.

THÉORÈME IV.

Toute surface courbe construite par le procédé du Problème précédent, & qui, quoique discontinue, jouira par conséquent de la propriété énoncée dans le commencement du Corollaire, donnera dans chacun de ses points l'équation (D).

DÉMONSTRATION.

Tout étant dans la *figure 4* comme pour le Théorème II, soit Mm l'intersection de la surface construite par la surface dont l'équation seroit $z =$ const. Cette constante étant telle que la courbe Mm passe par un certain point M; les courbes Qq & Gg qui en seront les projections horizontale & verticale, auront pour équation, la première $'M = A$, & la seconde $M' = A$. Cela posé, les triangles semblables $QQ'q$ & tQr donneront de la même manière que pour le Théorème II, $Qr = tQ \times \frac{Q'q}{QQ'}$; or, on a $tQ = z\frac{dx}{\delta z}$; de plus le rapport de QQ' à $Q'q$ est égal à celui de dx à dy pris dans l'équation de la courbe Qq, c'est-à-dire, dans l'équation $'M = A$. Soit donc différentiée cette équation, ce qui donne $d\,'M = 0$, ou parce que $'M$ est fonction de x & de y, $dx\frac{\delta' M}{dx} + dy\frac{\partial' M}{dy} = 0$, & par conséquent $\frac{dy}{dx} = -\frac{\delta' M}{dx} : \frac{\partial' M}{dy}$; donc on aura $Qr = -\frac{z\,\delta' M\,dy}{\partial' M\,\delta z}$. Fig. 4.

Pareillement, les triangles semblables Ggg & θPK donneront PK ou $Rr = \theta P\frac{gg}{Gg}$; or, on a $\theta P = tQ = \frac{z\,dx}{\delta z}$, de plus, le rapport de gg à Gg est égal à celui de dz à dx, pris dans l'équation de la courbe Gg, c'est-à-dire, dans l'équation $M' = A$; soit donc différentiée cette équation, ce qui donne $dM' = 0$, ou parce que M' est fonction de

x & de z $dx\frac{\delta M'}{dx} + dz\frac{'dM'}{dz} = 0$, & par conséquent $\frac{dz}{dx} = -\frac{\delta M'}{dx} : \frac{'dM'}{dz}$; donc, on aura $Rr = -\frac{z\delta M' dz}{'dM'\delta z}$. Mais les triangles semblables MVR & MQT donnent $-\partial z : dy :: z - Rr : VR = Qr$; donc, on aura en substituant les valeurs que l'on vient de trouver, & réduisant,

(E) $\delta z \partial' M\, 'dM' - \partial z \delta' M\, 'dM' + dz \delta M' \partial' M = 0$;

il s'agit actuellement de trouver en M & V les valeurs des quantités $\delta' M$, $\partial' M$, $\delta M'$ & $'dM'$.

La quantité $d'M$ est ce que devient la différentielle dM, lorsqu'on élimine z & dz dans l'hypothèse de $V =$ const. or, on a généralement

$$\text{(F)}\quad dM = dx\frac{\delta M}{dx} + dy\frac{\partial M}{dy} + dz\frac{'dM}{dz},$$

& l'équation $V =$ const. donne $dV = 0$, ou

$$\text{(G)}\quad dx\frac{\delta V}{dx} + dy\frac{\partial V}{dy} + dz\frac{'dV}{dz} = 0;$$

donc, en substituant dans (F) à la place de dz, sa valeur prise dans l'équation (G), on aura

$$\partial' M = \delta M + \partial M - [\delta V + \partial V]\frac{'dM}{'dV},$$

d'où l'on tirera $\delta' M = \delta M - \delta V\frac{'dM}{'dV}$

$$\& \quad \partial' M = \partial M - \partial V\frac{'dM}{'dV};$$

pareillement dM' est ce que devient la différentielle dM lorsqu'on en élimine y & dy en supposant $V =$ const. donc en substituant dans (F), à la place de dy sa valeur prise dans l'équation (G), on aura

$$dM' = \delta M + 'dM - [\delta V + 'dV]\frac{\partial M}{\partial V};$$

d'où l'on tirera $\delta M' = \delta M - \delta V\frac{\partial M}{\partial V}$,

$$\& \quad 'dM' = 'dM - 'dV\frac{\partial M}{\partial V};$$

donc, en substituant ces valeurs dans l'équation (E), on aura

$$\begin{aligned} 0 = {} & \delta z\left[\partial M - \partial V\frac{'dM}{'dV}\right]\left['dM - {}'dV\frac{\partial M}{\partial V}\right] \\ & - \partial z\left[\delta M - \delta V\frac{'dM}{'dV}\right]\left['dM - {}'dV\frac{\partial M}{\partial V}\right] \\ & + dz\left[\delta M - \delta V\frac{\partial M}{\partial V}\right]\left[\partial M - \partial V\frac{'dM}{'dV}\right]. \end{aligned}$$

Multipliant tout par $'dV\partial V$, l'équation se trouvera multiple du facteur $\partial V'dM - {}'dV\partial M$, & donnera après la division,

(D) $\delta z[\partial V'dM - {}'dV\partial M] - \partial z[\delta V'dM - {}'dV\delta M]$
$+ dz[\partial V\delta M - \delta V\partial M] = 0.$

Donc, &c.

REMARQUES.

1.° Le cas que je viens de traiter est général, & renferme tous ceux qui précèdent; donc, si dans l'équation (D) on fait les suppositions qui peuvent les ramener aux différens cas des Théorèmes I, II & III, elle doit donner les mêmes équations aux différences partielles. Par exemple, pour la ramener à l'équation du Théorème III, dont l'intégrale est $z = \varphi V$, il faut faire $M = z$ & $'dM = dz$, $\delta M = \delta z$ & $\partial M = \partial z$. Or, si l'on introduit ces valeurs dans l'équation (D), on trouve, toute réduction faite, $\partial V\delta z = \delta V\partial z$. Donc, la différentielle que j'ai donnée de $z = \varphi V$ est complète; ce qui est une nouvelle confirmation de ce que j'ai dit dans les Corollaires du Théorème III.

2.° L'équation (D), outre les différentielles partielles δz & ∂z, renferme encore la différentielle totale dz; par-là elle n'est pas sous la forme des équations ordinaires aux différences partielles, mais l'on a $dz = \delta z + \partial z$; donc, cette équation deviendra

$$\delta z\left\{\begin{matrix}\partial V'dM - {}'dV\partial M \\ + \partial V\delta M - \delta V\partial M\end{matrix}\right\} + \partial z\left\{\begin{matrix}'dV\delta M - \delta V'dM \\ + \partial V\delta M - \delta V\partial M\end{matrix}\right\} = 0,$$

ou $\delta z[\partial V[\delta M + {}'dM] - [\delta V + {}'dV]\partial M]$
$+ \partial z[\delta M[\partial V + {}'dV] - [\partial M + {}'dM]\delta V] = 0.$

Actuellement, de même que δ indique une différentielle prise en ne faisant varier que x, & ∂ en ne faisant varier que y, soit δ' une différentielle prise en ne regardant comme constant que x, & ∂' en ne regardant comme constant que y, on aura

$\delta M + 'dM = \partial' M$, $\partial M + 'dM = \delta' M$, pareillement, $\delta V + 'dV = \partial' V$ & $\partial V + 'dV = \delta' V$; donc, l'équation précédente se transformera en celle-ci,

$$\delta z [\partial V \partial' M - \partial' V \partial M] + \partial z [\delta M \delta' V - \delta' M \delta V] = 0$$

qui est la forme la plus simple que l'on puisse donner à la différentielle de l'équation $M = \varphi V$, M & V étant des fonctions des trois variables x, y & z, & la troisième variable z étant elle-même fonction des deux premières x & y, de manière qu'il n'y ait que deux variables indépendantes, & que l'équation $M = \varphi V$ appartienne à une surface courbe.

PROBLÈME V.

Construire l'équation $M = \varphi V + N \psi V$, *de manière que la surface qui en sera le lieu géométrique, passe en même temps par deux courbes continues ou discontinues, données à volonté, & dont les projections horizontales & verticales auront pour symboles d'équations,* $y = Fx$, $z = f.x$ *pour la première, &* $y = F'x$, $z = f'x$ *pour la seconde; les quantités* M, N *&* V *étant fonctions quelconques, mais analytiques & données, des trois variables* x, y *&* z.

SOLUTION.

Fig. 7. Soient AP, AD & AB les trois axes des coordonnées rectangulaires x, y & z; smS une des courbes données, dont les projections horizontale & verticale rqR & sgS ont pour symboles d'équations, la première $y = Fx$, & la seconde $z = f.x$. Soit de même LNO la seconde courbe donnée, dont les projections FKE & LGT ont pour symboles d'équations $y = F'.x$ & $z = f'x$; enfin, soient AP & PQ les coordonnées qui répondent au point Q, pris à

volonté, & pour lequel il s'agit de conſtruire l'ordonnée verticale QM. Cela poſé, imaginons une ſurface courbe dont l'équation ſeroit $V = \alpha$, la conſtante α étant telle que cette ſurface coupe la ſurface demandée ſuivant une courbe NMm, dont la projection horizontale kQq paſſe par le point Q; & ſoit $GM'g$ la projection verticale de cette courbe. Il eſt évident que ſi la courbe $GM'g$ étoit conſtruite, en élevant la verticale PM', & portant PM' de Q en M, le point M appartiendroit à la ſurface demandée. Donc, la queſtion ſe trouve réduite à trouver la valeur de α qui ſatisfait à cette condition.

Soient $'M$ & $'N$ ce que deviennent les quantités M & N, en éliminant z à l'aide de l'équation $V = \alpha$; ſoient pareillement M' & N' ce que deviennent les mêmes quantités en éliminant y; l'équation de la courbe kQq ſera $'M = A + 'NB$, & celle de la courbe $GM'g$ ſera $M' = A + N'B$, les quantités A & B étant deux conſtantes indéterminées dont la détermination dépend de la conſidération ſuivante.

La courbe NMm ſe trouvant ſur la ſurface à conſtruire, doit couper les courbes données smS & LNO quelque part en des points N & m, dont les projections horizontales ſont les points k & q, & dont les projections verticales G & g, ſe déterminent en menant les droites $q\pi$ & kb parallèles aux y, & en élevant par les points π & b des verticales prolongées juſqu'à ce qu'elles coupent les courbes sgS' & LGT; donc, α étant tel dans les quantités $'M$, $'N$, M' & N' que la courbe kq paſſe par le point Q, les conſtantes A & B doivent être telles que la courbe $GM'g$ paſſe par les points g & G; ſans cela la ſurface à conſtruire ne paſſeroit pas par les courbes données.

Soit donnée à la quantité α une certaine grandeur priſe à volonté; ſoit auſſi pris ſur la courbe FkE le point k'' à volonté, & ſoit conſtruite la courbe $k''Qq''$, dont l'équation ſoit $'M = A + 'NB$, les conſtantes A & B étant telles que la courbe paſſe par les points k'' & Q. Soit auſſi conſtruite

la courbe $G''g''$ dont l'équation ſoit $M' = A + N'B$; les conſtantes α, A & B ayant les valeurs qui conviennent à la courbe $K''Qq''$, il eſt évident que ſi la valeur donnée à α étoit la valeur requiſe, & que le point K'' fut celui qui convient à la courbe KQq, en menant les droites $k''b''$ & $q''\pi''$ parallèles aux y, & élevant les verticales $b''G''$ & $\pi''g''$, les points g'' & h' coïncideroient, de même que les points b'' & f'; mais comme l'on eſt parti d'hypothèſes arbitraires, il faut ſuppoſer que les points ne coïncident pas. On conſervera le même point K'', & l'on donnera à α une ſeconde valeur; on conſtruira une nouvelle courbe $K''Qq'$, dont l'équation ſoit $'M = A + 'NB$, les conſtantes A & B étant telles que cette courbe paſſe par les points K'' & Q, on mènera $q'\pi'$ parallèle aux y, on élevera la verticale $\pi'g'$, & l'on conſtruira la nouvelle courbe $G'g'$ dont l'équation ſoit $M' = A + N'B$, α, A & B ayant les valeurs qui conviennent à la courbe $K''Qq'$, & l'on aura un nouveau point g'. On déterminera de cette manière tant de points $g''g'$.... &c. qu'on voudra, par leſquels on fera paſſer la courbe $g''g'$, qui coupera la courbe donnée sgS' en un point μ, par lequel on abaiſſera la verticale μV, & on mènera Vu parallèle aux y. On conſtruira l'équation $'M = A + 'NB$, les quantités α, A & B ayant des valeurs telles que ſon lieu $K''Qu$ paſſe par les trois points déterminés K'', Q & u; enfin on conſtruira la courbe μH qui ait pour équation $M' = A + N'B$, α, A & B ayant les valeurs qui conviennent à la courbe $K''Qu$, & l'on élevera la verticale $b''H$. Si le point H coïncidoit avec le point G, le point K'' ſeroit bon, & la courbe $K''Qu$ ſeroit la courbe KQq.

Mais le point H peut encore ne pas coïncider avec le point G; ſoit donc pris un autre point K' à volonté, & conſtruite une nouvelle courbe $g''g'$, comme on a conſtruit la courbe $g''g'$ à l'aide du point K''; ce qui donnera un nouveau point μ', qui ſervira à conſtruire une autre courbe $\mu'H'$, & par conſéquent à déterminer un nouveau point H'. Par tant de points H, H'... &c. qu'on voudra, déterminés

de

la même manière, on fera passer la courbe HH', qui coupera la courbe donnée LGT en un point G, par laquelle on abaissera la verticale Gb, on mènera la droite bK parallèle aux y, & le point K sera déterminé.

Pour ce point K, on construira la courbe $G''G'$ qui lui convient, comme on a construit la courbe $g''g'$ pour le point K'', & la courbe $g''g'$ pour le point K', & cette courbe coupera la courbe donnée sgS' en un point g, par lequel on abaissera la verticale $g\pi$; on mènera πq parallèle aux y, & le point q sera déterminé. Enfin, on construira la courbe KQq dont l'équation soit $'M = A + 'NB$, α, A & B étant telles que cette courbe passe par les trois points K, Q & q, on construira pour ces mêmes valeurs la courbe GMg, & l'on aura les projections de la courbe NMm; on élèvera la verticale PM', on fera $QM = PM'$, & le point M sera dans la surface demandée. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

Quelles que puissent être les courbes données smS & LNO, la surface que l'on vient de construire aura cette propriété, que si on la coupe par une surface courbe qui ait pour équation $V =$ const. quelconque, on aura une section dont la projection verticale aura pour équation $M' = A + N'B$, dans laquelle A & B sont deux constantes qui dépendent de la nature des deux courbes smS & LNO; & les quantités M' & N' des fonctions de x & z, que l'on obtient en éliminant y des deux quantités données M & N, à l'aide de l'équation $V =$ const. C'est cette propriété générale dont l'expression est l'équation aux différences partielles de l'équation $M = \varphi V + N \psi V$.

Je pourrois le démontrer en conservant cette forme; mais comme l'équation aux différences partielles, en supposant que M, N & V soient fonctions de x, y & z, contient plus de deux mille termes, & que par conséquent je me jetterois dans des formules trop compliquées, j'aime mieux le démontrer sur le cas particulier de l'équation $z = \varphi V + N \psi V$,

où je ſuppoſerai encore les quantités N & V ſimplement fonctions de x & y; la démonſtration n'aura rien de particulier, & pourra s'étendre au cas général.

Soit différentiée l'équation $z = \varphi V + N \psi V$ en regardant y comme conſtant, & l'on aura

$$\delta z = \delta V . \varphi' V + \delta N \psi V + N \delta V \psi' V,$$

en ne faiſant varier que y,

$$\partial z = \partial V \varphi' V + \partial N \psi V + N \partial V \psi' V.$$

Multipliant la première par ∂V, la ſeconde par δV, & retranchant l'une de l'autre, on aura

$$\partial V \delta z - \delta V \partial z = [\partial V \delta N - \delta V \partial N] \psi V,$$

que je mets ſous cette forme,

$$\frac{\partial V \delta z - \delta V \partial z}{\partial V \delta N - \delta V \partial N} = \psi V. \text{ ou } \omega = \psi V;$$

ſoit différentiée cette équation de nouveau par rapport à x,

ce qui donne . . . . $\delta \omega = \delta V \psi' V$

enſuite par rapport à y, ce qui donne $\partial \omega = \partial V \psi' V$

en éliminant $\psi' V$, on aura . . . . . . $\partial V \delta \omega - \delta V \partial \omega = 0$;

enfin, remettant pour ω ſa valeur, l'équation aux différences partielles de $z = \varphi V + N \psi V$, ſera

$$(H). \quad \left. \begin{array}{l} [\partial V \delta N - \partial N \delta V] \left\{ \begin{array}{l} \partial V [\delta z \delta \partial V + \partial V \delta \delta z - \partial z \delta \delta V - \delta V \delta \partial z] \\ - \delta V [\delta z \partial \partial V + \partial V \delta \partial z - \partial z \delta \partial V - \delta V \partial \partial z] \end{array} \right\} \\ - [\partial V \delta z - \delta V \partial z] \left\{ \begin{array}{l} \partial V [\delta N \delta \partial V + \partial V \delta \delta N - \partial N \delta \delta V - \delta V \delta \partial N] \\ - \delta V [\delta N \partial \partial V + \partial V \delta \partial N - \partial N \delta \partial V - \delta V \partial \partial N] \end{array} \right\} \end{array} \right\} = 0,$$

équation à laquelle la ſurface conſtruite par le procédé précédent dans l'hypothèſe de $z = \varphi V + N \psi V$, doit ſatisfaire.

THÉORÈME V.

Toute ſurface qui, conſtruite par le procédé du Problème V, ſera le lieu de l'équation $z = \varphi V + N \psi V$, & qui, quoiqu'elle puiſſe être diſcontinue, jouira par conſéquent de la propriété énoncée dans le Corollaire précédent, N & V

étant des fonctions quelconques de x & y, donnera dans chacun de ses points, l'équation *(H)*.

DÉMONSTRATION.

Soient AP, AD & AB les axes rectangulaires des coordonnées x, y & z; soient $AP = x$, $PP' = P'P'' = dx$; par les trois points P, P' & P'' soient menés trois plans infiniment proches perpendiculaires aux x, qui couperont le plan horizontal suivant les droites PQ, $P'Q'$, $P''Q''$, & le plan vertical suivant les droites PG, $P'G'$, $P''G''$. Soit $M\,M'\,M''$ l'intersection de la surface construite, avec celle qui auroit pour équation $V =$ const. & $QQ'Q''$, $GG'G''$ ses projections horizontale & verticale; soient prolongés les élémens QQ', MM' & GG' correspondamment jusqu'en q, m & g, & élevées les verticales QM, $Q'M'$, $Q''M''$ & qm. Enfin, soient menées Gg parallèle à PP', MN parallèle à QQ', & $M''n$ parallèle à $Q''q$; cela posé, il est évident que l'on aura $G''g = mn$. Or, mn est la différentielle seconde de l'ordonnée verticale $QM = z$, en supposant que son pied Q ne sorte pas de la courbe $QQ'Q''$, c'est-à-dire, prise en mettant à chaque différentiation, à la place de $\frac{dy}{dx}$ la valeur que donne l'équation de la courbe $QQ'Q''$; de plus, $G''g$ est la différentielle seconde de l'ordonnée PG, dont l'expression est, par hypothèse, $A + N'B$, ou parce que N' est ce que devient N en éliminant y à l'aide de l'équation de la courbe $QQ'Q''$; $G''g$ est la différence seconde de $A + NB$, prise en mettant à chaque différentiation à la place de $\frac{dy}{dx}$ la valeur que donne l'équation de la courbe $QQ'Q''$; donc, en différentiant deux fois de cette manière l'équation $z = A + NB$, on aura une équation qui sera la traduction analytique de celle-ci $G''g = mn$. Fig. 8.

Mais, puisque V ne contient point z, la surface qui a pour équation $V =$ const. est cylindrique, & cette équation est aussi celle de la courbe $QQ'Q''$; on aura par conséquent

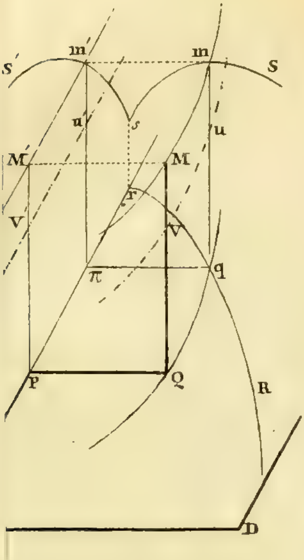
pour cette courbe $\frac{dy}{dx} = - \frac{\delta V}{dx} \cdot \frac{dy}{\partial V}$; ainsi en différentiant $z = A + NB$, qui donne $dz = B\,dN$, ou $\delta z + dy \frac{\partial z}{dy} = B\,(\delta N + dy \frac{\partial N}{dy})$, & éliminant dy, on aura $\delta z - \frac{\delta V}{\partial V} \partial z = B\,(\delta N - \frac{\delta V}{\partial V} \partial N)$ ou $\frac{\partial V \delta z - \delta V \partial z}{\partial V \delta N - \delta V \partial N} = B$; & enfin pour abréger $\omega = B$; différentiant encore cette équation de la même manière, on aura $\delta\omega - \frac{\delta V}{\partial V} \partial\omega = 0$, & par conséquent $\partial V \delta\omega - \delta V \partial\omega = 0$, équation qui est la même que celle qui précède l'équation (H), & qui doit donner cette même différentielle en mettant pour ω sa valeur. Donc, &c. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

La méthode que j'ai suivie dans cette démonstration est beaucoup plus simple que celle des autres Théorèmes, elle est d'ailleurs plus générale; &, comme il est facile de le voir, rien n'empèche qu'on ne puisse l'étendre à tous les degrés; de plus, il n'y aura aucune difficulté à supposer que z entre dans les quantités N & V, & même que l'équation construite soit de cette forme, $M = \varphi V + N \psi V + PFV \ldots$ &c. $M, N, P \ldots V$ étant fonctions quelconques de x, y & z; il faudra simplement ne pas oublier d'employer, pour en trouver la différentielle, la méthode que j'ai donnée dans le corollaire du Problème IV.

CONCLUSION.

Ce Mémoire renferme les constructions des intégrales d'équations aux différences partielles, plus générales que celles que j'avois construites jusqu'à présent, & j'y démontre que les lieux géométriques de ces intégrales satisfont généralement à leurs équations aux différences partielles; ce que je m'étois proposé.


m'
m
S'
S
u'
s
u
M'
M
r
V'
V
π
q
P
Q
R
D

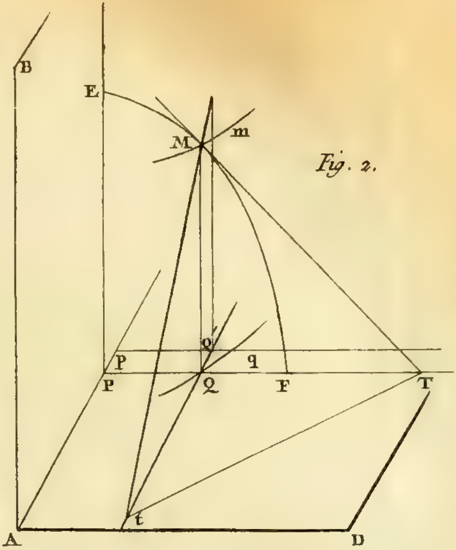
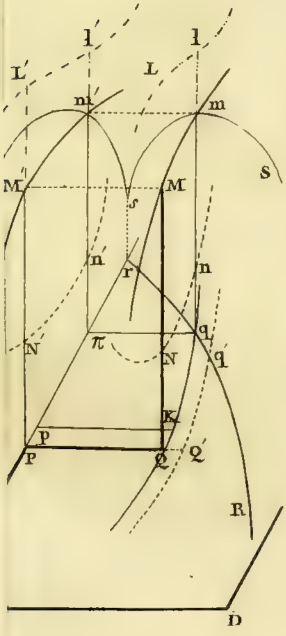

B
E
M
m
Q
p
q
P
Q
F
T
t
A
D

Fig. 2.


l'
l
L'
L
m'
m
S
M'
M
s
n'
r
n
q
N'
π
N
q'
K
p
P
Q
Q'
R
D

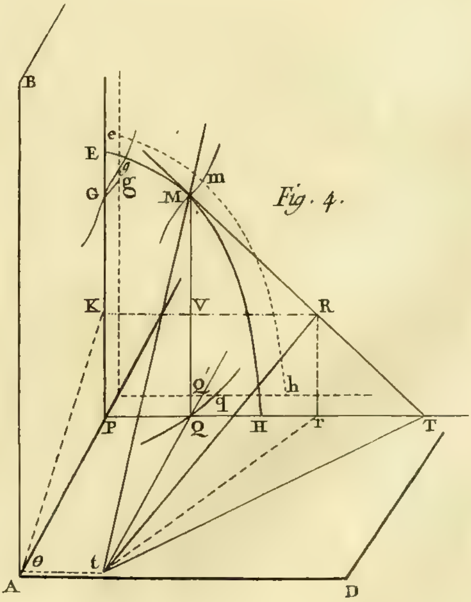
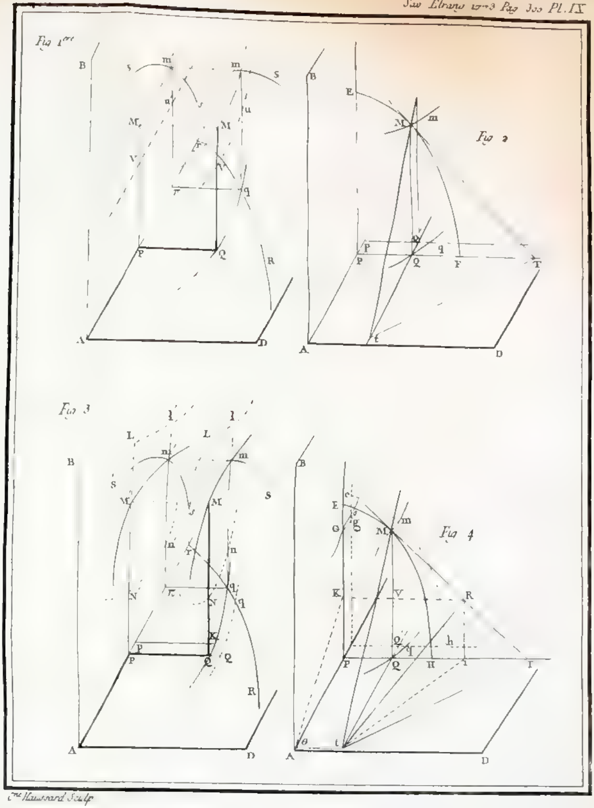

B
e
E
g
G
M
m
K
V
R
Q
q
h
P
Q
H
T
T
θ
t
A
D

Fig. 4.

Pl. I.



Ch. Haussard Sculp.

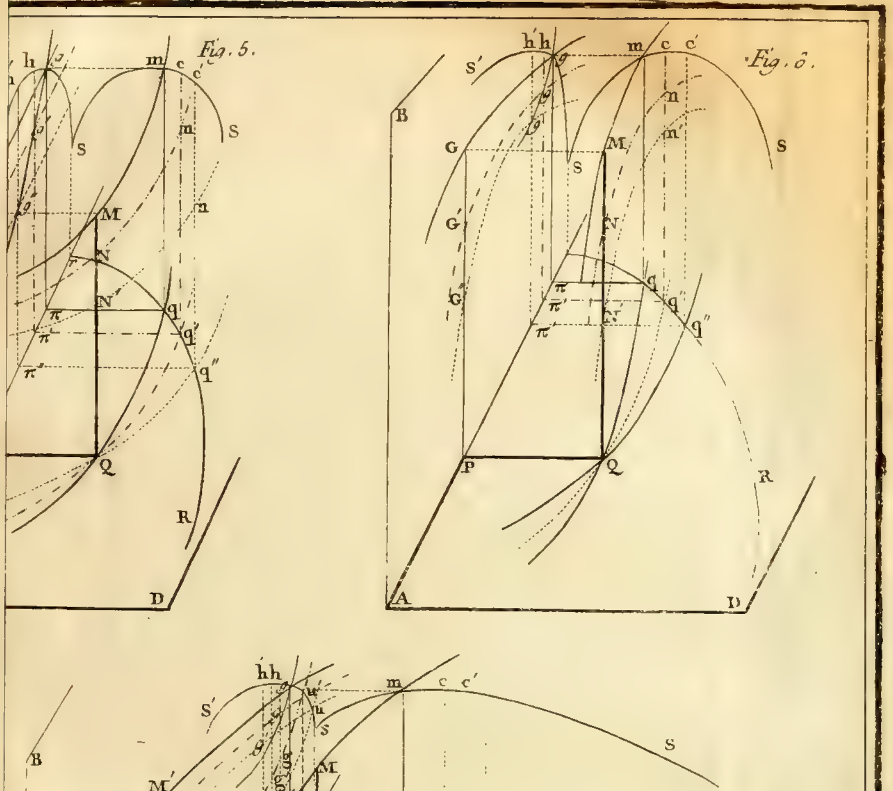
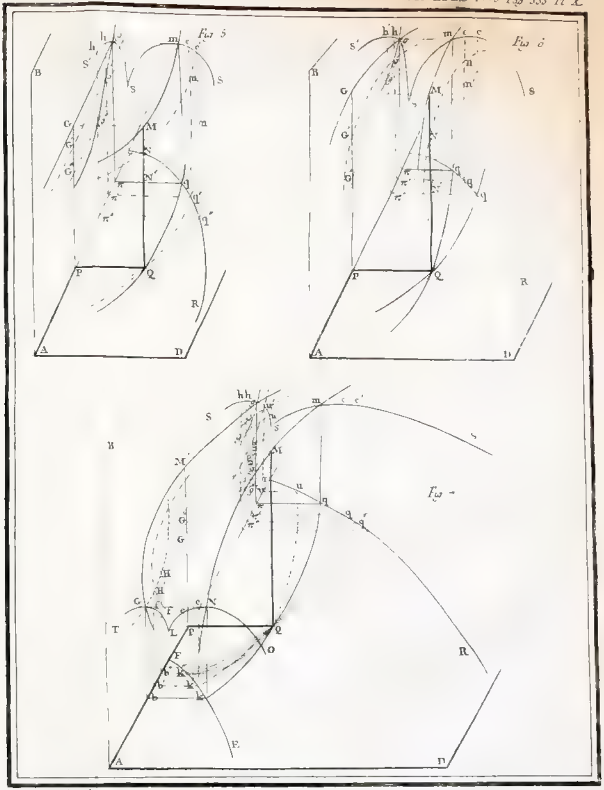


Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.



Ch.er Haussard Sculp.

Fig. 8.

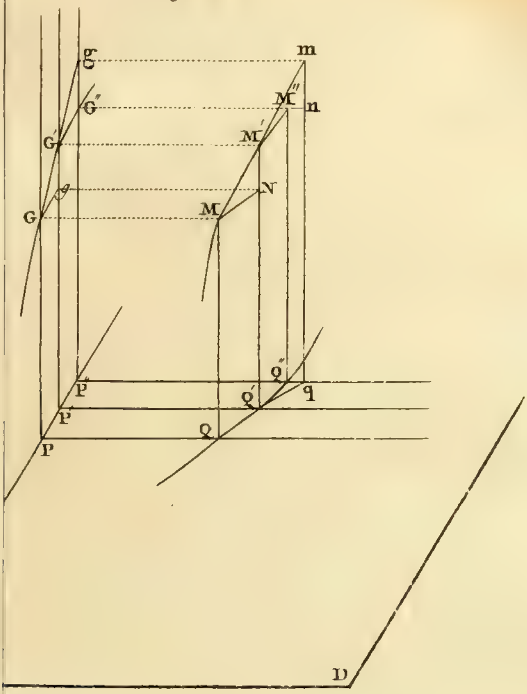


Fig. 9.

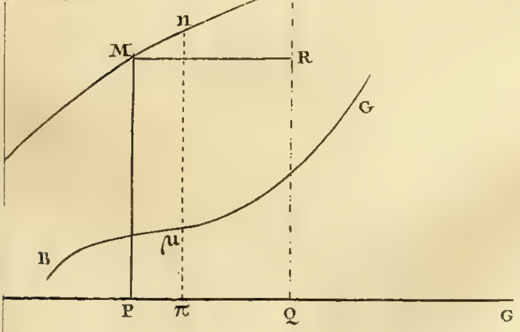


Fig 8.

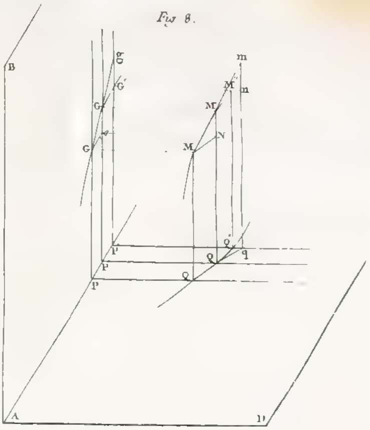
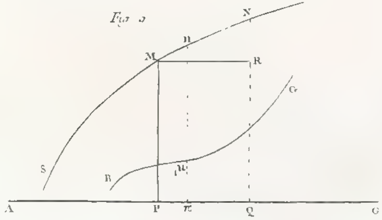


Fig 9



Sculp

OBSERVATION ANATOMIQUE,

Sur une extrémité inférieure dont les muſcles ont été changés en tiſſu graiſſeux, ſans aucune altération dans la forme extérieure.

Par M. Vicq-d'Azyr.

PARMI les cadavres qui ont été apportés à mon amphithéâtre, pour y ſervir à l'inſtruction des Élèves qui ſuivent mes leçons d'Anatomie, il s'en eſt trouvé un dont la jambe étoit fléchie ſur la cuiſſe, & le pied fortement étendu ſans que l'extrémité fut amaigrie ou infiltrée. Curieux de connoître la cauſe de cette attitude vicieuſe, j'ai fait exécuter au fémur dans la cavité cotyloïde, & à la jambe, dans le gingline du genou, des mouvemens que j'ai trouvés auſſi faciles qu'ils le ſont ordinairement; ſurpris de trouver les articulations ſaines, j'ai diviſé la peau pour découvrir les muſcles de la cuiſſe. Mais, au lieu demuſcles, je n'ai trouvé qu'un tiſſu graiſſeux, fibreux & cellulaire; & ſi on en excepte quelques-uns, je me ſuis aperçu que tous ceux de l'extrémité avoient ſubi cette métamorphoſe. On trouve dans les Auteurs les plus anciens, quelques exemples d'une pareille dégénéreſcence. On lit dans l'Hiſtoire des animaux d'Ariſtote, que la chair ſe change en graiſſe lorſqu'elle reçoit trop de nourriture: *vertitur in pingue quoties pabuli copia ſuppetit.* Pluſieurs parmi les Modernes ont fait cette remarque. Salzmann qui a écrit une Diſſertation ſur l'altération & le défaut de pluſieurs muſcles, a vu des fibres charnues écartées, &, pour ainſi dire, écraſées par un amas de graiſſe. Leuwenhoek, cité à ce ſujet par M. de Haller, a vu la graiſſe en faire autant, même à l'égard des tendons. Albinus, après avoir conſidéré le muſcle en général, ajoute: *pinguidine ita diſtinditur aliquando, ut reliqua muſculorum ſuffocet; tendines vero pinguidini tam facile non cedunt.* De toutes les cauſes qui détruiſent l'organiſation intime du

muſcle, la ſurabondance de graiſſe eſt cependant une des plus rares. Les plus communes ſont l'aſtrophie, la paralyſie, la ſuppuration, l'infiltration; & M. de Haller, en parlant d'un amas exceſſif de graiſſe dans le tiſſu muſculeux, dit que ce vice vient le plus ſouvent de naiſſance : *in morbis rarum, in monſtris vulgare vitium eſt.* Quoique ce vice, d'après ce paſſage de M. de Haller, doive être regardé comme peu commun, je l'ai cependant déjà obſervé deux fois; la première, dans l'ancien amphithéâtre de M. Antoine Petit, & la deſcription en fut faite dans le Journal de Médecine, par M. le Thual; la ſeconde, à l'hôpital de la Charité. Mais, dans aucune de ces deux circonſtances, la déſorganiſation n'étoit, à beaucoup près, ſi complète qu'elle l'eſt dans l'extrémité qui fait le ſujet de cette Obſervation. C'eſt donc moins la rareté du fait en lui-même, qui me détermine à le préſenter à l'Académie, que la nature de quelques détails que je crois importans pour l'hiſtoire des muſcles.

Le ſujet dont les muſcles ont été détruits ou remplacés par un tiſſu graiſſeux, étoit vieux, & l'on n'a point trouvé dans les grandes cavités, de cauſe à laquelle on puiſſe attribuer ce vice de conformation. Les informations que j'ai faites m'ont appris que, pendant long-temps, il s'étoit également ſervi des deux extrémités; qu'après une maladie, celle du côté gauche étoit de plus en plus affoiblie ſans ſe déformer, & qu'enfin le malade avoit été contraint de marcher à l'aide d'une béquille: c'eſt ce qu'annonçoit la couleur de l'aiſſelle du même côté noire & rembrunie par les frottemens. Les muſcles du dos, le quarré des lombes, le pectiné & le grand feſſier ont conſervé leur couleur naturelle. Tous les autres muſcles de l'extrémité ſont, ou détruits, ou tellement pâles; qu'ils ont perdu toute leur rougeur. Les aponévroſes même n'ont plus cet œil luiſant & ſatiné que tous les Anatomiſtes leur reconnoiſſent : c'eſt ce que l'on peut voir dans le *faſcia lata,* & dans le tendon du triceps tibial. La portion ſciatique du demi-nerveux & du biceps, les jumeaux, les extenſeurs des doigts, celui du pouce & le jambier antérieur, ſont les

ſeuls muſcles dans leſquels on retrouve quelques fibres dont la direction ſoit marquée ; tous les muſcles rotateurs de la cuiſſe, ceux qui ſont placés ſur le devant du fémur, les muſcles iliaques & pſoas, le moyen & le petit feſſier, les adducteurs, les muſcles profonds & poſtérieurs de la jambe, les muſcles plantaires ſont abſolument changés en graiſſe, & à peine en retrouve-t-on quelques veſtiges en les cherchant dans la place qu'ils devroient occuper. L'artère eſt oſſeuſe en pluſieurs endroits, & le tiſſu du nerf m'a paru plus mou qu'il ne l'eſt ordinairement. Mais, ce que cette extrémité préſente de plus curieux, c'eſt la déſorganiſation de la fibre muſculaire, & ſa dégénéreſcence en fibres cellulaires qui ſe fait par nuances inſenſibles. Dans le couturier, ſi on l'examine depuis ſon inſertion à l'os des iles juſqu'au tibia, on obſerve tous ces changemens avec leurs degrés ſucceſſifs de la manière la plus frappante ; inférieurement il eſt tellement confondu avec la graiſſe qui environne le genou, qu'on ne peut l'en diſtinguer. Le demi-nerveux, dans ſa portion arrondie, n'a point de tendon diſtinct ; toute ſa ſubſtance eſt homogène & continue : on peut faire la même obſervation ſur preſque tous les autres muſcles. La graiſſe qui ſe trouve dans leurs corps eſt ferme, blanche, contenue dans un grand nombre de petites cellules, & n'écarte point les trouſſeaux les uns des autres ; les fibres qui tiennent la place des muſculaires, m'ont paru plus tenues, plus fines & analogues à la ſubſtance ligamenteuſe. Le tiſſu cellulaire qui les unit, eſt blanchâtre, plus lâche & plus diductible qu'il n'eſt ordinairement ; ce n'eſt point entre ces lames que le ſuc graiſſeux paroît être épanché ; mais bien entre les élémens de la fibre elle-même. Si on preſſe fortement un muſcle quelconque de cette extrémité, on en exprime une très-grande quantité de graiſſe, qui ne diffère en rien de celle qui eſt répandue dans tout le ſyſtème cellulaire ; un morceau de cette ſubſtance muſculeuſe dégénérée, obſervé avec une forte loupe, préſente un aſſemblage de fibres molles, tranſparentes, dont le diamètre eſt différent dans les différens points de leur longueur, & qui

dans quelques-uns, paroiſſent partagés par un nombre aſſez grand de petites cloiſons: ſi on fait effort pour ſéparer ces fibres les unes des autres, alors leur organiſation eſt en partie détruite, & la loupe fait apercevoir les lames blanchâtres qui les uniſſent, & dans chaque interſtice un petit ruiſſeau graiſſeux que la preſſion a fait couler. Enfin, le muſcle privé de la graiſſe, à l'aide d'une preſſe, ne paroît plus être, & n'eſt plus en effet, qu'un canevas ligamenteux ou cellulaire; l'intérieur des articulations diſſéquées avec le plus grand ſoin n'a offert aucune altération, & le corps de chaque muſcle a conſervé ſon volume ordinaire, de ſorte que le membre recouvert de ſa peau, paroiſſoit être dans ſon état naturel, & en tout ſemblable à celui du côté oppoſé, dans lequel les muſcles ont conſervé la forme & la rougeur dont ils jouiſſent ordinairement. Tel eſt l'état de l'extrémité qui fait le ſujet de cette obſervation; nous abandonnons aux Phyſiciens les conſéquences qui peuvent en être déduites, tant pour l'hiſtoire des maladies qui attaquent les muſcles dans leur organiſation la plus intime, que pour la théorie du mouvement muſculaire.

MÉMOIRE

MÉMOIRE
SUR LA
DÉTERMINATION DES FONCTIONS ARBITRAIRES
Qui entrent dans les intégrales des Équations aux différences partielles.

Par M. MONGE, Professeur royal de Mathématiques & de Physique à l'École du Génie.

SI dans la solution d'une question, l'on a plusieurs variables indépendantes à considérer, il arrive presque toujours que l'on est conduit à une équation aux différences partielles; & l'intégrale de cette équation contient un certain nombre de fonctions arbitraires, qui dépend de l'ordre de l'équation, & du nombre des variables indépendantes. Par exemple, si le nombre de ces variables est deux, il entre autant de fonctions arbitraires dans l'intégrale, qu'il y avoit d'unités dans le degré de l'équation différentielle; & pour compléter la solution, il faut déterminer quelles doivent être les formes de ces fonctions généralement arbitraires, pour que l'intégrale satisfasse aux circonstances particulières de la question.

J'ai déjà fait voir * qu'en supposant la perfection de l'analyse ordinaire, cette détermination n'avoit rien de difficile pour le premier degré, & qu'il étoit toujours possible de construire l'équation, quand même les circonstances particulières de la question ne seroient pas expressibles analytiquement, ou, ce qui revient au même, quand les conditions ne seroient pas soumises à la loi de continuité; il en est de même pour quelques équations particulières des degrés supérieurs, par exemple, si toutes les différentes fonctions arbitraires sont composées de la même quantité, auquel cas elles doivent être multipliées par des facteurs différens, afin de demeurer distinctes. Je me propose de reprendre la question générale, & de faire voir que la détermination des fonctions

* *Dans un Mémoire imprimé ci-dessus, p. 267, & qui doit paroître dans le V.e vol. de la S. R. de Turin.*

arbitraires qui se trouvent dans l'intégrale d'une équation aux différences partielles, dépend en géneral, dans les cas que je n'ai pas encore traités, de l'intégrale d'une ou de plusieurs équations aux différences finies, dans lesquelles le rapport de la variable principale à sa différence finie est donné, soit qu'il soit variable, soit qu'il soit constant.

De nouveaux besoins exigent donc que l'on perfectionne ce genre de calcul auquel de très-célèbres Géomètres ont déjà travaillé, mais qui est encore trop imparfait pour que la plupart des opérations auxquelles je serai conduit puissent s'exécuter. Je choisirai des exemples que je puisse traiter, afin de parvenir à des résultats, & que les solutions soient éclaircies par des applications.

Je suis forcé de convenir ici qu'au-delà de ce que j'ai fait sur cette matière, il n'y a aucune équation aux différences partielles, que je puisse construire dans le cas des conditions discontinues : je suis obligé d'opérer sur les équations de condition, & par conséquent de les supposer analytiques.

PROBLÈME I.

Déterminer quelles doivent être les formes des fonctions arbitraires φ *&* ψ *dans l'équation*

$$z = \varphi U + \psi V,$$

pour que cette équation satisfasse en même temps à ces deux conditions,

1.° qu'en faisant $y = F.x$, *on ait* $z = f.x$;
2.° qu'en faisant $y = F'x$, *on ait* $z = f'x$,

les quantités U *&* V *étant données en* x *&* y, *& les formes des fonctions* F, F', f *&* f' *étant connues.*

SOLUTION.

Soit mise à la place de y dans les quantités U & V sa première valeur $y = Fx$, & soient U' & V' les fonctions connues de x que deviennent ces quantités par cette substitution ; soit de même substituée la seconde valeur de $y = F'x$,

& soient U'' & V'' les nouvelles fonctions de x que donne cette opération, il est évident que par les deux conditions de la question, on aura les deux équations suivantes,

$$(A)\ \mathrm{f}\,x = \varphi U' + \psi V'$$
$$(B)\ \mathrm{f}'x = \varphi U'' + \psi V'';$$

cela posé, on fera $V' = u$, d'où l'on tirera une valeur de x en u, que je suppose représentée par $f.u$, & que l'on substituera dans les quantités $\mathrm{f}.x$ & U'; la première deviendra $\mathrm{f}(fu)$: soit représentée la seconde par $'U$, il est clair que l'équation (A) se transformera en celle-ci,

$$(C)\quad \mathrm{f}(fu) = \varphi\,'U + \psi u,$$

dans laquelle la forme de la fonction ψ seroit connue, si l'on connoissoit celle de la fonction φ, puisque les quantités $\mathrm{f}(fu)$ & $'U$ sont données en u.

On fera la même opération sur l'équation (B), c'est-à-dire, on fera $V'' = u$; d'où l'on tirera une valeur de x que j'indique par $f'u$, & qui, substituée dans les quantités $\mathrm{f}'x$ & U'', donnera

$$(D)\quad \mathrm{f}'(f'u) = \varphi\,''U + \psi u;$$

on retranchera cette équation de (C), & l'on aura

$$\mathrm{f}(fu) - \mathrm{f}'(f'u) = \varphi\,'U - \varphi\,''U,$$

équation de laquelle ψu est éliminée, & dans laquelle il ne reste d'indéterminée que la fonction φ, puisque les quantités $'U$ & $''U$ sont données en u, & que les fonctions $\mathrm{f}, \mathrm{f}', f$ & f' sont de formes données; il s'agit donc de donner à la fonction φ une forme telle qu'elle satisfasse à cette équation.

Pour cela, soit AG une droite sur laquelle on compte les abscisses u à partir du point A comme origine, de manière que l'on ait $A\pi = u$; soit construite la courbe $B\mu C$ telle que l'on ait constamment $\pi\mu = \mathrm{f}(fu) - \mathrm{f}'(f'u)$; soit $SMNT$ la courbe qui a pour équation $y = \varphi u$, c'est-à-dire; $\pi n = \varphi(A\pi)$; il est évident qu'en prenant $AP = {}''U$ & $AQ = {}'U$, on aura $PM = \varphi\,''U$ & $QN = \varphi\,'U$; Fig. 1.

d'où il ſuit qu'ayant mené MR parallèle à AG, on aura $NR = \varphi\,'U - \varphi\,''U$, & par conſéquent $NR = \pi\mu$; ce qui doit faire trouver l'équation de la courbe $SMNT$, ou ce qui revient au même, la valeur de la fonction φ.

Comme les quantités $'U$ & $''U$ ne ſont pas ſimples, mais qu'elles ſont compoſées d'une certaine manière donnée de l'abſciſſe $A\pi = u$; ſoit fait $''U$ (ou AP) $= v$, & $'U - ''U$, ou $PQ = \Delta v$, Δ étant le caractère d'une différence finie, on aura $PM = \varphi v$, $QN = \varphi\,(v + \Delta v)$ & $NR = \Delta\varphi v$; ſoit enfin priſe la valeur de u dans l'équation $''U = v$, pour la ſubſtituer dans la valeur de $\pi\mu = \text{f}\,(fu) - \text{f}'\,(f'u)$, cette quantité, en ſuppoſant que l'on ait $u = f''.v$, deviendra $\text{f}\,[f(f''v)] - \text{f}'\,[f'(f''v)] = \pi\mu$, & l'équation $NR = \pi\mu$ deviendra $\text{f}\,[f(f''v)] - \text{f}'\,[f'(f''v)] = \Delta\varphi v$, équation aux différences finies, dont l'intégrale donnera la forme de la fonction φ.

Mais pour intégrer cette équation, il faut connoître le rapport de la variable v à ſa différence finie Δv; pour cela, l'équation $''U = v$ nous a déjà donné $u = f''v$; de l'équation $'U - ''U = \Delta v$ on tirera une autre valeur de u en Δv; ſoit cette valeur $u = \Gamma.\Delta v$, on aura donc $f''v = \Gamma\Delta v$, ce qui donnera le rapport demandé, & ſervira à intégrer l'équation précédente, & à trouver la forme de la fonction φ; connoiſſant cette forme, on la compoſera en $'U$ pour la ſubſtituer dans l'équation (C), ou en $''U$ dans l'équation (D), & l'on parviendra également à une équation qui ne renfermera plus d'indéterminées que la fonction ψ, qui ſera par conſéquent facile à déterminer.

COROLLAIRE.

Ce Problème eſt donc ramené à l'intégration d'une équation aux différences finies, dans laquelle le rapport de la variable à ſa différence, eſt variable. Je ſemerai dans ce Mémoire quelques principes ſur ce calcul; mais, s'ils n'étoient pas ſuffiſans, on pourroit avoir recours à un Mémoire auquel travaille actuellemeut M. de la Place, & dans lequel cet habile

Géomètre m'a dit qu'il convertiſſoit toujours une équation aux différences finies & variables, en une équation aux différences finies & conſtantes.

Je vais paſſer maintenant à quelques applications, que je ſuppoſerai d'abord les plus ſimples, tant pour rendre la marche plus ſenſible, que pour éviter des détails de calcul trop pénibles.

EXEMPLE I.

Soit propoſé de déterminer la nature des fonctions arbitraires φ & ψ dans l'équation $z = \varphi(ax - y) + \psi(bx - y)$, de telle manière que cette équation ſatisfaſſe à ces deux conditions, 1.° qu'en faiſant $y = Ax$, on ait $z = Bx$; 2.° qu'en faiſant $y = Cx$, on ait $z = Dx$; les quantités a, b, A, B, C, & D étant conſtantes.

Par les deux conditions de la queſtion, on doit avoir

$$\text{(A)} \quad Bx = \varphi(a - A)x + \psi(b - A)x,$$
$$\text{(B)} \quad Dx = \varphi(a - C)x + \psi(b - C)x;$$

or, ce cas eſt ſi ſimple, qu'il ſeroit inutile d'avoir recours à la méthode du Problème. On voit en effet facilement que les fonctions φ & ψ doivent être d'une ſeule dimenſion, & que l'on ſatisfera à ces deux équations en poſant

$$Bx = E(a - A)x + e(b - A)x$$
$$Dx = E(a - C)x + e(b - C)x;$$

d'où l'on tire $E = \frac{B(b-C) - D(b-A)}{(A-C)(a-b)}$ & $e = \frac{D(a-A) - B(a-C)}{(A-C)(a-b)}$;

ce qui donne pour l'équation demandée,

$$z = \frac{[B(b-C) - D(b-A)](ax-y) + [D(a-A) - B(a-C)](bx-y)}{(A-C)(a-b)}$$

qui eſt effectivement de la forme $z = \varphi(ax - y) + \psi(bx - y)$, & ſatisfait en même temps aux deux conditions propoſées; mais ce procédé n'eſt pas général: reprenons la méthode du Problème.

Soit fait dans l'équation (A) $V' = u$, c'eſt-à-dire,

$(b - A)\, x = u$; ce qui donne $x = \frac{u}{b - A}$, & elle deviendra $\frac{Bu}{b-A} = \varphi\left(\frac{a-A}{b-A}u\right) + \psi u$ (C).

Soit fait de même dans l'équation (B), $(b - C)\, x = u$; ce qui donne $x = \frac{u}{b-C}$, & l'on aura (D) $\frac{Du}{b-C} = \varphi\left(\frac{a-C}{b-C}u\right) + \psi u$; retranchant ces deux équations l'une de l'autre, l'on obtiendra

$$\frac{Bu}{b-A} - \frac{Du}{b-C} = \varphi\left(\frac{a-A}{b-A}u\right) - \varphi\left(\frac{a-C}{b-C}u\right).$$

Actuellement soit $\frac{a-C}{b-C}u = v$, & $\frac{a-A}{b-A}u - \frac{a-C}{b-C}u = \Delta v$, d'où l'on tire $u = \frac{(b-A)(b-C)}{(A-C)(a-b)}\Delta v$ & $\frac{a-A}{b-A}u = v + \Delta v$, & soient substituées ces valeurs dans l'équation précédente, on aura

$$\frac{B(b-C) - D(b-A)}{(A-C)(a-b)}\Delta v = \varphi(v + \Delta v)v - \varphi v = \Delta\varphi v,$$

dont l'intégrale donne

$$\varphi v = \frac{B(b-C) - D(b-A)}{(A-C)(a-b)}v + \text{constante};$$

substituant cette forme dans l'une ou l'autre des équations (C), (D), on trouvera également $\psi u = \frac{D(a-A) - B(a-C)}{(A-C)(a-b)}u$ — constante; ce qui donne la même équation que nous avons déjà trouvée, sans constantes arbitraires, puisqu'elles se détruisent, étant de signes différens.

L'intégration de l'équation aux différences finies n'a souffert aucune difficulté, parce qu'elle est linéaire; mais il peut arriver que dans l'équation $\mathrm{f}[f(f''v)] - \mathrm{f}'[f'(f''v)] = \Delta\varphi v$, qui résout généralement le Problème, le premier membre renferme des fonctions quelconques de v & Δv; dans ce cas, l'intégration peut être soumise à des difficultés qui

conduisent à un nouveau genre de calcul intégral, dont je vais donner un des exemples les plus simples.

EXEMPLE II.

Soit proposé de déterminer la nature des fonctions arbitraires dans la même équation $z = \varphi(ax - y) + \psi(bx - y)$, pour qu'elle satisfasse à ces deux conditions; 1.° qu'en faisant $y = Ax$, l'on ait $z = Bx^m$; 2.° qu'en faisant $y = Cx$, on ait $z = Dx^n$.

En opérant comme ci-dessus, on aura par les deux conditions de la question,

$$\text{(A)} \quad Bx^m = \varphi(a - A)x + \psi(b - A)x,$$

$$\text{(B)} \quad Dx^n = \varphi(a - C)x + \psi(b - C)x;$$

on fera dans la première $(b - A)x = u$, & elle deviendra

$$\text{(C)} \quad \frac{Bu^m}{(b-A)^m} = \varphi \frac{a-A}{b-A} u + \psi u;$$

on fera de même dans la seconde $(b - C)x = u$, & on aura

$$\text{(D)} \quad \frac{Du^n}{(b-C)^n} = \varphi \frac{a-C}{b-C} u + \psi u;$$

retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on aura

$$\text{(E)} \quad \frac{Bu^m}{(b-A)^m} - \frac{Du^n}{(b-C)^n} = \varphi\left(\frac{a-A}{b-A} u\right) - \varphi\left(\frac{a-C}{b-C} u\right).$$

Actuellement soit fait, comme dans l'exemple précédent, $\frac{a-C}{b-C} u = v$ & $\frac{a-A}{b-A} u - \frac{a-C}{b-C} u = \Delta v$; ce qui donne les deux valeurs suivantes de u,

$$u = \frac{b-C}{a-C} v$$

$$u = \frac{(b-A)(b-C)}{(A-C)(a-b)} \Delta v$$

& par conséquent $\Delta v = \frac{(A-C)(a-b)}{(a-A)(a-C)} v$;

soit substituée la première valeur de u dans l'équation (E), & elle deviendra

$$\frac{B(b-C)^m v^m}{(b-A)^m (a-C)^m} - \frac{D v^n}{(a-C)^n} = \Delta \varphi v$$

équation aux différences finies, dans laquelle la variable eſt proportionnelle à ſa différence finie, & qu'il faut intégrer pour avoir la forme de la fonction φ.

Pour cela, ſoit repréſenté par K le rapport conſtant de la variable à ſa différence finie, de manière que l'on ait $\Delta u = Ku$; cela poſé, on aura $\Delta (u^m) = (u + Ku)^m - u^m = u^m [(1+K)^m - 1]$, d'où l'on tire $u^m = \frac{\Delta (u^m)}{(1+K)^m - 1}$; par la même raiſon, on aura $u^n = \frac{\Delta (u^n)}{(1+K)^n - 1}$; d'où il ſuit que la dernière équation pourra ſe traduire ainſi:

$$\frac{B(b-C)^m \Delta (v^m)}{(b-A)^m (a-C)^m [(1+K)^m - 1]} - \frac{D.\Delta (v^n)}{(a-C)^n [(1+K)^n - 1]} = \Delta \varphi v,$$

dont l'intégrale eſt évidemment

$$\varphi v = \frac{B(b-C)^m v^m}{(b-A)^m (a-C)^m [(1+K)^m - 1]} - \frac{D.v^n}{(a-C)v^n [(1+K)^n - 1]} + \text{conſt.}$$

or, on a ici

$$K = \frac{(A-C)(a-b)}{(b-A)(a-C)}, \ \& \ (K+1) = \frac{(A-C)(a-b)+(b-A)(a-C)}{(b-A)(a-C)}$$

$$= \frac{(a-A)(b-C)}{(b-A)(a-C)};$$ donc, en ſubſtituant cette valeur on trouvera

$$\varphi v = \frac{B(b-C)^m v^m}{(a-A)^m (b-C)^m - (b-A)^m (a-C)^m} - \frac{D(b-A)^n v^n}{(a-A)^n (b-C)^n - (b-A)^n (a-C)^n} + \text{conſt.}$$

Connoiſſant la forme de la fonction φ, ſi on la ſubſtitue dans l'une ou l'autre des équations (C) & (D), on trouvera également

$$\psi u = \frac{D(a-A)^n u^n}{(a-A)^n (b-C)^n - (b-A)^n (a-C)^n} - \frac{B(a-C)^m u^m}{(a-A)^m (b-C)^m - (b-A)^m (a-C)^m} - \text{conſt.}$$

d'où il ſuit que l'équation demandée, ou la valeur de z doit être

$$z = \frac{B(b-C)^m (ax-y)^m - B(a-C)^m (bx-y)^m}{(a-A)^m (b-C)^m - (b-A)^m (a-C)^m} + \frac{D(a-A)^n (bx-y)^n - D(b-A)^n (ax-y)^n}{(a-A)^n (b-C)^n - (b-A)^n (a-C)^n}.$$

En

En effet, cette équation eſt de la forme $z = \varphi\,(ax - y) + \psi\,(bx - y)$, & ſatisfait en même temps aux deux conditions de la queſtion, comme on peut s'en aſſurer.

COROLLAIRE.

La détermination des fonctions arbitraires de l'équation $z = \varphi U + \psi V$, ne dépend donc que de l'intégration d'une équation aux différences finies de cette forme, $W = \Delta \,.\, \varphi v$, dans laquelle W eſt une quantité donnée en v, & où le rapport conſtant ou variable, de la variable principale v à ſa différence finie Δv, eſt donné.

REMARQUE.

L'équation $z = \varphi\,(ax - y) + \psi\,(bx - y)$ eſt l'intégrale de l'équation aux différences partielles

$$\frac{\delta\delta z}{dx^2} + (a + b)\,\frac{\delta\partial z}{dx\,dy} + ab\,\frac{\partial\partial z}{dy^2} = 0.$$

Si l'on a $a = b$, la valeur de z que j'ai donnée dans le dernier exemple, devient $z = \frac{0}{0} - \frac{0}{0}$, & par conſéquent ne produit plus rien; mais il faut remarquer que dans cette hypothèſe, la propoſée qui devient $z = \varphi\,(ax - y)$ ceſſe d'être l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles, dont l'intégrale eſt alors $z = \varphi\,(ax - y) + x\,\psi\,(ax - y)$. Or, dans le Mémoire que j'ai déjà donné ſur cette matière, j'ai fait voir qu'il étoit toujours poſſible de déterminer les fonctions arbitraires de cette équation, puiſque ces fonctions ſont compoſées de la même quantité $(ax - y)$, & même de conſtruire la valeur de z, quand les conditions de la queſtion renfermeroient des quantités diſcontinues, ou n'auroient point d'expreſſions analytiques. Si on n'a pas $a = b$, il ſera poſſible de conſtruire la valeur de z; mais comme on ne le pourra généralement faire qu'après avoir intégré l'équation aux différences finies, j'avouerai que je ne vois pas comment on pourroit procéder, en ſuppoſant les conditions diſcontinues, à moins que, comme dans le cas

des cordes vibrantes, ces conditions n'aient quelques particularités qui facilitent l'opération.

PROBLÈME II.

Déterminer les formes des fonctions arbitraires φ *&* ψ, *dans l'équation*

$$\mathrm{F\,z} = \mathrm{L} + \mathrm{M}\,\varphi\,\mathrm{U} + \mathrm{N}\,\psi\,\mathrm{V},$$

de manière qu'elle satisfasse en même-temps à ces deux conditions;

1.° *qu'en faisant* $\mathrm{y} = \Gamma\,\mathrm{x}$, *on ait* $\mathrm{z} = \mathrm{f\,x}$;
2.° *qu'en faisant* $\mathrm{y} = \Gamma'\,\mathrm{x}$, *on ait* $\mathrm{z} = \mathrm{f'\,x}$;

les quantités L, M, N, U *&* V *étant données en* x *&* y, *& les formes des fonctions* F, Γ, Γ′, f *&* f′ *étant données.*

SOLUTION.

Soit mise à la place de y sa valeur Γx, dans les quantités L, M, N, U & V, qui par-là deviendront des fonctions connues de x que je représente respectivement par L', M', N', U' & V'. Soit pareillement mise pour y sa valeur $\Gamma' x$ dans les mêmes quantités, ce qui donnera de nouvelles fonctions de x, L'', M'', N'', U'' & V''. On aura par les deux conditions de la question, les deux équations suivantes,

$$(A)\quad F(\mathrm{f}x) = L' + M'\varphi U' + N'\psi V',$$
$$(B)\quad F(\mathrm{f}'x) = L'' + M''\varphi U'' + N''\psi V''.$$

On fera $V' = u$, d'où l'on tirera une valeur de x en u, que je représente par fu, & que l'on substituera à la place de x dans les quantités L', M', N' & U'; soient $`L, `M, `N$ & $`U$ les fonctions de u, que deviennent ces quantités par cette opération; l'équation (A) se transformera évidemment en celle-ci,

$$F[\mathrm{f}(fu)] = `L + `M\varphi`U + `N\psi u.$$

On fera de même $V'' = u$, & ayant substitué la valeur de x en u, prise dans cette équation, & que j'indique par $x = f'u$, dans les quantités L'', M'', N'' & U'', elles se transformeront

en des fonctions de u que je désigne respectivement par $''L$, $''M$, $''N$ & $''U$, & l'équation (B) deviendra

$$F[f'(f'u)] = ''L + ''M\varphi ''U + ''N\psi u;$$

égalant les deux valeurs de ψu, on aura

$$''NF[f(fu)] - 'NF[f'(f'u)] = ''N'L - 'N''L + 'M''N\varphi 'U - ''M'N\varphi ''U,$$

équation en u, qui ne renferme plus d'arbitraires que la fonction φ.

Soit fait $''U = v$, & $'U - ''U = \Delta v$, ce qui donne $\varphi 'U = \varphi(v + \Delta v) = \varphi v + \Delta\varphi v$, & le second membre de l'équation précédente deviendra

$$''N'L - 'N''L + ['M''N - ''M'N]\varphi v + 'M''N\Delta\varphi v.$$

Cela fait, des deux équations $''U = v$ & $'U - ''U = \Delta v$, on tirera deux valeurs de u, l'une en v, & l'autre en Δv, ce qui produira, en éliminant u, une valeur de Δv en v, que je représente par $\Delta v = Kv$; on substituera la valeur de u en v dans le premier membre, & dans les coëfficiens du second, & cette équation deviendra de la forme générale $W = \pi\varphi v + \omega\Delta.\varphi v$, où les quantités W, π & ω sont données en v, & dont l'intégrale donnera la forme de la fonction φ. Connoissant cette forme, il sera facile de déterminer celle de la fonction ψ, comme je l'ai déjà fait dans le Problème précédent.

EXEMPLE.

Soit la proposée $z^p = x^2\varphi(ax - y) + y^2\psi(bx - y)$ dans laquelle il faille déterminer les fonctions φ & ψ de telle manière, 1.° qu'en faisant $y = Ax$, on ait $z = Bx^m$; 2.° qu'en faisant $y = Cx$, on ait $z = Dx^n$.

Je fais dans cet exemple $L = 0$, parce que cette quantité n'empêche pas la solution générale de la question. En effet, si dans l'équation générale $Fz = L + M\varphi U + N\psi V$, on fait $Fz - L = \varpi$, on la transformera en une autre $\varpi = M\varphi U + N\psi V$, dans laquelle le terme L ne se trouve plus.

SOLUTION.

Par les deux conditions, on aura les deux équations ſuivantes,

(A) $B^p x^{pm} = x^2 \varphi\, (a - A) x + A^2 x^2 \psi\, (b - A)\, x$

(B) $D^p x^{pn} = x^2 \varphi\, (a - C) x + C^2 x^2 \psi\, (b - C) x.$

En faiſant $x = \frac{u}{b-A}$ dans la première, & $x = \frac{u}{b-C}$ dans la ſeconde, elles deviendront

(C) $\frac{B^p u^{pm-2}}{(b-A)^{pm-2}} = \varphi\, \frac{a-A}{b-A}\, u + A^2 \psi\, u,$

(D) $\frac{D^p u^{pn-2}}{(b-C)^{pn-2}} = \varphi\, \frac{a-C}{b-C}\, u + C^2 \psi u.$

Éliminant $\psi\, u$ des deux équations, l'on aura

$$\frac{C^2 B^p u^{pm-2}}{(b-A)^{pm-2}} - \frac{A^2 D^p u^{pn-2}}{(b-C)^{pn-2}} = C^2 \varphi\, \frac{a-A}{b-A}\, u - A^2 \varphi\, \frac{a-C}{b-C}\, u.$$

Actuellement, ſoit fait

$\frac{a-C}{b-C}\, u = v$, & $\frac{a-A}{b-A}\, u - \frac{a-C}{b-C}\, u = \Delta v,$

ce qui donnera les deux valeurs ſuivantes de u,

$$u = \frac{b-C}{a-C}\, v,$$

$$u = \frac{(b-A)(b-C)}{(A-C)(a-b)}\, \Delta v.$$

Par conſéquent $\Delta v = \frac{(A-C)(a-b)}{(b-A)(a-C)}\, v = Kv$, & l'équation précédente deviendra

$$\frac{B^p (b-C)^{pm-2}\, v^{pm-2}}{(b-A)^{pm-2}\, (a-C)^{pm-2}} - \frac{A^2 D^p v^{pn-2}}{C^2\, (a-C)^{pn-2}} = \left(1 - \frac{A^2}{C^2}\right) \varphi v + \Delta \varphi v.$$

qu'il faut intégrer pour avoir la forme de la fonction φ.

Pour cela, on la mettra ſous la forme abrégée $G v^{\alpha} + H v^{\beta} = J \varphi v + \Delta\, \varphi\, v$, & on transformera le premier membre en un autre qui ſoit de même forme que le ſecond; c'eſt-à-dire que ω étant une variable, on lui donnera la forme de $J \omega + \Delta\, \omega$; ce qui eſt facile ici. Nous avons vu en effet

dans l'*Exemple II* du *Problème I.er* que K étant constant dans le rapport $\Delta v = Kv$, l'on avoit $\Delta(v^m) = [(1 + K)^m - 1]v^m$; donc, si l'on partage les coëfficiens G & H, chacun en deux parties indéterminées; c'est-à-dire si l'on fait $G = g + g'$, & $H = h + h'$, le premier membre de l'équation pourra prendre cette forme $gv^\alpha + \frac{g'}{(1 - K)^\alpha - 1} \Delta(v^\alpha) + hv^\beta$ $+ \frac{h'}{(1 + K)^\beta - 1} \Delta(v^\beta)$, qui sera la même que $J\omega + \Delta\omega$, si les quatre indéterminées g, g', h & h' remplissent les deux conditions exprimées par ces équations

$$g = \frac{g'J}{(1 + K)^\alpha - 1}, \ \& \ h = \frac{h'J}{(1 + K)^\beta - 1},$$

ce qui donne les valeurs suivantes,

$$g = \frac{GJ}{J + (1 + K)^\alpha - 1},$$

$$g' = \frac{G[(1 + K)^\alpha - 1]}{J + (1 + K)^\alpha - 1},$$

$$h = \frac{HJ}{J + (1 + K)^\beta - 1},$$

$$h' = \frac{H[(1 + K)^\beta - 1]}{J + (1 + K)^\beta - 1};$$

alors le premier membre devient

$$\frac{GJv^\alpha + G\Delta(v^\alpha)}{J + (1 + K)^\alpha - 1} + \frac{HJv^\beta + H\Delta(v^\beta)}{J + (1 + K)^\beta - 1},$$

ou, ce qui revient au même, $\frac{G}{J + (1 + K)^\alpha - 1} [Jv^\alpha + \Delta(v^\alpha)]$ $+ \frac{H}{J + (1 + K)^\beta - 1} [Jv^\beta + \Delta(v^\beta)] = J\varphi v + \Delta\varphi v$; d'où l'on est en droit de conclure

$$\varphi v = \frac{Gv^\alpha}{J + (1 + K)^\alpha - 1} + \frac{Hv^\beta}{J + (1 + K)^\beta - 1} + \text{const.}$$

ou bien mettant pour les lettres G, H, J & K leurs valeurs développées,

$$\varphi v = \left.\begin{array}{l} \dfrac{C^2 B^p (b + C)^\alpha v^\alpha}{C^2(a-A)^\alpha (b-C)^\alpha - A^2(b-A)^\alpha (a-C)^\alpha} \\ - \dfrac{A^2 D^p (b-A)^\beta v^\beta}{C^2(a-A)^\beta (b-C)^\beta - A^2(a-C)^\beta (b-A)^\beta} \end{array}\right\} + \text{const.}$$

Connoiſſant la forme de la fonction φ, ſi on la lui ſubſtitue dans l'une ou l'autre des deux équations (C) & (D), on trouvera également

$$\psi u = \left.\begin{array}{l} \dfrac{D^p (a-A)^\beta u^\beta}{C^2(a-A)^\beta (b-C)^\beta - A^2(b-A)^\beta (a-C)^\beta} \\ - \dfrac{B^p (a-C)^\alpha u^\alpha}{C^2(a-A)^\alpha (b-C)^\alpha - A^2(b-A)^\alpha (a-C)^\alpha} \end{array}\right\} + \text{const.}$$

d'où il ſuit qu'en ſubſtituant pour α & β leurs valeurs $pm - 2$ & $pn - 2$, l'équation demandée ſera

$$z^p = \frac{x^2 C^2 B^p (b-C)^{pm-2} (ax-y)^{pm-2} - y^2 B^p (a-C)^{pm-2} (bx-y)^{pm-2}}{C^2 (a-A)^{pm-2} (b-C)^{pm-2} - A^2 (b-A)^{pm-2} (a-C)^{pm-2}}$$
$$+ \frac{D^p y^2 (a-A)^{pn-2} (bx-y)^{pn-2} - A^2 x^2 D^p (b-A)^{pn-2} (ax-y)^{pn-2}}{C^2 (a-A)^{pn-2} (b-C)^{pn-2} - A^2 (a-C)^{pn-2} (b-A)^{pn-2}};$$

en effet, cette équation eſt de la forme

$$z^p = x^2 \varphi (ax - y) + y^2 \psi (bx - y),$$

& ſatisfait en même-temps aux deux conditions de la queſtion.

Si l'on a $a = b$, l'on trouve $z = \frac{0}{0} + \frac{0}{0}$, mais alors il faut faire le même raiſonnement que nous avons déjà fait pour l'exemple du Problème I.er

COROLLAIRE.

Donc, la détermination des fonctions arbitraires de l'équation

$$Fz = L + M\varphi U + N\psi V$$

ne dépend que de l'intégration d'une équation aux différences finies de cette forme

$$W = \pi \varphi v + \omega \Delta \varphi v,$$

dans laquelle les quantités W, π & ω sont données en v, & où la variable v a un rapport déterminé avec sa différence Δv.

PROBLÈME III.

Déterminer les fonctions arbitraires dans l'équation

$$z = \varphi (U + \psi V),$$

pour qu'elle satisfasse à ces deux conditions,

1.° qu'en faisant $y = Fx$, *on ait* $z = f.x$,

2.° qu'en faisant $y = F'x$, *on ait* $z = f'.x$.

SOLUTION.

Avant de résoudre le Problème, il faut convenir d'une notation que je serai obligé d'employer. Soit Φ une fonction de forme connue, & que l'on ait l'équation $\Pi = \Phi \omega$, en supposant la perfection de l'analyse, il sera possible de trouver la valeur de ω en Π, & cette valeur sera une certaine fonction de Π que l'on pourroit représenter par un caractère particulier; néanmoins comme elle dépend de la fonction Φ, il convient d'employer le même caractère distingué par un accent, de cette manière $`\Phi$; dans cette hypothèse, si l'on a donc $\Pi = \Phi \omega$, on aura aussi $\omega = `\Phi \Pi$, & réciproquement. Il est évident que cette notation pourra avoir lieu de même lorsque la forme de la fonction sera inconnue; ainsi la proposée pourra se mettre sous cette forme

$$`\varphi z = U + \psi V.$$

Cela posé, soient $'U$ & $'V$ ce que deviennent les quantités U & V lorsqu'on y met à la place de y sa valeur Fx; soient de même $''U$ & $''V$, ce que deviennent les mêmes quantités, en substituant à y sa valeur $F'.x$, les deux conditions donneront

$$\text{(A)} \quad `\varphi (f x) = {}'U + \psi\, {}'V,$$

$$\text{(B)} \quad `\varphi (f' x) = {}''U + \psi\, {}''V.$$

Or, ces deux équations sont de même nature que les équations (A) & (B) du Problème I.er on les traitera par conséquent de la même manière, & l'on parviendra à connoître les fonctions $\grave{\varphi}$ & ψ; enfin renversant la fonction $\grave{\varphi}$, on connoîtra la valeur de z.

EXEMPLE.

Soit proposé de déterminer les fonctions arbitraires φ & ψ dans l'équation

$$z = \varphi\,[ax - y + \psi(bx - y)]$$

pour qu'elle satisfasse à ces deux conditions en même-temps;

1.° qu'en faisant $y = Ax$, on ait $z = Bx^m$;

2.° qu'en faisant $y = Cx$, on ait $z = Dx^n$.

Ayant converti la proposée en celle-ci

$$\grave{\varphi} z = ax - y + \psi(bx - y),$$

il est évident qu'on aura par les deux conditions de la question

$$\text{(A)} \quad \grave{\varphi}(Bx^m) = x(a - A) + \psi(b - A)x,$$

$$\text{(B)} \quad \grave{\varphi}(Dx^n) = x(a - C) + \psi(b - C)x.$$

Soit fait dans la première de ces équations $x = \frac{u}{b - A}$, & dans la seconde $x = \frac{u}{a - C}$, elles deviendront

$$\text{(C)} \quad \grave{\varphi}\left(\frac{Bu^m}{(b - A)^m}\right) = u\,\frac{a - A}{b - A} + \psi u,$$

$$\& \text{ (D)} \quad \grave{\varphi}\left(\frac{Du^m}{(b - C)^m}\right) = u\,\frac{a - C}{b - C} + \psi u,$$

& éliminant ψu, l'on aura $\grave{\varphi}\left(\frac{Bu^m}{(b - A)^m}\right) - \grave{\varphi}\left(\frac{Du^m}{(b - C)^m}\right)$
$= u\,\frac{a - A}{b - A} - u\,\frac{a - C}{b - C}$.

Actuellement soit fait

$$\frac{Du^m}{(b - C)^m} = v, \;\&\; \frac{Bu^m}{(b - A)^m} - \frac{Du^m}{(b - C)^m} = \Delta v,$$

d'où

d'où l'on tire,

$$u^m = \frac{(b-C)^m}{D} v,$$

$$u^m = \frac{(b-A)^m (b-C)^m}{B(b-C)^m - D(b-A)^m} \Delta v,$$

& par conséquent $\Delta v = \frac{B(b-C)^m - D(b-A)^m}{D(b-A)^m} v = Kv$, & l'équation précédente deviendra

$$\Delta' \varphi v = \frac{(A-C)(a-b)}{D^{\frac{1}{m}}(b-A)} v^{\frac{1}{m}}$$

dont l'intégrale donnera la forme de la fonction $'\varphi$.

Or, j'ai déjà fait voir que lorsque le rapport de la variable principale avec sa différence finie est constant, c'est-à-dire lorsque l'on a $\Delta v = Kv$, l'intégrale de la formule Gv^m est $\frac{Gu^m}{(1+K)^m - 1}$ + const. Donc l'intégrale de l'équation $\Delta' \varphi v = \frac{(A-C)(a-b)}{D^{\frac{1}{m}}(b-A)} v^{\frac{1}{m}}$ sera, toute réduction faite,

$$'\varphi v = \frac{(A-C)(a-b)}{B^{\frac{1}{m}}(b-C) - D^{\frac{1}{m}}(b-A)} v^{\frac{1}{m}} + \text{const.}$$

ou bien, pour abréger, $'\varphi v = R v^{\frac{1}{m}}$ + const. Substituant cette forme dans l'équation (C), ou dans l'équation (D), on trouvera également

$$\psi u = \frac{RB^{\frac{1}{m}} z}{(b-A)} - \frac{a(a-A)}{b-A} - \text{const.}$$

Donc l'équation demandée sera

$$Rz^{\frac{1}{m}} = ax - y + \frac{RB^{\frac{1}{m}}(bx-y)}{b-A} - \frac{(bx-y)(a-A)}{b-A};$$

ou

$$\text{(E)}\ z = \frac{1}{R^m}\left[ax - y + \frac{RB^{\frac{1}{m}} - (a-A)}{b-A}(bx-y)\right]^m.$$

Enfin, reſtituant pour R ſa valeur, & réduiſant, on obtiendra

$$z = \left\{ \frac{(ax-y)[B^{\frac{1}{m}}(b-C) - D^{\frac{1}{m}}(b-A)] + (bx-y)[D^{\frac{1}{m}}(a-A) - B^{\frac{1}{m}}(a-C)]}{(a-A)(b-C) - (a-C)(b-A)} \right\}^m,$$

équation qui eſt de la forme $z = \varphi\,[ax - y + \psi(bx-y)]$, puiſqu'elle eſt immédiatement tirée de l'équation (E), & qui ſatisfait aux deux conditions de la queſtion, comme il eſt facile de s'en apercevoir.

REMARQUES.

I. Si la propoſée avoit été $z = M + \varphi[U + N\psi V]$, on ſeroit parvenu par le même procédé à une équation aux différences finies de cette forme $\Pi^{`}\varphi v - \Delta\,\varphi v = W$. Donc, la détermination des fonctions arbitraires dépend encore dans ce cas-là du calcul intégral des équations aux différences finies à deux variables.

II. L'équation $z = \varphi\,[ax - y + \psi(bx - y)]$ que j'ai priſe pour exemple, eſt l'integrale de l'équation aux différences partielles

$$\frac{\partial z}{dy}\,\frac{\delta\delta z}{dx^2} - \left[\frac{\delta z}{dx} - b\,\frac{\partial z}{dy}\right]\frac{\delta\partial z}{dx\,dy} - b\,\frac{\delta z}{dx}\,\frac{\partial\partial z}{dy^2} = 0,$$

où il faut remarquer cette particularité, que la conſtante a eſt arbitraire, puiſqu'elle ne ſe trouve pas dans la différentielle. Ainſi, dans la queſtion qui aura conduit à cette équation, non-ſeulement il doit ſe trouver les deux conditions qui ſervent à déterminer les fonctions arbitraires φ & ψ; mais on doit encore avoir une valeur de z pour un x & un y donnés, afin de déterminer la conſtante arbitraire a.

III. Il n'y a point d'intégrale d'équation aux différences partielles à trois variables, & du ſecond ordre, c'eſt à-dire, il n'y a point d'intégrale d'équation à deux fonctions arbitraires qui ne puiſſe ſe ramener à quelqu'une de celles qui ſont l'objet des Problèmes précédens, ou qui ne puiſſe ſe

traiter par la même méthode. Par exemple, l'équation

$$\left.\begin{array}{l} z\frac{\delta\delta z}{dx^2} + Az\frac{\delta\partial z}{dx\,dy} + Bz\frac{\partial\partial z}{\partial y^2} \\ - \frac{\delta z^2}{dx^2} - A\frac{\delta z\partial z}{dx\partial y} - B\frac{\partial z^2}{dy^2} \end{array}\right\} = 0,$$

a pour intégrale l'équation

$$z = [\varphi(Px - y)] \times [\psi(P'x - y)],$$

les quantités P & P' étant les racines inégales de l'équation $P^2 - AP + B = 0$; & si les racines de cette équation sont égales, l'intégrale est alors

$$z = [\varphi(Px - y)]^x \times [\psi(Px - y)].$$

En effet, soit fait dans cette équation $z = e^\omega$, elle se transformera en celle-ci

$$\frac{\delta\delta\omega}{dx^2} + A\frac{\delta\partial\omega}{dx\partial y} + B\frac{\partial\partial\omega}{dy^2} = 0,$$

dont on sait que l'intégrale est généralement

$$\omega = \varphi(Px - y) + \psi(P'x - y),$$

ou $\omega = x\varphi(Px - y) + \psi(Px - y)$, lorsque l'on a $P = P'$. Ainsi, puisque $z = e^\omega$ donne $\omega = \log. z$, l'intégrale en z de l'équation, est

$\log. z = \varphi(Px - y) + \psi(P'x - y)$ lorsque les racines sont inégales,
& $\log. z = x\varphi(Px - y) + \psi(Px - y)$ lorsqu'elles sont égales,

ou enfin parce que les fonctions arbitraires φ & ψ peuvent être regardées comme les logarithmes d'autres fonctions,

$z = [\varphi(Px - y)] \times [\psi(P'x - y)]$ pour le premier cas,
& $z = [\varphi(Px - y)]^x \times [\psi(Px - y)]$ pour le second.

Par conséquent les équations $z = [\psi(ax - y)] \times [\varphi(bx - y)]$ & $z = [\varphi(ax - y)]^x \times \psi(ax - y)$ sont renfermées dans celles que j'ai déjà traitées, quoiqu'elles ne soient pas de même forme, parce qu'elles sont les mêmes que celles-ci

$$\log. z = \varphi(ax - y) + \psi(bx - y).$$
$$\& \log. z = x\varphi(ax - y) + \psi(ax - y);$$

dont la première rentre dans le cas du Problème précédent, & dont la seconde seroit constructible, quand même les courbes à doubles courbures données, par lesquelles les conditions de la question devroient faire passer la surface à laquelle elle appartient seroient discontinues; parce que les fonctions φ & ψ sont composées de la même quantité $ax - y$. On peut voir à ce sujet le Mémoire que j'ai déjà fait sur cette matière.

Ainsi il sera possible de déterminer les fonctions arbitraires dans l'équation générale $z = (\varphi U) \times (\psi V)$, puisqu'étant la même que log. $z = \varphi U + \psi V$, elle est comprise dans la proposée du Problème II, ou du moins cette opération ne dépendra que de l'intégration d'une équation logarithmique aux différences finies.

Il en est de même de l'équation $Fz = M + N(\varphi U) \times (\psi V)$, parce qu'en faisant $\frac{Fz - M}{N} = \omega$, elle devient $\omega = (\varphi U) \times (\psi V)$ & rentre par conséquent dans la précédente.

Passons actuellement aux équations qui renferment trois fonctions arbitraires.

PROBLÈME IV.

Déterminer les fonctions arbitraires Φ, φ *&* ψ *dans l'équation générale*

$$Fz = K + L\Phi U + M\varphi V + N\psi W,$$

de manière qu'elle satisfasse en même-temps aux trois conditions suivantes;

1.° *qu'en faisant* $y = \Gamma x$, *on ait* $z = fx$;

2.° *qu'en faisant* $y = \Gamma' x$, *on ait* $z = f'.x$;

3.° *qu'en faisant* $y = \Gamma'' x$, *on ait* $z = f'' x$;

les quantités K, L, M, N, U, V, *&* W *étant données en* x *&* y, *& les fonctions* F, Γ, Γ', Γ'', f, f' *&* f'' *étant données de forme.*

SOLUTION.

Soient ${}'K, {}'L, {}'M, {}'N, {}'U, {}'V$ & ${}'W$ les fonctions de x, que deviennent respectivement les quantités K, L, M, N, U, V & W, en mettant à la place de y sa première valeur $\Gamma . x$. Soient ${}''K, {}''L, {}''N, {}''U, {}''V$ & ${}''W$, ce que deviennent les mêmes quantités en substituant à y sa seconde valeur $\Gamma' x$; enfin, soient ${}'''K, {}'''L, {}'''M, {}'''N, {}'''U, {}'''V$ & ${}'''W$ ce qu'on obtient en mettant dans les mêmes quantités pour y sa troisième valeur $\Gamma'' x$; on aura par les trois conditions du Problème les équations suivantes,

$$F(\mathrm{f}x) = {}'K + {}'L\Phi{}'U + {}'M\varphi{}'V + {}'N\psi{}'W,$$
$$F(\mathrm{f}'x) = {}''K + {}''L\Phi{}''U + {}''M\varphi{}''V + {}''N\psi{}''W,$$
$$F(\mathrm{f}''x) = {}'''K + {}'''L\Phi{}'''U + {}'''M\varphi{}'''V + {}'''N\psi{}'''W.$$

Soit substituée dans la première de ces équations, à la place de x sa valeur fu prise dans l'équation ${}'W = u$; dans la seconde, la valeur de $x = f'u$ prise dans ${}''W = u$; dans la troisième, la valeur de $x = f''u$ prise dans ${}'''W = u$. Soient aussi ${}^{\backprime}K, {}^{\backprime}L, {}^{\backprime}M \ldots {}^{\backprime\backprime}K, {}^{\backprime\backprime}L, {}^{\backprime\backprime}M \ldots {}^{\backprime\backprime\backprime}K, {}^{\backprime\backprime\backprime}L, {}^{\backprime\backprime\backprime}M \ldots$ &c. les fonctions de u, que deviennent par cette opération les fonctions correspondantes de x, représentées par ${}'K, {}'L, {}'M \ldots {}''K, {}''L, {}''M \ldots {}'''K, {}'''L, {}'''M \ldots$ &c. & les trois équations se transformeront en celles-ci,

$$F[\mathrm{f}(fu)] = {}^{\backprime}K + {}^{\backprime}L\Phi{}^{\backprime}U + {}^{\backprime}M\varphi{}^{\backprime}V + {}^{\backprime}N\psi u,$$
$$F[\mathrm{f}'(f'u)] = {}^{\backprime\backprime}K + {}^{\backprime\backprime}L\Phi{}^{\backprime\backprime}U + {}^{\backprime\backprime}M\varphi{}^{\backprime\backprime}V + {}^{\backprime\backprime}N\psi u,$$
$$F[\mathrm{f}''(f''u)] = {}^{\backprime\backprime\backprime}K + {}^{\backprime\backprime\backprime}L\Phi{}^{\backprime\backprime\backprime}U + {}^{\backprime\backprime\backprime}M\varphi{}^{\backprime\backprime\backprime}V + {}^{\backprime\backprime\backprime}N\psi u.$$

Éliminant ψu, il restera les deux équations

$${}^{\backprime\backprime}NF[\mathrm{f}(fu)] - {}^{\backprime}NF[\mathrm{f}'(f'u)] = {}^{\backprime\backprime}N{}^{\backprime}K - {}^{\backprime}N{}^{\backprime\backprime}K + {}^{\backprime\backprime}N{}^{\backprime}L\Phi{}^{\backprime}U - {}^{\backprime}N{}^{\backprime\backprime}L\Phi{}^{\backprime\backprime}U + {}^{\backprime}M{}^{\backprime\backprime}N\varphi{}^{\backprime}V - {}^{\backprime\backprime}M{}^{\backprime}N\varphi{}^{\backprime\backprime}V,$$
$${}^{\backprime\backprime\backprime}NF[\mathrm{f}'(f'u)] - {}^{\backprime\backprime}NF[\mathrm{f}''(f''u)] = {}^{\backprime\backprime\backprime}N{}^{\backprime\backprime}K - {}^{\backprime\backprime}N{}^{\backprime\backprime\backprime}K + {}^{\backprime\backprime\backprime}N{}^{\backprime\backprime}L\Phi{}^{\backprime\backprime}U - {}^{\backprime\backprime}N{}^{\backprime\backprime\backprime}L\Phi{}^{\backprime\backprime\backprime}U + {}^{\backprime\backprime}M{}^{\backprime\backprime\backprime}N\varphi{}^{\backprime\backprime}V - {}^{\backprime\backprime\backprime}M{}^{\backprime\backprime}N\varphi{}^{\backprime\backprime\backprime}V,$$

que j'écris, pour abréger, de la manière suivante,

$$A = B\Phi{}^{\backprime}U - C\Phi{}^{\backprime\backprime}U + E\varphi{}^{\backprime}V - G\varphi{}^{\backprime\backprime}V,$$
$$\mathrm{a} = \mathrm{b}\Phi{}^{\backprime\backprime}U - \mathrm{c}\Phi{}^{\backprime\backprime\backprime}U + \mathrm{e}\varphi{}^{\backprime\backprime}V - \mathrm{g}\varphi{}^{\backprime\backprime\backprime}V,$$

dans lesquelles les quantités $A, B, C \ldots$ &c. a, b, c... &c. sont données en u, & où il ne reste plus que les deux fonctions arbitraires Φ & φ.

Soit fait ${}^{``}U = v$ & ${}^{`}U - {}^{``}U = \Delta v$, ce qui donne $\Phi\,{}^{`}U = \Phi v + \Delta \Phi v$, & d'où l'on tire deux valeurs de u, l'une en v, & l'autre en Δv, & par conséquent un rapport de Δv à v. Soit fait aussi ${}^{``}V = v'$ & ${}^{`}V - {}^{``}V = \Delta' v'$, ce qui donne $\varphi\,{}^{`}V = \varphi v' + \Delta' \varphi v'$, & une valeur de $\Delta' v'$ en v'.

Soit fait semblablement dans la seconde équation, ${}^{```}U = \omega$ & ${}^{``}U - {}^{```}U = \delta \omega$, ($\delta$ étant ici le caractère d'une différence finie) ce qui donne $\Phi\,{}^{``}U = \Phi \omega + \delta \Phi \omega$, & d'où l'on tire deux valeurs de u, l'une en ω, l'autre en $\delta \omega$, & par conséquent un rapport de $\delta \omega$ à ω. Soit fait ${}^{```}V = \omega'$ & ${}^{``}V - {}^{```}V = \delta' \omega'$; d'où l'on tire $\varphi\,{}^{``}V = \varphi \omega' + \delta' \varphi \omega'$, & un rapport de la différence finie $\delta' \omega$ à ω.

Enfin, soit substituée pour u sa valeur en v dans les coëfficiens de la première équation, & pour u sa valeur en ω dans les coëfficiens de la seconde, elles deviendront

$$A' = (B' - C')\Phi v + B'\Delta\Phi v + (E' - G')\varphi v' + E'\Delta'\varphi v',$$
$$a' = (b' - c')\Phi\omega + b'\delta\Phi\omega + (e' - g')\varphi\omega' + e'\delta'\varphi\omega',$$

dont les intégrales donneront les formes des fonctions φ & Φ, & par conséquent celle de la fonction ψ.

REMARQUE.

Il y a un grand nombre de cas où il est facile d'éliminer une de ces deux fonctions arbitraires. En effet, il est évident que l'on peut mettre v à la place de ω dans la seconde de ces équations; mais alors il ne faut pas mettre v' à la place de ω', parce que v' n'est pas composé de v comme ω' l'est de ω. Ainsi les deux équations précédentes peuvent se traduire de cette manière,

$$A' = (B' - C')\Phi v + B'\Delta\Phi v + (E' - G')\varphi v' + E'\Delta'\varphi v',$$
$$a' = (b' - c')\Phi v + b'\delta\Phi v + (e' - g')\varphi v'' + e'\delta'\varphi v'',$$

desquelles il sera possible d'éliminer la fonction Φ toutes les fois que les coëfficiens $(B' - C')$, B', $(b' - c')$ & b' seront constans; car on aura

$$(\mathrm{b}' - \mathrm{c}')A' + \mathrm{b}'\delta A' = (\mathrm{b}' - \mathrm{c}')(B' - C')\Phi\nu + (\mathrm{b}' - \mathrm{c}')B'\Delta\Phi\nu$$
$$+ \mathrm{b}'(B' - C')\,\delta\Phi\nu + B'\mathrm{b}'\delta\Delta\Phi\nu$$
$$+ (\mathrm{b}' - \mathrm{c}')[(E' - G')\varphi\nu' + E'\Delta'\varphi\nu'] + \mathrm{b}'\delta[(E' - G')\varphi\nu' + E'\Delta'\varphi\nu'],$$

&

$$(B' - C')\mathrm{a}' + B'\Delta\mathrm{a}' = (B' - C')(\mathrm{b}' - \mathrm{c}')\Phi\nu + (B' - C')\mathrm{b}\delta\Phi\nu$$
$$+ (B' - C')B'\Delta\Phi\nu + B'\mathrm{b}'\Delta\delta\Phi\nu$$
$$+ (B' - C')[(\mathrm{e}' - \mathrm{g}')\varphi\nu'' + \mathrm{e}'\delta'\varphi\nu''] + B'\Delta[(\mathrm{e}' - \mathrm{g}')\varphi\nu'' + \mathrm{e}'\delta'\varphi\nu''],$$

& retranchant ces deux équations l'une de l'autre, les termes affectés de la fonction Φ se détruiront, il ne restera dans l'équation que la fonction φ & ses différences finies & partielles.

Il est aisé d'apercevoir qu'il en sera de même, quelque nombre de fonctions arbitraires qu'il y ait dans la proposée: Donc, la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles, dépend du calcul intégral des équations aux différences finies, dans lesquelles le rapport de la variable à sa différence finie est donné, variable ou constant.

MÉMOIRE
SUR
LA STRUCTURE DES OS DANS LES OISEAUX,
Et de leurs diverſités dans les différentes eſpèces.

Par M. CAMPER.

TOUTES les fois que j'ai examiné la ſtructure interne des animaux, j'ai admiré l'obſervation du grand Galilée*. Que l'on y rencontre toujours de nouvelles merveilles! J'en ai déjà donné pluſieurs preuves, dans l'expoſition de la génération des crapauds de Surinam ou de Dipal; dans celle de l'organe de l'ouïe des poiſſons ordinaires, des poiſſons cartilagineux, & du Cachalot que j'ai préſentée, en partie, à l'Académie royale des Sciences, en partie à celle de Harlem. Parmi les deſcriptions que je n'ai pas encore eu le temps d'achever, aucune ne m'a paru plus digne d'attention, que celle des cavités qui ſe trouvent dans les os des Oiſeaux, principalement dans ceux qui environnent leur tronc.

* *Syſtemat. Coſſuſc. Dialog. II, p. 210.*

Les os du bras, les clavicules, les os de la poitrine, les vertèbres du dos, les os des îles, & dans pluſieurs les os de la cuiſſe, ſont tout-à-fait creux, ſans moelle, & reçoivent dans leurs cavités, par la reſpiration, l'air, qui par ce moyen rend les oiſeaux plus légers, & plus capables de s'élever dans l'air.

C'eſt une découverte tout-à-fait nouvelle, qui ſera d'autant plus agréable à l'Académie, qu'elle eſt purement phyſique. Je l'ai faite au mois de Février de l'année paſſée, lorſque j'étois occupé à faire des recherches ſur les Oiſeaux, pour développer le mécaniſme de la reſpiration qui y eſt fort ſingulière.

Je

Je favois, d'après les réflexions de Galilée [a] & de Borelli [b], que les os des oifeaux étoient creux & minces, afin qu'ils puiffent plus facilement voler: ces deux grands hommes ont été uniquement attentifs à la fubftance des os; Galilée furtout, qui a très-évidemment prouvé, en les comparant avec les tuyaux de bois ou de métal, qu'un os de la même longueur & pefanteur étant creux [c], avoit plus de force qu'un os de la même pefanteur & longueur, mais plein; il a même ajouté cette règle admirable: *que la force des os creux eft à celle des os folides, dans ce cas, comme leurs diamètres* [d]. Cette réflexion peut non-feulement être appliquée à la ftructure des os en général, mais auffi à celle des plantes, dans lefquelles nous voyons de pareilles cavités fans moelle, mais remplies d'air.

Borelli [e] a développé dans l'explication du vol des oifeaux & du mécanifme de leurs ailes, la connoiffance parfaite qu'il avoit de la compofition de leurs os [f], de la cavité de leur poitrine & de leur bas-ventre, & de l'air qui remplit ces deux cavités.

La refpiration des oifeaux eft aujourd'hui trop connue, pour avoir befoin d'une explication particulière; mais la refpiration dans les os du tronc, des ailes & des cuiffes, mérite un détail particulier. C'eft à cette confidération feule que je me bornerai dans ce Mémoire.

Je l'ai appelée une découverte, puifque je ne connois aucun Auteur qui en ait indiqué la moindre chofe; il eft bien vrai que M. le Comte de Marfigli [g], a fu que les os du bras, dans le pélican, étoient creux & fans moelle, & très-légers; mais il n'a pas fongé à l'air, ni à la façon dont l'air devoit entrer dans cette cavité.

M. le Comte de Buffon, le plus grand Naturalifte que nous ayons vu depuis Ariftote, n'a pas ignoré ce que Galilée & Borelli ont communiqué à ce fujet; il en fait ufage dans fon excellent Difcours fur la nature des Oifeaux [h]; mais il n'a pas fu que les cavités de ces os reçoivent de l'air au lieu de moelle, & que ce fluide y entre par la refpiration.

[a] *De Mechan. dial. 2, p. 132.*
[b] *De motu animi, propof. 194, p. 156.*
[c] *Ibid.*
[d] *Mechan. dial. 2, p. 132.*
[e] *Prop. 182, p. 146.*
[f] *Prop. 194.*
[g] *Danub. Fran. Myfic. tom. VI, tab. 8, p. 10 & feq.*
[h] *Pages 16, 33, 34.*

On m'apporta le 10 de Février 1771, un grand aigle de mer *, tel que ceux dont on tire annuellement une grande quantité, aux environs de cette Ville, pendant la gelée. Je disséquai les côtes, sur-tout les crochets & leurs muscles, &c. Je préparai un os de la cuisse, principalement pour montrer sa cavité & les fibres qui soutiennent en dedans la lame osseuse dans cet animal. Je croyois y trouver de la moelle, mais je n'y trouvai qu'un périoste, une grande veine *ikl*, qui le tapissoit, & des traces de l'air épanché, comme je l'ai représenté dans la sixième figure.

* *L'orfraie de Buffon, Hist. des Oiseaux, tome I.er, page 112.*

Étonné de cet évènement, j'allai d'abord examiner le squelette d'un aigle, d'un aras & d'un hibou; je trouvai un très-grand trou sous le grand trochanter du squelette de l'aigle, je n'en trouvai aucun vestige dans les autres. Mais je voyois de très-grands trous sous les têtes des os du bras de tous mes squelettes d'oiseaux. J'examinai donc les bras dans l'aigle avec beaucoup d'attention, j'ouvris cet os suivant sa longueur, je n'y rencontrai point de moelle, mais le périoste, comme dans les os de la cuisse, & une ouverture très-grande à la partie intérieure de la tête de l'humerus *fig. 1, a, b, c*. Voilà une analogie. L'air pouvoit entrer par ces trous dans les cavités des os; mais je ne savois pas encore comment il pouvoit pénétrer jusqu'à ces ouvertures? J'avois par hasard un hibou qui étoit mort; je fis un petit trou à l'extrémité de l'os du bras, *fig. 3, idem*; j'appliquai un tuyau de cuivre, & soufflant, je vis avec bien du plaisir que toute la poitrine & le bas-ventre s'enflèrent; l'air sortoit par la trachée-artère à mesure que je soufflois. Je liai donc, pour avoir une contre-épreuve, la trachée-artère autour de mon tuyau, & soufflant, j'eus la satisfaction de voir sortir l'air par le petit trou fait à l'os du bras, lorsque j'y appliquois la flamme d'une bougie ou quelque corps léger, ou une petite plume.

L'os de la cuisse de ce hibou, quoique perforé, ne transmettoit pas l'air, aussi n'y avoit-il pas d'ouverture sous le trochanter.

La poitrine & le bas-ventre de l'aigle étoient trop bleſſés pour répéter ces expériences; j'ôtai donc les boyaux, je ſoufflai par l'os de la cuiſſe, & je vis que la plèvre qui va juſque dans le bas-ventre, formoit un conduit membraneux, qui allant le long des vaiſſeaux cruraux, aboutiſſoit à l'ouverture de la cuiſſe *d, e, f, fig. 6*, & qui donnoit paſſage à l'air pour entrer librement dans la cavité de cet os. Cela redoubla mon ardeur pour pouſſer plus loin mes découvertes.

Je me fis donner des magaſins à proviſion, un dindon & quelques poulardes; je perforai de la même façon les extrémités des os du bras, j'y appliquai mon tuyau, & ſoufflant, je vis avec ſurpriſe la poitrine & le bas-ventre s'enfler comme dans le hibou; les fémurs n'admettoient pas l'air, n'étant pas vides, mais remplis de moelle comme dans les hibous. Dans le coq de bruyère, l'expérience réuſſit comme dans l'aigle, car ils ont des trous ſous le trochanter, *fig. 8, d, e, f.*

La cigogne, dont on me montra le ſquelette, a les os du bras pareillement vides & remplis d'air, & un trou conſidérable *a, b, c, fig. 2;* elle a auſſi les cuiſſes vides, & un trou manifeſte ſous le trochanter, *fig. 7, d, e, f.*

J'imaginai dès-lors que je trouverois les os du bras vides dans la plupart des oiſeaux; mais que je ne trouverois les cuiſſes perforées & perméables à l'air que dans ceux qui volent très-haut, comme les aigles, les cigognes, & tous ceux qui ont le corps peſant & beaucoup de muſcles, &c.

Cette conjecture fut vérifiée par la diſſection d'un moineau, ſes cuiſſes ſe trouvèrent, auſſi-bien que les bras, remplies de moelle; auſſi ne vole-t-il pas haut, ni long-temps de ſuite. L'allouette, par exemple, qui remplit l'air de ſon chant mélodieux ſe ſoutient long-temps ſur ſes ailes; ſes bras ſont creux, remplis d'air, & ils ont une ouverture très-conſidérable.

Je deſirois alors ardemment d'avoir des ſquelettes d'autruche, de caſoar & de pingoin, pour ſavoir ſi les os des bras étoient remplis d'air? Je formois déjà une concluſion négative; je priai M. le profeſſeur Allemand de Leyde, d'examiner le ſquelette de l'autruche, il eut la bonté de me répondre,

qu'il n'y avoit aucune ouverture ſous la tête de l'*os humerus* de cet oiſeau. Je ne trouvai nulle part le ſquelette d'un caſoar ni d'un pingoin; j'ai reçu depuis peu deux pingoins du cap de Bonne-eſpérance, dans l'eſprit-de-vin ; je n'ai pas encore eu le temps de pouvoir diſſéquer les parties intéreſſées.

* Prop. 182. Borelli * a déjà fait une très-belle remarque, que les ailes ſont plus grandes à meſure que les oiſeaux volent plus haut; mais la nôtre rend leur mécaniſme plus curieux & plus intéreſſant.

Je reviens de cette digreſſion à l'aigle dont j'examinai très-attentivement les clavicules & les ſoutiens des omoplates, les omoplates même, l'os *ſternum*, les côtes & les vertèbres du dos, j'ai trouvé tous ces os creux, vides, remplis d'air, même l'os *ſacrum*, & les os des îles.

Je fis le 24 Février 1771, les expériences ſuivantes dans un hibou étouffé.

1.° Ayant ôté le grand muſcle pectoral, & perſoré l'os du bras près de ſon extrémité, je ſoufflai dans ce trou, & j'aperçus ſur le champ une grande poche membraneuſe, entre les deux pectoraux, qui alloit le long des vaiſſeaux & des nerfs brachiaux, donnant un conduit membraneux vers l'ouverture qui ſe trouve près de la tête de cet os; cette poche s'enfloit auſſi, lorſque je ſoufflois par la trachée-artère.

2.° Je décharnai le ſoutien oſſeux de l'omoplate, qui étoit articulé avec le *ſternum;* j'y fis une ouverture très-petite, j'y ſoufflai, & la même poche s'enfla à pluſieurs repriſes.

3.° Je perforai la lame extérieure du *ſternum*, près de ſon union avec les ſoutiens ci-devant décrits : l'air paſſoit auſſi immédiatement dans la poitrine & dans le bas-ventre. Preſque tous les oiſeaux ont des trous dans l'intérieur de cet os, & la plèvre eſt la continuation du périoſte interne des cellules de cet os.

4.° Je fis la même expérience ſur les clavicules, & je m'aperçus pareillement de leur communication avec la cavité de la poitrine.

5.° Je décharnai la partie postérieure de l'os des îles, je perforai la lame osseuse extérieure, & l'air passoit par ses cellules dans la poitrine comme si j'avois soufflé par la trachée-artère.

6.° L'air passoit aussi par les corps des vertèbres du dos, après avoir décharné leur corps, perforé la lame osseuse, & appliqué un tuyau.

7.° Les côtés sont aussi vides, & reçoivent l'air par plusieurs trous qui sont visibles en dedans de la cavité de la poitrine; aussi peut-on, par la même opération, souffler l'air par les côtes dans la poitrine, comme par les autres os ci-devant nommés.

J'ai répété les première, seconde, troisième, quatrième & sixième Expériences sur un aigle, le 13 Mars 1771, devant mes auditeurs, au théâtre anatomique, avec le même succès.

8.° J'ai perforé l'os de la cuisse de cette orfraie; j'y ai applique mon tuyau, & l'air a passé facilement dans la poitrine de cet animal. Ayant soufflé par la trachée-artère, l'air a sorti par ce même trou avec tant de violence qu'il m'a été facile, par ce moyen, d'éteindre une chandelle très-promptement.

Je ne saurois dire si la même structure a lieu dans les autres oiseaux; cela exige un examen plus particulier: il suffit que l'aigle, dont la vélocité & la hauteur du vol sont les plus grandes, & dont la force, tant pour voler, que pour saisir & pour déchirer sa proie, doit être nécessairement plus grande; que l'aigle, dis-je, se rende plus léger, non-seulement par l'air qui dilate ses poumons, sa poitrine & son bas-ventre, mais encore par l'air qui remplit les cavités de ses os.

Il est très-probable, par les expériences faites sur le hibou, que la Nature se sert du même mécanisme dans tous les oiseaux de proie.

Il est pareillement très-probable que dans l'autruche, le casoar & les pingoins, on ne trouvera aucun os creux; que dans les cygnes, les oies & les canards les os du bras seuls seront vides & remplis d'air; & seulement en partie dans les

dindons, les poules & les perdrix; car ces dernières ont les os du bras en partie remplis de moelle, en partie de l'air; ou bien, pour parler plus généralement, il y a apparence que les os ſont vides & remplis d'air, à proportion que les oiſeaux portent le vol plus ou moins haut.

Galilée & Borelli ont prouvé que la ſubſtance des os, dans les oiſeaux, étoit concave comme dans les flûtes; mais ils ont ſuppoſé qu'elle étoit remplie d'une moelle huileuſe beaucoup plus légère que l'os. M. de Marſigli a obſervé que l'os du bras dans le pélican étoit vide & rempli d'air. Je me flatte d'avoir découvert que dans beaucoup d'oiſeaux, & dans les oiſeaux de proie, tous les os qui peuvent avoir communication avec la poitrine ou l'*abdomen*, ſont remplis d'air, & j'ai prouvé les ouvertures par leſquelles l'air entre régulièrement, & s'y renouvelle par la reſpiration.

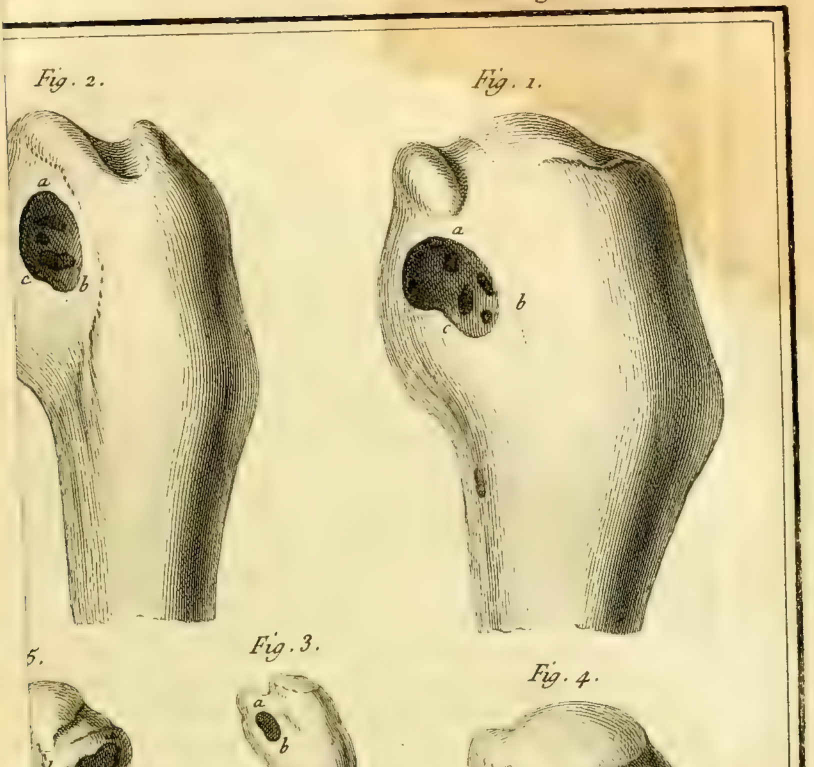
L'air qui entre, & qui remplit ainſi les cavités des os, doit néceſſairement devenir plus léger par la chaleur du corps; moyennant quoi l'animal devenu ſpécifiquement plus léger que l'air même, vole avec plus d'aiſance.

Cette découverte nous fait voir outre cela que la moelle n'eſt pas néceſſaire pour la nourriture, ni pour l'accroiſſement des os, ni pour oindre les articulations, ni pour la formation du cal: car j'ai trouvé très-ſouvent l'os du bras, dans les poules, caſſé & parfaitement guéri. J'ajoute, pour que la démonſtration ſoit plus entière, la figure d'un tel os, *fig. 10.*

L'oſſification reçoit par-là beaucoup d'éclairciſſemens, & paroît devoir être examinée par ce nouveau plan.

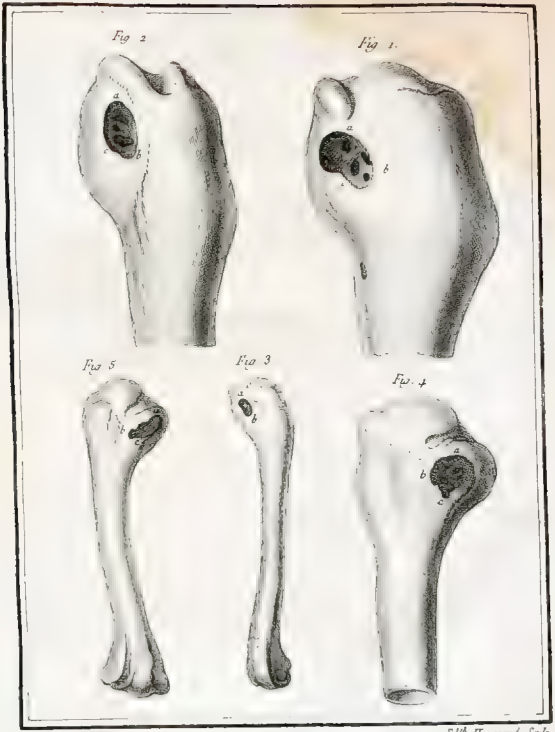
Il n'eſt pourtant pas ſans exemple, même dans notre corps, de voir la ſubſtance celluleuſe des os remplie d'air; les apophyſes maſtoïdiennes reçoivent l'air par les trompes d'Euſtache.

La tête de l'hibou fournit un autre exemple auſſi curieux, l'air entre dans le diploë du crâne entier par les trous auditifs; car les oiſeaux n'ont point de trompes d'Euſtache comme les quadrupèdes & les amphibies.

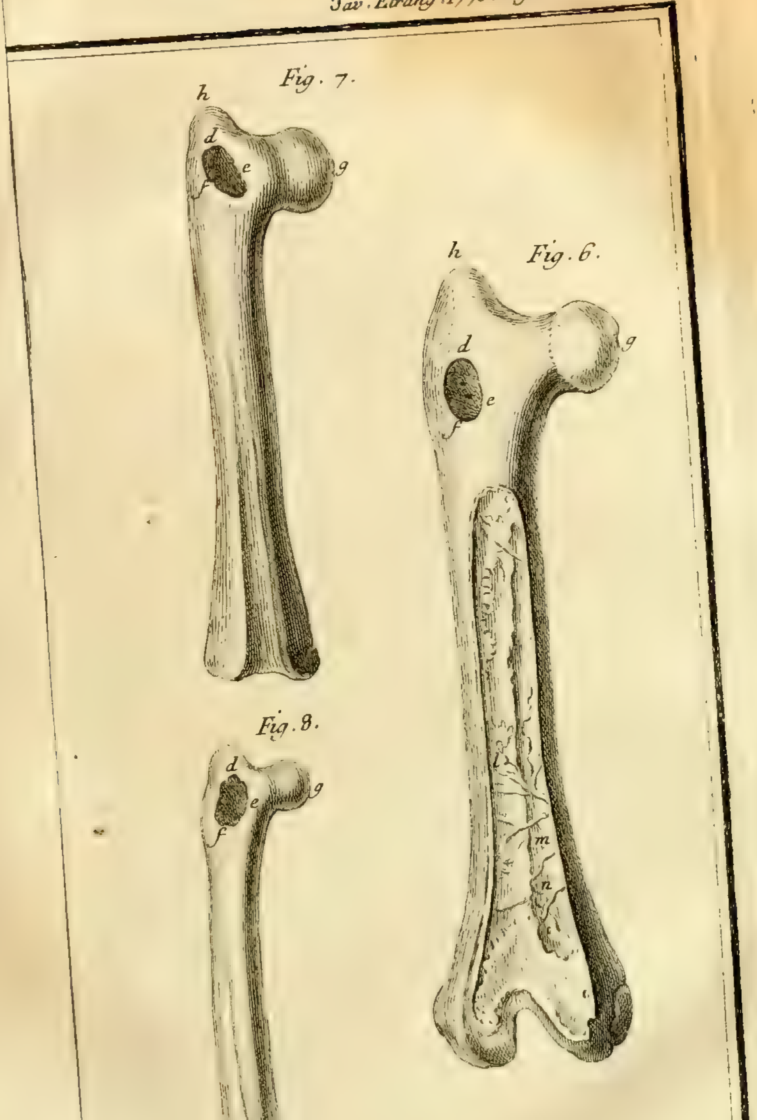


F. l^th Haussard Sculp.

Pl I. Sav Etrang 1773 Pag. 335 Pl XII



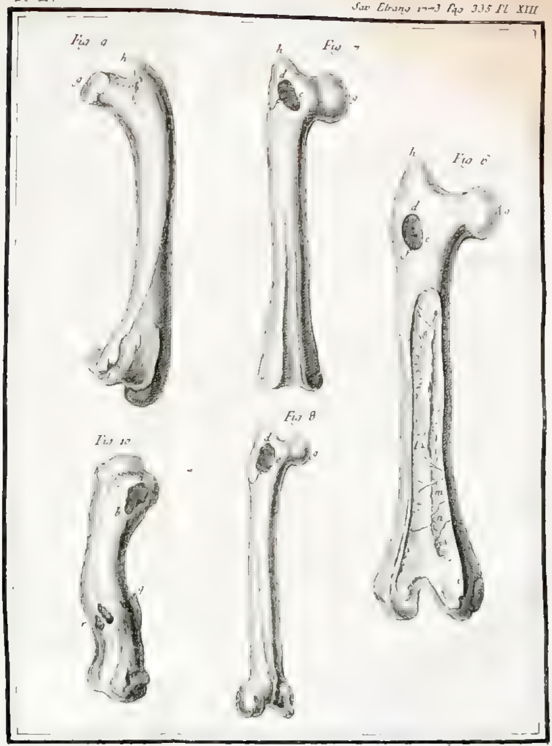
P Camper del Elth Haussard Sculp



Elth Haussard Sculp.

Pl. II.

Sav. Etrang. 1773 pag. 335 Pl. XIII



P. Camper del.

Elth Haussard Sculp.

La tête de l'éléphant fournit encore une preuve plus frappante: mais il eſt temps de finir ce Mémoire, après avoir donné une explication courte des figures, ſans leſquelles la deſcription auroit été moins inſtructive & moins claire.

EXPLICATION DES FIGURES.

La *première Figure* repréſente la partie ſupérieure de l'os du bras gauche de l'orfraie; *a*, *b*, *c*, le trou par où l'air entre.

La *ſeconde*, la partie ſupérieure de l'os du bras gauche de la cygogne; *a*, *b*, *c*, le trou aërien.

La *troiſième*, l'os du bras gauche du hibou; *a*, *b*, le trou aërien; *p*, le trou fait à la partie inférieure pour appliquer le tuyau.

La *quatrième*, l'os du bras droit d'un dindon; *a*, *b*, *c*, le trou aërien.

La *cinquième*, l'os du bras droit d'une poule; *a*, *b*, *c*, le trou aërien.

La *ſixième*, l'os de la cuiſſe gauche de l'orfraie; *d*, *e*, *f*, le trou aërien ſous le trochanter *h*; *g*, la tête de cet os; *i*, *k*, *l*, *m*, les piliers pour donner de la force à l'os, qui d'ailleurs ſeroit trop mince; *i*, *l*, *m*, *n*, la veine qui tapiſſe le périoſte interne.

La *ſeptième* repréſente l'os de la cuiſſe gauche de la cygogne; *d*, *e*, *f*, le trou aërien; *h*, le trochanter; *g*, la tête de l'os.

La *huitième*, l'os de la cuiſſe gauche du coq de bruyère; *d*, *e*, *f*, le trou aërien.

La *neuvième*, l'os de la cuiſſe droite de la poule, ſans trou aërien.

La *dixième*, l'os du bras droit d'une poularde; *a*, *b*, le trou aërien; *q*, *r*, la fracture parfaitement unie par le cal.

OBSERVATIONS D'UNE TÊTE EXOSTOSÉE.

Par M. RIBELT, Chirurgien à Perpignan.

JEAN Forcade, fils de M. Forcade, Chirurgien à Perpignan, naquit le 10 Décembre 1722. Dans son enfance sa figure étoit agréable : à six ans il eut une petite vérole bénigne : parvenu à l'âge de douze, son père lui ouvrit un dépôt lacrymal au grand canthus de l'œil droit qui suppura pendant assez long-temps ; ce fut alors qu'on s'aperçut d'une éminence qui se détachoit de la partie moyenne de l'apophyse nasale de l'os maxillaire du côté droit : cette éminence, qui étoit alors de la grosseur d'une petite amande, résista à différens topiques ; elle fit des progrès, & devint en peu de temps une tumeur considérable.

A l'âge de quinze ans, les deux os maxillaires de la face de Jean Forcade étoient égaux, & présentoient deux éminences si considérables, qu'elles tenoient, pour ainsi dire, les cartilages du nez enterrés dans le vide qu'on y observoit, & elles comprimoient ces cartilages au point qu'il ne pouvoit respirer que par la bouche.

Ce jeune homme suivit, comme les autres enfans de son âge, le cours des basses classes ; il étoit à charge à ses condisciples, qui ne pouvoient supporter la difformité de son visage, quoique son esprit & son caractère les portassent à l'aimer. Son père qui le chérissoit avec d'autant plus de tendresse qu'il le voyoit malheureux, mit tout en œuvre pour faire disparoître cette difformité, mais tous ses soins furent inutiles, le sieur Jean Forcade étoit condamné à devenir un sujet d'observation.

A l'âge de vingt ans sa figure étoit monstrueuse. Dans le mois de Septembre 1766, il fut attaqué d'une fièvre putride &

& maligne, d'une eſpèce ſi violente, qu'il reſta aveugle pendant ſa convaleſcence qui fut très-longue: à meſure qu'il reprit des forces, il commença à voir de l'œil gauche aſſez pour ſe conduire ſeul; mais il lui ſurvint un rhume, ſuivi d'une ſuppuration dans le poumon, & il mourut le 16 Juin 1767, dans la quarante-cinquième année de ſon âge.

J'ai diſſéqué ſa tête avec le plus grand ſoin. Malgré l'attention la plus exacte, il ne me fut pas poſſible de trouver aucun muſcle de la face; la peau paroiſſoit collée immédiatement ſur le périoſte; les muſcles qui ſervent à lever la mâchoire inférieure, à la porter en avant, & à la baiſſer, étoient moins charnus qu'ils ne le ſont dans l'état naturel; le crâne & la face étoient entièrement exoſtoſés avec des éminences conſidérables qui ſe détachoient de la face & de la mâchoire inférieure.

Les exoſtoſes étoient de la plus grande dureté; le crâne & la face peſoient cinq livres, la mâchoire inférieure ſeule, trois livres trois onces, & le tout enſemble huit livres un quart; tandis qu'une tête, avec la mâchoire inférieure, pèſe ordinairement moins de deux livres.

La taille du ſieur Jean Forcade étoit de quatre pieds onze pouces; ſon corps bien proportionné & dans l'état naturel. Il étoit d'un tempérament chaud & ſec, le viſage très-coloré, & malgré ſa conformation extraordinaire il ne s'étoit jamais plaint d'aucun mal dans aucune partie de la tête ou de la mâchoire.

Deſcription particulière des os du crâne & de la face.

L'os coronal, eſt inégal dans ſa région ſupérieure; il l'eſt auſſi dans ſa région moyenne; il l'eſt ſur-tout dans ſa région inférieure.

Aux boſſes coronales on remarque pluſieurs éminences aſſez ſaillantes, & quantité d'empreintes aſſez profondes.

Les arcades ſourcilières diffèrent de l'état naturel, en ce que celle du côté droit ſe trouve concave & inégale, & celle

du côté gauche fort bourſoufflée & aſſez unie, manquant toutes les deux de trou ſurcilier & d'échancrure.

Les apophyſes angulaires internes ſont très-peu marquées, & ſe trouvent ſéparées par une portion de la ſuture ſagittale qui ne va qu'à un travers de doigt en comptant du bas en haut, & le reſte du coronal ſe trouve exactement formé par une ſeule & même pièce.

Les apophyſes angulaires externes ſont auſſi ſaillantes du côté de l'orbite que du côté externe.

La portion du coronal qui forme la portion ſupérieure des orbites eſt inégale, & on y remarque quantité de trous vagues.

Les régions latérales ſont auſſi inégales & ſemblables aux inégalités que nous avons déjà obſervées à la région moyenne.

Les os pariétaux ſe trouvent aſſez unis dans leur partie ſupérieure; dans leur région ſupérieure on trouve des productions oſſeuſes fort ſaillantes & larges; dans leur région inférieure on remarque auſſi une très-grande quantité d'inégalités.

A l'angle antérieur & inférieur de chacun de ces os on trouve des excroiſſances fort larges; on trouve auſſi des inégalités aux angles poſtérieurs & inférieurs.

Les excroiſſances qu'on y remarque ſont encore beaucoup plus larges, inégales & ſaillantes que celles que nous avons obſervées aux angles antérieurs & inférieurs.

Le trou qu'on obſerve à chaque pariétal manque dans ce ſujet.

A l'os occipital, nous n'avons remarqué autre choſe, ſi ce n'eſt que les trous maſtoïdiens ſont très-conſidérables, de même que les trous condyloïdiens antérieurs, qui intérieurement ſe trouvent doubles & ſéparés par une lame oſſeuſe aſſez conſidérable.

Aux os des tempes, la portion écailleuſe du droit eſt convexe & aſſez unie vers ſa ſuture écailleuſe. Supérieurement on y trouve un os ſurnuméraire; ſon apophyſe maſtoïde eſt

fort considérable, elle présente des empreintes tendineuses très-profondes.

Celui du côté gauche est remarquable parce que la portion écailleuse se trouve convexe & unie dans sa partie supérieure. A sa partie antérieure on trouve une production osseuse assez saillante & assez inégale.

L'apophyse mastoïde gauche est semblable à celle du côté droit; l'apophyse zygomatique est assez épaisse, ronde & inégale.

Les parties latérales de l'os etmoïde sont fort épaisses, compactes, inégales & un peu convexes.

Les os propres du nez sont fort épais & très-compactes; à l'extrémité inférieure on remarque une production osseuse qui a pris la figure de l'apophyse coracoïde; elle la surpasse même en dureté.

Les os unguis sont d'une figure très-irrégulière; celui du côté droit est étroit & long, & celui du côté gauche est presque triangulaire: tous les deux sont fort épais & compactes.

Les os maxillaires sont contre nature & comme on n'en a jamais vu. Ils paroissent divisés en quatre portions par des échancrures très-profondes.

La portion antérieure qui est la plus considérable est très-boursouflée & très-inégale, elle couvre antérieurement tout l'orbite.

La portion qui fait partie de l'orbite est très-boursouflée, & occupe la plus grande partie de la fosse orbitaire.

L'apophyse malaire se trouve fort boursouflée, arrondie & séparée de la portion que nous avons nommée antérieure par une fente fort profonde, à la partie inférieure de laquelle on trouve le trou maxillaire supérieur.

Le canal qui donne passage au nerf maxillaire supérieur, pour se porter au sinus maxillaire & à la face, se trouve à ce sujet dans un plan vertical; son orifice interne se trouve à l'entrée de l'orbite; plus antérieurement on remarque deux autres trous qui communiquent dans le susdit canal.

La portion palatine de ces os ſe trouve plus bourſoufflée que le bord alvéolaire. Ils paroiſſent ne former qu'une ſeule & même pièce avec les os palatins & le vomer.

Ces os ſe trouvent ſéparés du côté du palais par une fente fort profonde & large qui va depuis le trou inciſif ou guſtatif juſqu'à la partie poſtérieure du palais.

Le bord poſtérieur du vomer ſe trouve très-bourſoufflé, & ne laiſſe de chaque côté qu'une petite fente fort étroite & fort courte qui communique dans l'intérieur du nez; antérieurement, les os maxillaires rempliſſent les foſſes nazales, & ne laiſſent qu'une petite fente ſi étroite qu'à peine on peut apercevoir le bord antérieur du vomer.

Il eſt à remarquer qu'à l'os maxillaire du côté gauche, la portion que nous avons appelée antérieure ſe trouve beaucoup plus bourſoufflée & raboteuſe que celle du côté droit.

Ces os ſont très-compactes dans toute leur ſubſtance.

Les os de la pomette ſont également très-compactes, & d'une épaiſſeur conſidérable; celui du côté droit ne diffère de l'état naturel qu'en ce qu'on y remarque quelques inégalités & une ſinuoſité tranſverſale & profonde vers la partie inférieure de ſa face externe. A la place du trou qui donne paſſage aux vaiſſeaux qui vont ſe diſtribuer à l'œil, on trouve à la face externe qui fait partie de la ſinuoſité zigomatique, un os ſurnuméraire, figuré comme une olive, qui eſt joint par ſuture avec l'os maxillaire, & l'os de la pomette faiſant partie de la face ſphénomaxillaire.

L'os de la pomette du côté gauche eſt d'un volume très-conſidérable & d'une figure ſingulière, ſa face externe eſt diviſée en deux portions par une ſinuoſité ou gouttière tranſverſale & très-profonde qui ſe porte depuis l'apophyſe zigomatique juſqu'à cette portion de l'os maxillaire qu'on peut appeler *malaire;* la portion ſupérieure de cette face externe eſt cinq à ſix fois plus conſidérable que la portion inférieure ſur laquelle on obſerve quantité de ſillons ou enfoncemens. L'apophyſe orbitaire ſupérieure ſe trouve fort arrondie & ſaillante en dehors, & l'apophyſe orbitaire

inférieure présente une face longue, assez unie & un peu concave. Ces deux apophyses se trouvent séparées par une gouttière qui se porte depuis l'entrée de l'orbite jusqu'à la fente sphénomaxillaire; on trouve également un os surnuméraire à sa face externe, qui fait partie de la sinuosité zygomatique.

La mâchoire inférieure n'a aucune ressemblance à celle de l'homme dans l'état naturel, on aura de la peine à la décrire, parce qu'on n'a jamais rien vu d'égal. Je la diviserai pourtant en corps & en branches. A la partie antérieure de son corps on peut observer la face quarrée qui ne présente aucune division; à la partie inférieure de cette face quarrée, on remarque une échancrure aussi large que profonde, dans laquelle on voit plusieurs excroissances; entr'autres, une qui est plus considérable qu'une grosse amande; toutes ces éminences se trouvent séparées par des gouttières assez profondes. Latéralement, du côté externe, son corps se trouve plus boursouflé, & forme de chaque côté deux bosses semblables à des œufs de poule; celles du côté droit sont plus considérables que celles du côté gauche.

Les branches ou extrémités se trouvent séparées du reste du corps par une gouttière très-profonde qui forme une espèce d'y-grec renversé; dans le milieu des deux branches qui forme l'y-grec, on voit une excroissance qui se trouve beaucoup plus considérable du côté droit que du côté gauche; celle du côté droit est de la grosseur d'une noix, elle porte elle-même une autre excroissance de la grosseur d'une noisette. Celle du côté gauche ressemble par sa figure à un gland de chêne; à la face interne de son corps, on observe que les apophyses *milo* ressemblent par leur figure à deux marrons d'Inde, & laissent entre elles un espace qui est plus profond que large; celle du côté droit vient presque au niveau de l'extrémité supérieure du corps des dents molaires postérieures.

La gouttière qui fait la séparation du corps d'avec les branches servoit à loger la troisième branche de l'artère carotide

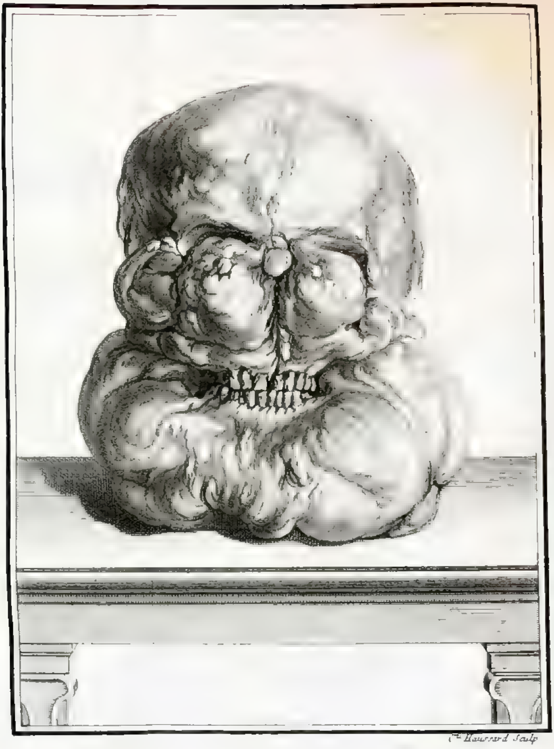
externe appelée *maxillaire*, qui va gagner la commiſſure des lèvres pour ſe porter à la partie latérale du nez, au grand angle de l'œil, & au front.

On remarque à la face externe beaucoup de trous vagues aſſez conſidérables.

Les branches ſont d'une figure extraordinaire & fort bourſouflées; elles ne forment aucun angle à l'extrémité de la baſe; la branche du côté droit eſt plus bourſouflée que celle du côté gauche; elles offrent toutes les deux beaucoup de petites gouttières & une ſinuoſité ou couliſſe au-deſſus des condyles. Les apophyſes coronoïdes n'ont aucune reſſemblance à l'état naturel, mais nous pouvons les appeler avec raiſon des tubéroſités, puiſqu'elles ſe trouvent larges & raboteuſes. Les condyles pourroient être également appelés tubéroſités, ſi on n'y remarquoit les facettes articulaires, qui ſont recouvertes par une couche de ſubſtance cartilagineuſe deſſéchée. L'échancrure qui ſépare le condyle d'avec la tubéroſité ou apophyſe coronoïde ſe trouve fort inégale & raboteuſe, & on y remarque quantité de trous vagues.

A la face interne des branches il n'y a rien de remarquable, ſi ce n'eſt que les attaches des muſcles ptérigoïdiens internes ſont très-conſidérables.

Cte Haussard Sculp.



F. Haussard Sculp.

ESSAI

Sur une application des règles de Maximis & Minimis *à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture.*

Par M. COULOMB, Ingénieur du Roi.

INTRODUCTION.

CE Mémoire est destiné à déterminer, autant que le mélange du Calcul & de la Physique peuvent le permettre, l'influence du frottement & de la cohésion, dans quelques problèmes de Statique. Voici une légère analyse des différens objets qu'il contient.

Après quelques observations préliminaires sur la cohésion, & quelques expériences sur le même objet, l'on détermine la force d'un pilier de maçonnerie; le poids qu'il peut porter, pressé suivant sa longueur; l'angle sous lequel il doit se rompre. Comme ce problème n'exige que des considérations assez simples, qui servent à faire entendre toutes les autres parties de cet Essai, tâchons de développer les principes de sa solution.

Si l'on suppose un pilier de maçonnerie coupé par un plan incliné à l'horizon, en sorte que les deux parties de ce pilier soient unies dans cette section, par une cohésion donnée, tandis que tout le reste de la masse est parfaitement solide, ou lié par une adhérence infinie; qu'ensuite on charge ce pilier d'un poids: ce poids tendra à faire couler la partie supérieure du pilier sur le plan incliné, par lequel il touche la partie inférieure. Ainsi, dans le cas d'équilibre, la portion de la pesanteur, qui agit parallèlement à la section, sera exactement égale à la cohérence. Si l'on remarque actuellement, dans le cas de l'homogénéité, que l'adhérence du pilier est réellement égale

pour toutes les parties; il faut, pour que le pilier puiſſe ſupporter un fardeau, qu'il n'y ait aucune ſection de ce pilier, ſur laquelle l'effort décompoſé de ſa preſſion puiſſe faire couler la partie ſupérieure. Ainſi, pour déterminer le plus grand poids que puiſſe ſupporter un pilier, il faut chercher parmi toutes ſes ſections celle dont la cohéſion eſt en équilibre avec un poids qui ſoit un *minimum:* car, pour lors, toute preſſion, au-deſſus de celle déterminée par cette condition, ſeroit inſuffiſante pour rompre le pilier.

Outre la réſiſtance qui provient de la cohéſion, j'ai eu égard à celle dûe au frottement. Les mêmes principes ſuffiſent pour remplir les deux conditions: l'application de cette recherche peut s'étendre à tous nos édifices, dont la maſſe eſt toujours ſoutenue par des colonnes, ou par quelque moyen équivalent.

L'on détermine enſuite la preſſion des terres, contre les plans verticaux qui les ſoutiennent; la méthode eſt abſolument la même. Si l'on ſuppoſe en effet un triangle-rectangle ſolide, dont un des côtés, ſoit vertical, & dont l'hypothénuſe touche un plan incliné, ſur lequel le triangle tend à gliſſer; ſi ce triangle, ſollicité par ſa peſanteur, eſt ſoutenu par une force horizontale, par ſa cohéſion, & par ſon frottement, qui agiſſent le long de cette hypothénuſe, l'on déterminera facilement, dans le cas d'équilibre, cette force horizontale par les principes de Statique. Si l'on remarque enſuite que les terres étant ſuppoſées homogènes, peuvent ſe ſéparer dans le cas de rupture, non-ſeulement ſuivant une ligne droite, mais ſuivant une ligne courbe quelconque; il s'enſuit que pour avoir la preſſion d'une ſurface de terre contre un plan vertical, il faut trouver parmi toutes les ſurfaces décrites dans un plan indéfini vertical, celle qui, ſollicitée par ſa peſanteur, & retenue par ſon frottement & ſa cohéſion, exigeroit, pour ſon équilibre, d'être ſoutenue par une force horizontale, qui fut un *maximum;* car, pour lors il eſt évident que toute autre figure demandant une moindre force horizontale, dans le cas d'équilibre, la maſſe adhérente ne pourroit

ſe

ſe diviſer. Comme l'expérience donne à peu-près une ligne droite pour la ligne de rupture des terres, lorſqu'elles ébranlent leurs revêtemens, il ſuffit, dans la pratique, de chercher dans une ſurface indéfinie, parmi tous les triangles qui preſſent un plan vertical, celui qui demande, pour être ſoutenu, la plus grande force horizontale. Dès que cette force eſt déterminée l'on en déduit avec facilité les dimenſions des revêtemens.

L'on trouvera à la fin de ce même article les moyens de déterminer exactement parmi toutes les ſurfaces courbes que l'on peut tracer dans un fluide indéfini, celle dont la preſſion contre un plan vertical, eſt un *maximum,* en ayant égard au frottement & à la cohéſion. Cette recherche peut ſervir à trouver la preſſion des fluides cohérens, contre les parois des vaſes qui les ſoutiennent.

Enfin on termine ce Mémoire par chercher les dimenſions des voûtes, leurs points de rupture, les limites qui circonſcrivent leur état de repos, lorſque la cohéſion & le frottement contribuent à leur ſolidité. M. Gregori a démontré, je crois le premier, dans les *Tranſactions Philoſophiques,* que dans le ſyſtème de la peſanteur, la chaînette étoit la même courbe que la voûte qui ſeroit formée par une infinité d'élémens d'une épaiſſeur conſtante & infiniment petite. J'ai étendu cette propoſition, & j'ai prouvé que, quel que fût le nombre & la direction des forces qui agiroient ſur une voûte formée d'après les ſuppoſitions précédentes, la figure de cette voûte ſeroit la même que celle d'une chaînette ſollicitée par les mêmes puiſſances. Les mêmes principes ſuffiſent enſuite pour déterminer les joints lorſqu'ils ſont des quantités finies, ou qu'ils doivent former avec la courbe intérieure de la voûte un autre angle que le droit. Cette dernière hypothèſe a lieu dans les plates-bandes; l'on y trouve que ſi l'épaiſſeur eſt donnée, les joints, dans le cas d'équilibre, doivent être dirigés vers un même centre.

Les formules trouvées, en faiſant abſtraction des frottemens & de la cohéſion des joints, ne peuvent être d'aucune utilité

dans la pratique; tous les Géomètres qui se sont occupés de cet objet s'en sont aperçus; ainsi, pour avoir des résultats que l'on peut employer, ils ont été obligés de fonder leurs calculs sur des suppositions qui les rapprochassent de la Nature. Ces suppositions consistent ordinairement à considérer les voûtes comme divisées en plusieurs parties, & à chercher ensuite les conditions d'équilibre de ces différentes parties: mais comme cette division se fait à peu-près d'une manière arbitraire; dans le dessein de l'apprécier, j'ai cherché par les règles *de maximis & minimis*, quels seroient les véritables points de rupture dans les voûtes trop foibles, & les limites des forces que l'on pourroit appliquer à celle dont les dimensions seroient données: j'ai tâché autant qu'il m'a été possible de rendre les principes dont je me suis servi assez clairs pour qu'un Artiste un peu instruit pût les entendre & s'en servir.

Ce Mémoire, composé depuis quelques années, n'étoit d'abord destiné qu'à mon usage particulier, dans les différens travaux dont je suis chargé par mon état; si j'ose le présenter à cette Académie, c'est qu'elle accueille toujours avec bonté le plus foible essai, lorsqu'il a l'utilité pour objet. D'ailleurs, les Sciences sont des monumens consacrés au bien public; chaque citoyen leur doit un tribut proportionné à ses talens. Tandis que les grands hommes, portés au sommet de l'édifice, tracent & élèvent les étages supérieurs, les artistes ordinaires répandus dans les étages inférieurs, ou cachés dans l'obscurité des fondemens, doivent seulement chercher à perfectionner ce que des mains plus habiles ont créé.

PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES.

I.

Fig. 4. Soit le plan *abcde*, sollicité par des forces quelconques situées dans la direction de ce plan, en équilibre sur la ligne *AB*; la résultante de toutes ces forces sera perpendiculaire à la ligne *AB*, & tombera entre les points *a* & *e*.

II.

Si toutes les forces, qui agiſſent dans ce plan ſont décompoſées ſuivant deux directions, l'une parallèle à AB, l'autre qui lui ſoit perpendiculaire, la ſomme des forces décompoſées, parallèlement à AB, ſera nulle, & la ſomme des forces, perpendiculaires à AB, égalera la preſſion qu'éprouve la ligne AB.

III.

Si la preſſion qu'éprouve la ligne AB eſt exprimée par P, le même plan pourra être ſuppoſé ſollicité par toutes les forces qui lui ſont appliquées, & de plus par la réaction de la preſſion. Mais ſi toutes ces forces, ainſi que la réaction de la preſſion, ſont décompoſées ſuivant deux directions quelconques perpendiculaires l'une à l'autre; il ſuit de l'équilibre & de la perpendicularité des deux directions, que la réſultante ſuivant chaque direction, ſera nulle.

IV.

Du Frottement.

Le frottement & la cohéſion ne ſont point des forces actives comme la gravité, qui exerce toujours ſon effet en entier, mais ſeulement des forces coërcitives; l'on eſtime ces deux forces par les limites de leur réſiſtance. Lorſqu'on dit, par exemple, que dans certains bois polis, le frottement ſur un plan horizontal d'un corps peſant neuf livres, eſt trois livres; c'eſt dire que toute force au-deſſous de trois livres ne troublera point ſon état de repos.

Je ſuppoſerai ici que la réſiſtance dûe au frottement eſt proportionnelle à la preſſion, comme l'a trouvé M. Amontons; quoique dans les groſſes maſſes le frottement ne ſuive pas exactement cette loi. D'après cette ſuppoſition, l'on trouve dans les briques le frottement, les trois quarts de la preſſion. Il ſera bon de faire des épreuves ſur les matériaux que l'on voudra employer. Il eſt impoſſible de fixer ici le frottement

des pierres, les essais faits pour une carrière ne pouvant point servir pour une autre.

V.

De la cohésion.

La cohésion se mesure par la résistance que les corps solides opposent à la désunion directe de leurs parties. Comme chaque élément des solides, lorsqu'ils sont homogènes, est doué de cette même résistance; la cohésion totale est proportionnelle au nombre des parties à désunir, & par conséquent à la surface de rupture des corps. J'ai cherché à déterminer par quelques expériences, la force de cette cohésion; elles m'ont donné les résultats suivans.

I.^{ere} Expérience. Fig. 1. J'ai pris un carreau *a b c d*, d'une pierre blanche, d'un grain fin & homogène *; ce carreau étoit d'un pied quarré, avoit un pouce d'épaisseur; je l'ai fait échancrer en *e* & en *f*, en sorte que *ef* formoit une gorge de deux pouces, par laquelle les deux parties du carreau restoient unies. J'ai suspendu ce carreau par cette gorge, en y introduisant deux cordes nouées en fronde; & par deux autres cordes j'ai suspendu un plateau de balance que j'ai chargé d'un poids *P*. Il a fallu augmenter ce poids jusqu'à 430 livres, pour rompre le carreau en *ef*, ce qui donne, pour la force de la cohésion, 215 livres par pouces.

II.^{eme} Expérience. J'ai voulu voir si en rompant un solide de pierre, par une force dirigée suivant le plan de rupture, il falloit employer le même poids que pour le rompre, comme dans l'expérience précédente, par un effort perpendiculaire à ce plan. (Fig. 2.) Pour cela j'ai introduit le petit solide *ABCD* dans une mortoise *AGeg*, j'ai suspendu un bassin à la corde *cP*, qui enveloppoit le solide & qui joignoit la mortoise; le petit solide avoit deux pouces de largeur, un pouce de hauteur, ce qui donne la même surface de rupture que dans l'expérience

* Cette pierre se trouve autour de Bordeaux, & sert à construire les façades des grands édifices de cette ville.

précédente; il n'a rompu que lorſque le baſſin a été chargé de 440 livres. J'ai répété pluſieurs fois cette expérience, de même que la première, & j'ai preſque toujours trouvé qu'il falloit une plus grande force pour rompre le ſolide, lorſque cette force étoit dirigée ſuivant le plan de rupture, que lorſqu'elle étoit perpendiculaire à ce plan. Cependant, comme cette différence n'eſt ici que $\frac{1}{44}$ du poids total, & qu'elle s'eſt trouvée ſouvent plus petite, je l'ai négligée dans la théorie qui ſuit.

J'ai voulu voir comment ſe fait la rupture d'un corps, lorſqu'il eſt rompu par une force qui agit ſur lui avec un bras de levier; en conſéquence, j'ai encaſtré dans une mortoiſe *ACeg* un ſolide de la même pierre que dans l'expérience précédente, ayant 1 pouce de hauteur, 2 pouces de largeur, & 9 pouces de longueur de *g* en *D*, où j'ai ſuſpendu un poids *P;* ce poids s'eſt trouvé de 20 livres lorſque le ſolide a caſſé en *eg*. III.^e Expérience. Fig. 3.

VI.

J'ai répété les mêmes épreuves ſur des briques de Provence d'une excellente cuite & d'un grain très-uni, j'ai trouvé que leur cohéſion, en les rompant par une force perpendiculaire au plan de rupture, conformément à la première expérience, étoit de 280 à 300 livres par pouces. J'ai trouvé encore qu'un mortier composé de quatre parties de ſable & trois de chaux, employé depuis deux ans, ſupportoit, perpendiculairement au plan de rupture, 50 livres par pouces. Cette dernière épreuve, faite à la Martinique ne peut point être généraliſée; la force du mortier varie quelquefois du double, & même du triple, ſuivant la nature du pays humide ou ſec, ſuivant les qualités du ſable, de la chaux, de la pierre employée dans le corps de la maçonnerie, ſuivant l'ancienneté de cette maçonnerie; l'on ne peut rien fixer, il faut dans chaque lieu des obſervations particulières.

VII.

Remarques ſur la rupture des Corps.

Fig. 6. Si l'on ſuppoſe un ſolide *onKL* dont les angles ſoient droits, alongé comme une poutre ordinaire, & fixé en *on*, de manière que les côtés de ce ſolide ſoient horizontaux & verticaux; ſi l'on ſuppoſe enſuite que ce ſolide eſt coupé par un plan vertical repréſenté par *AD*, perpendiculaire au côté *onKL*, & ſollicité par un poids φ, attaché à ſon extrémité en *L*; il eſt évident, en ne conſidérant qu'une face verticale de ce ſolide, les autres étant égales & parallèles, que tous les points de la ligne *AD* réſiſtent pour empêcher le poids φ de rompre le ſolide; que par conſéquent une partie ſupérieure *AC* de cette ligne fait effort par une traction dirigée ſuivant *QP*, tandis que la partie inférieure fait effort, par une preſſion dirigée ſuivant *Q'P'*. Si l'on décompoſe toutes les forces, ſoit de traction, ſoit de preſſion, ſuivant deux directions, l'une verticale & l'autre horizontale, exprimée par *QM* & *PM*; & ſi par tous les points *M* l'on fait paſſer une ligne *BMCc*, cette courbe ſera le lieu géométrique de tous les efforts perpendiculaires qu'éprouve la ligne *AD*. Ainſi, la tranche *ADKL* doit être ſuppoſée ſollicitée par toutes les forces horizontales *PM*, par toutes les forces verticales *MQ*, & par la peſanteur du poids φ; par conſéquent, puiſqu'il y a équilibre, il faut, *art. 3*, que la ſomme des puiſſances horizontales ſoit nulle; que, par conſéquent, l'aire des tenſions *ABC* égale l'aire des preſſions *Ccd*. Il faut de plus, par le même article, que la ſomme des forces verticales *QM* ſoit égale au poids φ; mais par les principes de Statique l'on a encore la ſomme des *momentum* autour du point *G* de toutes les forces, ſoit de traction, ſoit de preſſion, égale au *momentum* du poids φ autour du même point; ce qui donne l'équation $\int Pp \,.\, MP \,.\, CP = \varphi LD$. Nous avons donc, quel que ſoit le rapport entre la dilatation des élémens d'un ſolide & leur cohéſion, les trois conditions précédentes à remplir.

Je suppose, par exemple, que l'on veuille chercher le poids que peut supporter une pièce de bois parfaitement élastique; c'est-à-dire qui se comprime ou se dilate chargée dans la direction de sa longueur, proportionnellement à la force qui la comprime ou qui la dilate; que l'élément $ofnh$, qui touche le mur, représente une portion très-petite de la pièce de bois dans son état naturel; si l'on charge cette pièce de bois d'un poids φ, la partie supérieure de la ligne fh se portera en g, & la partie inférieure se portera en m; la ligne fh deviendra gm: mais comme, par hypothèse, les tensions, de même que les pressions, sont représentées par les parties $\pi\mu$ du triangle fge, il suit que le triangle de compression emh doit égaler le triangle de dilatation fge. Ainsi, si l'on nomme δ la tension du point f, représentée par fg, fe égalera $\frac{1}{2}fh$; l'on aura, pour le *momentum* du petit triangle de traction, $\frac{\delta ef^2}{3}$, qui, ajouté au *momentum* du petit triangle de compression, doit donner $\frac{\delta(fh)^2}{6} = \varphi n.L$, ou δfh, dans l'instant de rupture, exprime la résistance que l'adhérence opposeroit à un effort qui agiroit perpendiculairement à la ligne fh, en supposant cependant que les tractions MQ n'influent que très-peu sur la résistance des solides; ce qui est assez vrai, lorsque le bras de levier nL du poids φ est beaucoup plus grand que l'épaisseur fh.

Mais si l'on supposoit le solide, prêt à se rompre, composé de fibres roides, ou qui ne soient susceptibles ni de compression, ni d'alongement; si l'on supposoit encore que le corps se rompit en tournant autour du point h; pour lors, chaque point de l'épaisseur fh feroit un effort égal; le point h éprouveroit une pression égale à δfh, & le *momentum* du petit triangle de cohésion seroit $\frac{\delta(fh)^2}{2}$. Appliquons cette dernière hypothèse à nos expériences.

J'ai trouvé par la première expérience, qu'une surface de

Fig. 2. deux pouces de largeur ſur un pouce de hauteur, oppoſoit une réſiſtance égale à 430 livres. Dans la troiſième expérience j'ai les mêmes dimenſions, & de plus hL égale 9 pouces; par conſéquent, ſi la dernière hypothèſe étoit vraie, j'aurois dû trouver $P = \frac{430}{2.9}$, à peu-près 24 livres; mais l'expérience donne pour P, 20 livres; ainſi l'on ne peut pas ſuppoſer dans la rupture des pierres, ou que la roideur des fibres ſoit parfaite, ou que le point d'appui de rotation ſoit préciſément en h. Une remarque aſſez ſimple auroit fait prévoir ce réſultat, c'eſt qu'en prenant h pour point de rotation, il faudroit que ce point h ſupportât une preſſion finie, ſans que ſa cohéſion fut détruite, ce qui n'eſt pas poſſible, puiſque cette cohéſion eſt une quantité finie, pour une ſurface finie. Il faut donc, dans le cas qui précède celui de rupture, que cette force, porte en un point h', tel que l'adhérence de $h'q$, ſoit en état de ſupporter par ſa réſiſtance la preſſion $\delta f h'$, qu'éprouve la ligne hh', décompoſée ſuivant $h'q$. Nous donnerons dans la ſuite les moyens de déterminer l'angle q du triangle $h'hq$.

M. l'Abbé Boſſut, dans un excellent Mémoire ſur la figure des digues, ouvrage où l'on trouve réunie, à l'eſprit d'invention, la ſagacité du Phyſicien, & l'exactitude du Géomètre, paroît avoir diſtingué & fixé le premier la différence qui ſe trouve entre la rupture des bois & celle des pierres.

VIII.

Réſiſtance des Piliers de Maçonnerie.

Soit un pilier homogène de maçonnerie, que je ſuppoſe Fig. 5. d'abord quarré, chargé d'un poids P; l'on demande la direction de la ligne CM, ſuivant laquelle ce pilier ſe rompra, & la peſanteur du poids néceſſaire pour cette rupture.

Je ſuppoſe ici que l'adhérence oppoſe une égale réſiſtance, ſoit que la force ſoit dirigée parallèlement ou perpendiculairement au plan de rupture, conformément à la première & deuxième expérience. Je ſuppoſe encore le pilier d'une matière

matière homogène, dont la cohésion soit δ; soit prise une section quelconque CM, inclinée à l'horizon, & perpendiculaire au plan vertical $ABDM$, face de ce pilier. Si l'on suppose pour un instant l'adhérence de la partie supérieure $ABCM$ infinie, de même que celle de la partie inférieure CDM, il est clair que la masse de cette colonne tendroit à glisser le long de CM; & par conséquent, si les deux parties étoient unies par une force d'adhérence égale à la cohésion naturelle du pilier, pour rompre cette colonne, suivant CM, il faudroit que la pesanteur du poids P, décomposée suivant cette direction, fût égale, ou plus grande que l'adhérence de CM. Soit l'angle en $M \ldots x$, $DM \ldots a$, P le poids dont la pression représentée par φq, se décompose suivant les directions φr & rq, perpendiculaires & parallèles à la ligne de rupture. Si l'on néglige, pour simplifier, la pesanteur de la colonne, l'on aura $\delta CM = \frac{\delta a}{\text{cos.}\, x}$, & $rq = P \,\text{sin.}\, x$; par conséquent, dans le cas d'équilibre, l'on trouve $P = \frac{\delta a a}{\text{sin.}\, x . \text{cos.}\, x}$; mais comme la colonne doit être en état de porter le poids P sans se rompre, quelle que soit la section CM, il faut que le poids P soit toujours plus petit que la quantité $\frac{\delta a a}{\text{sin.}\, x \,\text{cos.}\, x}$, quelle que soit la valeur de x; ce qui aura lieu lorsque l'on déterminera P, tel qu'il soit un *minimum*, d'après l'équation $P = \frac{\delta a^2}{\text{sin.}\, x . \text{cos.}\, x}$; ce qui donne $dP = \frac{\delta a a \,[- dx\, (\text{cos.}\, x)^2 + dx\, (\text{sin.}\, x)^2]}{(\text{sin.}\, x \,.\, \text{cos.}\, x)^2}$, & par conséquent $\text{sin.}\, x = \text{cos.}\, x$. Ainsi le plus grand poids que la colonne puisse supporter sans se rompre, égale $2 \delta a a$, le double de la résistance qu'elle opposeroit à une force de traction, & l'angle de moindre résistance, ou de rupture, sera 45 degrés.

Nous avons supposé dans cette recherche, que la section représentée par CM étoit perpendiculaire au côté vertical

ABDM; mais l'on auroit trouvé les mêmes résultats pour une section quelconque, pourvu qu'elle eût eu la même inclinaison sur le plan horizontal; en remarquant que par la théorie des projections, les sections obliques d'un pilier sont à leur projection horizontale comme le rayon est au cosinus d'inclinaison de ces deux plans; ainsi, en nommant x le sinus d'inclinaison de ces deux plans, & A la surface de la base, égale ici à a^2, l'on aura, pour l'adhérence de la section oblique $\frac{\delta a a}{\text{cos}. x}$, & P sin. x, pour la force qui tend à faire couler la partie supérieure de la colonne sur le plan incliné qui lui sert de base, de quelque manière que soit situé le plan de section. Comme ces quantités sont précisément les mêmes que les précédentes, elles doivent, par conséquent, donner les mêmes résultats; d'où l'on peut conclure que, quelle que soit la figure de la base horizontale d'un pilier, si la surface de cette base est constante, sa force sera la même.

I X.

Nous n'avons point fait entrer, dans la solution précédentes, le frottement qui s'oppose à la rupture du pilier. Si l'on vouloit y avoir égard, en conservant les dénominations précédentes, l'on trouveroit, pour la pression du poids sur *CM*, P cos. x; & comme le frottement est proportionnel à la pression, il sera égal à $\frac{P \text{cos}. x}{n}$, n étant une quantité constante; la masse du pilier *ABCM*, pressé par le poids P, est donc retenue par la cohésion & par le frottement; ainsi, en augmentant le poids jusqu'à ce qu'il soit prêt à rompre le pilier, l'on aura $\frac{a a \delta}{\text{cos}. x} + \frac{P \text{cos}. x}{n} = P \text{ sin}. x$, & $P = \delta a a$: $[\text{cos}. x \, (\text{sin}. x - \frac{\text{cos}. x}{n})]$. Il faut, par les principes qui précèdent, pour avoir le poids que le pilier peut porter sans se rompre, faire P un *minimum*, ce qui donne

$$dx\left[\text{sin.}\,x\left(\text{sin.}\,x - \frac{\text{cos.}\,x}{n}\right)\right] - dx\,\text{cos.}\,x\left(\text{cos.}\,x + \frac{\text{sin.}\,x}{n}\right) = 0,$$

& par conséquent $(\text{cos.}\,x)^2 + \frac{2\,\text{sin.}\,x\,\text{cos.}\,x}{n} = (\text{sin.}\,x)^2$;

d'où l'on tire $\text{cos.}\,x = \text{sin.}\,x\left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{nn}\right)} - \frac{1}{n}\right]$;

d'où $\text{tang.}\,x = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{nn}\right)} - \frac{1}{n}}$.

Si le pilier étoit de brique, l'on auroit *(art. 4)* $\frac{1}{n} = \frac{3}{4}$. $\text{tang.}\,x = 2$, $\text{sin.}\,x = 2\,\text{cos.}\,x$; par conséquent, $\text{cos.}\,x = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$, & $P = \frac{\delta aa}{\text{cos.}\,x\,(2\,\text{cos.}\,x - \frac{3}{4}\,\text{cos.}\,x)} = 4\,\delta aa$, l'angle en M sera de $63^d\ 26'$; ainsi, la force qu'il faudroit pour rompre une colonne de brique par une force pressante, seroit quadruple de celle qu'il faudroit pour rompre cette même colonne par une force de traction.

M. Musschenbroëk *(Essai de Physique, traduction françoise, vol. I, page 354)* a trouvé qu'un pilier quarré de brique, de 11 pouces & demi de longueur sur 5 lignes de côté, a été rompu par un fardeau de 195 livres. Dans l'expérience de M. Musschenbroëk, les côtés étant $\frac{5}{12}$ de pouce, la coupe horizontale étoit $\frac{25}{144}$ d'un pouce quarré. Or, par l'*art. 6*, nous avons trouvé qu'un pouce quarré de brique supporte, perpendiculairement au plan de rupture, 300 livres; ainsi, dans cette expérience $\delta aa = 300^l : \frac{25}{144} = 52^l$, qui exprime la force de traction; mais comme $P = 4\,\delta a^2$, il suit de notre théorie & de nos épreuves, que ce Physicien auroit dû trouver 208 livres, quantité peu différente de 195 livres, résultat de son expérience.

Au reste, je suis obligé d'avertir que la manière dont M. Musschenbroëk détermine la force d'un pilier de maçonnerie, n'a aucun rapport avec celle que je viens d'employer. Un pilier, pressé par une force dirigée suivant sa longueur, ne se rompt, dit ce Physicien célèbre, que parce qu'il commence à se courber; autrement il supporteroit toute

ſorte de poids. En partant de ce principe, il détermine la force des piliers quarrés, en raiſon inverſe du quarré de leur longueur, & triplée de leurs côtés; en ſorte que ſi le pilier dont nous venons de calculer la force n'avoit eu que la moitié de ſa première longueur, il auroit ſupporté un poids quadruple du premier, c'eſt-à-dire, 832 livres; au lieu que je crois avoir démontré qu'il n'auroit guère ſupporté que le même poids de 208 livres.

L'on conclud de la formule, que les forces des piliers homogènes ſont entr'elles comme les ſections horizontales.

L'on détermineroit, par les mêmes principes, l'angle de rupture d'une colonne incompreſſible, qui ſeroit preſſée par une force inclinée à ſa baſe horizontale; pourvu que la direction de cette force tombât dans cette baſe; car ſi elle tomboit en dehors de cette baſe, il y auroit quelques autres conſidérations qui rendroient la ſolution de ce Problème un peu plus difficile.

L'on trouve auſſi, par les principes précédens, la hauteur où l'on peut élever une tour ſans qu'elle s'écraſe ſous ſon propre poids. Suppoſons, pour ſimplifier, que cette hauteur eſt beaucoup plus grande que la largeur; pour pouvoir négliger le petit priſme *CDM*, il faudra ſubſtituer dans les formules, à la place de la quantité *P*, la maſſe d'une tour qui auroit le même poids: ſuppoſons-là, par exemple, conſtruite en briques; le pied cube de brique peſant à peu-près 144 livres, un petit priſme, qui auroit un pouce de baſe, ſur un pied de hauteur, pèſeroit une livre; ainſi, comme une baſe d'un pouce peut ſupporter une force de traction égale à 300 livres, & une force de preſſion double, lorſque l'on néglige le frottement, il eſt clair qu'en ſubſtituant à la tour une maſſe de petits priſmes, d'un pouce de baſe, ſur 600 pieds de hauteur, il ſeroit auſſi ſoutenu par la cohérence. Si l'on avoit égard au frottement, l'on pourroit, par les mêmes principes, élever cette tour juſqu'à 1200 pieds de hauteur: ſi à la place de la tour on ſubſtituoit une pyramide, elle pourroit s'élever à une hauteur triple.

Si cette tour étoit portée ſur pluſieurs piliers, la hauteur à laquelle on pourroit l'élever, ſeroit en raiſon directe de la ſection horizontale de ces piliers ; en ſorte que ſi la ſection de ces piliers étoit, par exemple, le ſixième de la ſection horizontale de la tour, elle ne pourroit s'élever au-deſſus des colonnes qu'à 100 pieds de hauteur, en négligeant le frottement, & à 200 pieds en y ayant égard. L'on néglige ici le poids des piliers, il ſeroit facile d'y avoir égard.

Lorſque pluſieurs voûtes prennent leur naiſſance ſur le même pilier, s'arc-boutent & ſe ſoutiennent mutuellement, quant à la preſſion horizontale ; la réſultante de leurs forces étant verticale, & dirigée ſuivant l'axe du pilier, l'on déterminera facilement par cette méthode, la groſſeur d'un pilier. Toutes ces recherches ſont ſimples, d'un uſage journalier; il ſeroit facile de les étendre, mais je n'ai voulu ici qu'en établir les principes.

IX.

De la preſſion des terres, & des revêtemens.

Si l'on ſuppoſe qu'un triangle CBa rectangle, ſolide & peſant, eſt ſoutenu ſur la ligne Ba par une force A appliquée en F, perpendiculairement à la verticale CB; qu'en même-temps il eſt ſollicité par ſa peſanteur φ, & retenu ſur la ligne Ba, par ſa cohéſion avec cette ligne, & par le frottement. Fig. 7.

Soit fait $CB \ldots a$, $Ca \ldots x$; $\delta(aa + xx)^{\frac{1}{2}}$ exprimera l'adhérence de la ligne aB; φ, peſanteur du triangle CBa, égalera $\frac{gax}{2}$, où g exprime la denſité du triangle.

Si l'on décompoſe la force A & la force φ ſuivant deux directions, l'une parallèle à la ligne Ba, l'autre qui lui ſoit perpendiculaire, les triangles $\varphi G\delta$. $F\pi p$, qui expriment ces forces décompoſées, ſeront ſemblables au triangle CaB; l'on aura donc pour ces forces les expreſſions ſuivantes,

φG force perpendiculaire à aB dépendante de $\varphi \ldots \varphi x : (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$

$G\delta$ force parallèle à aB dépendante de $\varphi \ldots \ldots \varphi a : (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$

$F\pi$ force perpendiculaire à aB dépendante de $A \ldots Aa : (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$

πp force parallèle à aB dépendante de $A \ldots \ldots Ax : (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$.

Si $\frac{1}{n}$ exprime le rapport conſtant du frottement à la preſſion, l'on aura l'effort que fait le triangle pour couler ſur aB, exprimé par $[\varphi a - Ax - \frac{\varphi x - Aa}{n} - \delta(aa + xx)] : (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$; dans le cas d'équilibre, cette expreſſion ſera égale à zéro; d'où l'on tire

$$A = [\varphi(a - \frac{x}{n}) - \delta(aa + xx)] : (x + \frac{a}{n}).$$

Mais ſi l'on ſuppoſe que la force appliquée en F, vienne à augmenter, au point qu'elle ſoit prête à mettre le même triangle en mouvement ſuivant la direction Ba; pour lors, en nommant A' cette force, l'on aura

$$[A'x - \varphi a - \frac{\varphi x - Aa}{n} - \delta(aa + xx)] : (aa + xx)^{\frac{1}{2}},$$

pour l'effort ſuivant Ba; d'où l'on tire, dans le cas d'équilibre,

$$A' = [\varphi(a + \frac{x}{n}) + \delta(aa + xx)] : (x - \frac{a}{n}),$$

quantité qui ſeroit infinie ſi x égaloit $\frac{a}{n}$.

L'on peut remarquer, d'après les deux expreſſions précédentes, que la force A ſera toujours plus petite que la quantité $\frac{ga^2}{2}$, & que la force A' ſera toujours plus grande que cette quantité qui exprime la preſſion, lorſque l'adhérence & le frottement deviennent nuls, ou lorſque le triangle eſt ſuppoſé fluide.

Il eſt donc démontré que lorſque la cohéſion & le frottement contribuent à l'état de repos du triangle, que les limites de la force que l'on peut appliquer en F, perpendiculairement à CB, ſans mettre le triangle en mouvement, ſeront compriſes entre A & A'.

X.

Mais ſi l'on remarque, comme on l'a déjà fait dans l'introduction, que dans une maſſe de terres homogènes

l'adhérence eſt égale dans tous les points, il faut, pour ſoutenir cette maſſe indéfinie, que non-ſeulement la force *A* puiſſe ſupporter un triangle donné *CBa*, mais même parmi toutes les ſurfaces *CBeg*, terminées par une ligne courbe quelconque *Beg*, celle qui, ſoutenue par ſon adhérence & ſon frottement, & ſollicitée par ſa peſanteur, produiroit la plus grande preſſion; car, d'après cette ſuppoſition, il ſeroit évident que ſi l'on appliquoit en *F* une force qui ne différât de celle qui ſeroit ſuffiſante pour ſoutenir la ſurface de la plus grande preſſion, que d'une quantité très-petite, la maſſe des terres ne pourroit ſe diviſer que ſuivant cette ligne, toutes les autres parties reſtant unies par la cohéſion & le frottement. Il faut donc, pour avoir une force *A* ſuffiſante pour ſoutenir toute la maſſe, chercher parmi toutes les ſurfaces *CBeg*, celle dont la preſſion ſur la ligne *CB* eſt un *maximum*. De même, ſi l'on vouloit déterminer la plus grande force qui puiſſe agir en *F*, ſans troubler l'état de repos, il faudroit chercher une autre courbe *Be'g'*, telle que la force *A'* ſuffiſante pour faire couler la ſurface *CBe'g* ſuivant *Be'g'* ſoit un *minimum*, & les limites de la force horizontale, que l'on peut appliquer en *F*, ſans mettre le fluide en mouvement, ſeront compriſes entre les limites *A* & *A'*, où *A* ſera un *maximum*, & *A'* un *minimum*.

Ainſi, il réſulte que la différence entre la preſſion des fluides dont le frottement & la cohéſion ſont nuls, & de ceux où ces quantités ne doivent point être négligées, conſiſte en ce que dans les premiers, le côté *cB* du vaſe qui les contient ne peut être ſoutenu que par une ſeule force, au lieu que dans les autres, il y a une infinité de forces contenues entre les limites *A* & *A'*, qui ne troubleront point l'état de repos.

Comme il ne s'agit ici que de déterminer la moindre force horizontale que puiſſe éprouver le revêtement qui ſoutient une maſſe de terre, ſans que l'équilibre ſoit rompu, je ne chercherai que la force *A*.

Je ſuppoſerai d'abord que la courbe qui produit la plus

grande preſſion eſt une ligne droite ; ce qui eſt conforme à l'expérience, qui donne une ſurface très-approchante de la triangulaire, pour celle qui ſe détache lorſque les revêtemens ſont ébranlés par le poids des terres.

D'après cette ſuppoſition & les remarques précédentes, il faut donc, parmi tous les triangles CBa, qui ont pour côté invariable CB, & l'angle C droit, chercher celui qui demande la plus grande preſſion A pour l'empêcher de gliſſer le long de aB. Ainſi, comme nous avons pour un triangle quelconque, $A = \frac{\frac{ax}{2}(a - \frac{x}{n} - \delta(aa + xx)}{(x + \frac{a}{n})}$, l'on aura pour le triangle de la plus grande preſſion, par les règles *de maximis & minimis.* $\frac{dA}{dx} = \frac{(\frac{ga}{2n} + \delta).(aa - \frac{2ax}{n} - xx)}{(x + \frac{a}{n})^2} = 0$, & par conſéquent $x = -\frac{a}{n} + a\sqrt{(1 + \frac{1}{nn})}$. Subſtituant cette valeur de x dans l'expreſſion de A, l'on aura $A = ma^2 - \delta la$, m & l étant des coëfficiens conſtans, où il n'entre que des puiſſances de n; cette force A ſera ſuffiſante pour ſoutenir une maſſe indéfinie $CBlg$.

L'on peut conclure de la formule précédente, que l'adhérence n'influe point ſur la valeur de x, ou que les dimenſions du triangle qui produit la plus grande preſſion, dépendent abſolument du frottement.

Si le frottement eſt nul, quelle que ſoit l'adhérence, le triangle de la plus grande preſſion ſera iſoſcèle, ou celui dont l'angle ſera de 45 degrés.

X I.

Dans la formule précédente, $A = ma^2 - \delta la$, ſi l'on fait a variable, l'on aura $dA = da(2ma - \delta l)$ qui exprimera la différence des preſſions des ſurfaces indéterminés CBl, $CB'L$; & puiſque la verticale CB ne peut

pas

pas porter une moindre force que A, la ligne BB' ne pourra point être ſuppoſée preſſée d'une moindre force que dA; ainſi le *momentum* élémentaire de la force A autour du point E, baſe du revêtement, en nommant b la hauteur totale CE, ſera $(b - a)(2ma - \delta l)\,da$, & intégrant, l'on aura pour le *momentum* total autour du point E $\frac{m - b^3}{3} - \frac{\delta l b b}{2}$. Il faudra égaler cette quantité au *momentum* de la peſanteur du revêtement pour en déterminer les dimenſions.

Quant à la forme & aux dimenſions des revêtemens, l'on n'a rien de mieux à conſulter dans ce genre que *les Recherches ſur la figure des digues*, ouvrage que j'ai déjà cité.

EXEMPLE.

Si l'on ſuppoſe que le frottement ſoit égal à la preſſion, comme dans les terres qui, abandonnées à elles-mêmes, prennent 45 degrés de talus; ſi l'on ſuppoſe l'adhérence nulle; ce qui a lieu dans les terres nouvellement remuées: pour lors on aura $x = -\frac{a}{n} + a\sqrt{(1 + \frac{1}{nn})} = \frac{4}{10}a$, & $A = \frac{3}{35}a^2$; m ſera donc égale à $\frac{3}{35}$, & le *momentum* total autour de G ſera $\frac{m b^3}{3} = \frac{b^3}{35}$ *; ainſi, ſi le mur qui ſoutient les terres étoit ſans talus, que ſon épaiſſeur fut c, & que ſa denſité fut la même que celle des terres, l'on auroit $c = \frac{24b}{100}$, un peu moindre que le quart de la hauteur.

Mais ſi le revêtement avoit $\frac{1}{6}$ de talus, en nommant c ſon épaiſſeur au cordon CD, l'on aura, dans le cas d'équilibre,

* Dans cet exemple, comme dans ceux qui ſuivent, l'on ſuppoſe que le revêtement $DCEG$ eſt ſolide & indiviſible; que ſon frottement, exprimé par une fraction de ſa maſſe, eſt plus grand que la pouſſée horizontale A; l'on cherche donc ſeulement quelles doivent être ſes dimenſions, pour qu'il ne puiſſe point tourner autour de ſon point G.

la formule $\frac{b^3}{35} = cb\left(\frac{c}{2} + \frac{b}{6}\right) + \frac{2b^3}{12.3.6}$; d'où l'on tire à peu-près $c = \frac{b}{10}$. Si l'on vouloit augmenter la maſſe de la maçonnerie d'un quart en ſus de celle qui ſeroit néceſſaire pour l'équilibre, l'on trouveroit $c = \frac{b}{7}$; en ſorte que ſi l'on avoit 35 pieds de hauteur de terres à ſoutenir, il faudroit faire $CD = 5$ pieds; ce qui donne les dimenſions uſitées dans ce cas par la pratique. Je crois la quantité $c = \frac{b}{7}$ ſuffiſante dans l'exécution; d'autant plus, qu'outre l'augmentation de ſolidité, d'un quart en ſus de celle qu'exige l'équilibre, l'on a négligé le frottement qu'éprouve le revêtement, lorſque dans l'inſtant de rupture les terres ſont prêtes à couler le long de GE, ce qui diminue en même-temps la force A & augmente le *momentum* du revêtement.

M. le maréchal de Vauban, dans preſque toutes les places qu'il a fait conſtruire, a donné 5 pieds de largeur au cordon, ſur $\frac{1}{5}$ de talud. Comme les revêtemens conſtruits par cet homme célèbre, paſſent rarement 40 pieds, ſa pratique ſe trouve dans ce cas aſſez d'accord avec notre dernière formule. Il eſt vrai cependant que M. de Vauban ajoute des contre-forts à ſes murs; mais cette augmentation de ſolidité ne doit point être regardée comme ſuperflue dans les fortifications, dont les enveloppes ne doivent point être culbutées par le premier coup de canon.

Il réſulte de cette théorie, que dans les terres homogènes, nouvellement remuées, les épaiſſeurs des murs qui les ſoutiennent, meſurées au cordon CD, ſont comme les hauteurs CE; ce qui paroît devoir diminuer l'épaiſſeur que l'on donne ordinairement aux revêtemens qui n'ont que quinze à vingt pieds de hauteur.

XII.

Dans les terres dont la cohéſion eſt donnée, l'on tire de

la formule $A = ma^2 - \delta la$, qui exprime la preſſion des terres, un réſultat aſſez utile dans leur excavation. Je ſuppoſe qu'il s'agit de déterminer juſqu'à quelle profondeur l'on peut creuſer un foſſé, en coupant les terres ſuivant un plan vertical, ſans qu'elles s'éboulent; car, puiſque l'on a, en général, $A = maa - \delta la$, ſi l'on fait $A = 0$, l'on aura $a = \frac{\delta l}{m}$, qui exprimera cette hauteur.

Par des principes analogues, ſi la hauteur de l'excavation étoit donnée, l'on trouveroit l'angle ſous lequel il faudroit couper les terres pour qu'elles ſe ſoutinſſent par leur propre cohéſion.

XIII.

Si la maſſe de terre caB étoit chargée d'un poids P, il faudroit, dans les formules précédentes, à la place de φ *(art. 10)* ſubſtituer $P + \frac{ax}{2}$, & l'on aura

$$A = \frac{\left(\frac{gax}{2} + P\right).\left(a - \frac{x}{n}\right) - \delta(aa + xx)}{\frac{a}{n} + x},$$

d'où il réſulte

$$x + \frac{a}{n} = \sqrt{\left[aa\left(1 + \frac{1}{nn}\right) - Pa\left(\frac{1}{nn} + 1\right) : \left(\frac{ga}{2n} + \delta\right)\right]}.$$

Pour avoir les dimenſions des revêtemens, il faudra ſubſtituer d'abord cette valeur de x dans la formule qui exprime A, & faire le reſte comme dans l'*article 11*.

XIV.

Juſqu'ici nous n'avons point eu égard au frottement qu'éprouve le triangle CBa, en coulant contre CB dans l'inſtant de rupture; mais pour peu que l'on y faſſe attention l'on voit que ce triangle eſt non-ſeulement retenu par ſon frottement ſur Ba, mais encore par le frottement qu'il éprouve en gliſſant le long de cB, de la part du revêtement; ce dernier frottement pourra être exprimé par $\frac{A}{\nu}$, où $\frac{1}{\nu}$

marque le rapport du frottement & de la pression, lorsque les terres font effort pour couler sur la maçonnerie. Or, dans le cas d'équilibre, le frottement sur CB, équivaut à une force dirigée suivant BC; il faut donc, dans la formule qui donne la valeur de A (*art.* 10), substituer à la place de ϕ la quantité $\left(\frac{ax}{2} - \frac{A}{\nu}\right)$, ce qui donne

$$A = \frac{\left(\frac{ax}{2} - \frac{A}{\nu}\right)\left(a - \frac{x}{n}\right) - \delta(aa + xx)}{x + \frac{a}{n}} = \frac{\frac{ax}{2}\left(a - \frac{x}{n}\right) - \delta(aa + xx)}{a\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\nu}\right) + x\left(1 - \frac{1}{n\nu}\right)};$$

d'où l'on tirera, en supposant que A est un *maximum*, & en faisant $\frac{1}{n} + \frac{1}{\nu} = m$, & $1 - \frac{1}{n\nu} = \mu$,

$$x = -\frac{m}{\mu} + \sqrt{\left(\frac{\frac{n}{\mu}\left(\frac{mga^3}{2} + \delta\mu a^2\right)}{\frac{ga}{2} + n\delta} + \frac{mma^2}{\mu\mu}\right)}.$$

Substituant cette valeur de x dans l'expression de A, & opérant comme ci-dessus, l'on déterminera les dimensions des revêtemens.

EXEMPLE.

Si l'adhérence δ est supposée nulle, comme dans les terres nouvellement remuées; si le frottement est égal à la pression, comme dans toutes celles qui prennent 45^d de talus naturel, abandonnées à elles-mêmes; si n est supposé égal à ν, l'on trouvera pour lors $A = \frac{gx}{4}(a - x)$, & $x = \frac{a}{2}$, l'angle $CBa = 36^d\ 34'$, & $A = \frac{ga^2}{16}$, le *momentum* total de la pression des terres autour du point G sera $\frac{b^3}{3.16}$; d'où l'on tireroit, pour un mur de terrasse sans talus, dont l'épaisseur seroit c, en ayant égard à la réaction du frottement qui contribue à augmenter le *momentum* de la résistance du

revêtement, de la quantité $\frac{cb^2}{16}$, l'équation

$$\frac{b^3}{3.16} = \frac{ccb}{2} + \frac{cb^2}{16};$$

& par conséquent $C = \frac{15}{100} b$, à peu-près; c'est-à-dire qu'un mur de trois pieds de largeur seroit, dans cette hypothèse, en équilibre avec la poussée d'une terrasse de vingt pieds de hauteur.

L'on appliqueroit avec la même facilité les hypothèses de cet exemple à un revêtement qui auroit $\frac{1}{6}$ de talus, comme on le pratique ordinairement dans les murs de terrasse; mais les épaisseurs que donneroit cette application seroient beaucoup plus petites que celle que la pratique semble avoir fixé. Plusieurs causes en effet concourent à faire augmenter les dimensions des revêtemens; en voici quelques-unes.

1.° Le frottement des terres contre la maçonnerie n'est pas aussi fort que celui des terres sur elles-mêmes.

2.° Souvent les eaux filtrant à travers les terres, se rassemblent entre les terres & la maçonnerie & forment des napes d'eau qui substituent la pression d'un fluide sans frottement à la pression des terres; quoique, pour obvier à cet inconvénient, l'on pratique derrière les revêtemens des tuyaux verticaux & des égouts au pied de ces mêmes revêtemens, pour laisser écouler les eaux, ces égouts s'engorgent, ou par les terres que les eaux entraînent, ou par la gelée, & deviennent quelquefois inutiles.

3.° L'humidité change encore non-seulement le poids des terres, mais encore leur frottement. Je puis assurer avoir vu des terres savonneuses, qui se soutenant d'elles-mêmes, lorsqu'elles étoient sèches, sur une inclinaison de 45 degrés, avoient de la peine, quand elles étoient mouillées, à se soutenir sur une inclinaison de 60 à 70 degrés. Enfin, il faut pour que l'on puisse compter sur les dimensions fixées par les formules, que l'eau ne pénètre point les terres dont on cherche la pression, ou qu'en les pénétrant, elle en augmente

peu le volume. Cette augmentation de volume que l'humidité procure aux terres, & dont nous avons un exemple dans les lézardes que la sécheresse occasionne à la surface de nos campagnes, produit contre les revêtemens une pression que l'expérience seule peut déterminer.

Ces remarques sont encore indépendantes de la bonté de la maçonnerie, qu'il faut toujours laisser sécher avec soin avant de la charger: elles sont encore indépendantes de la gelée, ennemi sans contredit le plus dangereux dont les maçonneries aient à craindre les effets; car, outre l'augmentation de pression que la gelée produit dans les terres humides, par l'augmentation de volume, outre les engorgemens des tuyaux d'écoulement, l'on peut être sûr que tout mur qui éprouvera de fortes gelées avant d'être sec, perdra nécessairement la plus grande partie de son adhérence, & sera incapable de résistance.

Malgré toutes ces remarques, qui paroissent conduire à conclure qu'il faut des dimensions particulières aux revêtemens, suivant la nature des remblais dont ils éprouvent la pression; que dans les pays secs & chauds il y a moins d'inconvénient à diminuer les murs de terrasse, que dans les pays humides & froids; je crois cependant que dans toutes les espèces de terres l'on pourra sans danger fixer les revêtemens à $\frac{1}{6}$ de talus, sur le septième de la hauteur, pour l'épaisseur au cordon (conformément à l'*article 11*).

X V.

De la surface de plus grande pression dans les fluides cohérens.

Jusqu'ici nous avons supposé que la surface qui produit la plus grande pression étoit une surface triangulaire; la simplicité des résultats que donne cette supposition, la facilité de leur application à la pratique, le desir d'être utile & entendu des Artistes, sont les raisons qui nous ont décidé; mais si l'on vouloit déterminer d'une manière exacte la surface courbe

qui produit la plus grande pression: voici, je crois comme on pourroit s'y prendre.

Que CBg, représente la surface courbe qui produit la plus grande pression sur CB, le frottement des terres & la cohésion étant supposés les mêmes que ceux du fluide indéfini $gCBl$. Si l'on prend un portion de la surface CBg, comme PMg, il est évident que cette portion PMg sera de toutes les surfaces que l'on peut construire sur PM, celle qui produiroit sur cette ligne la plus grande pression; mais pour avoir la valeur de cette pression l'on verra que dans le moment où l'équilibre est prêt à se rompre, cette surface PGM est soutenue par son frottement & sa cohésion sur gM, son frottement & sa cohésion sur PM, & sollicitée par sa pesanteur φ. Ce que l'on dit par rapport à la portion PMg, on peut le dire par rapport à la portion $P'M'g$. Or, comme dans l'instant de rupture, toute la masse est en équilibre il s'ensuit qu'une portion $PMP'M'$, soit élémentaire ou non, sollicitée par sa pesanteur, & retenue par ses frottemens, sa cohésion, & les différentes pressions qu'elle éprouve de la part du fluide qui l'entoure, doit aussi être en équilibre; mais pour peu que l'on y fasse attention l'on remarquera qu'une masse PMg ne peut être retenue par son adhérence & son frottement qui l'empêche de glisser le long de PM, sans que le même frottement & la même adhérence n'agisse par sa réaction sur la masse $CBPM$, dans le sens contraire. Ainsi en nommant A la pression horizontale qu'éprouve la ligne PM, & A' celle qu'éprouve la ligne PM'; un élément quelconque $PMP'M'$, qui doit être en équilibre, sera retenu suivant une ligne horizontale Fe par la pression $(A' - A)$, sera sollicité suivant la ligne verticale PM, par la réaction du frottement exprimé par $\frac{A}{n}$, par la réaction de l'adhérence δPM, & retenu par le frottement & la cohésion de $P'M'$, par le frottement & la cohésion de MM'; l'on peut donc regarder cette surface élémentaire $PP'MM'$, comme un triangle $MM'q$, chargé du poids de l'élément sollicité par

toutes les forces verticales que nous venons de détailler. Soit fait

$gP \ldots\ldots\ldots\ldots x \qquad PM \ldots\ldots\ldots\ldots y,$
$gP' \ldots\ldots\ldots\ldots x' \qquad P'M' \ldots\ldots\ldots\ldots y',$
$gP'' \ldots\ldots\ldots\ldots x'' \qquad P''M'' \ldots\ldots\ldots\ldots y''.$

Nous avons trouvé *(art. 9 & 10)* qu'une surface triangulaire dont a seroit le côté vertical & x le côté horizontal, sollicitée par une puissance verticale φ, donneroit la pression horizontale $A = \frac{\varphi(a - \frac{x}{n})}{x + \frac{a}{n}} - \frac{\delta(aa + xx)}{x + \frac{a}{n}}$; en comparant cette équation avec celle qui auroit lieu pour l'élément $PP'MM'$, l'on trouvera que A représente $(A' - A)$; que $\varphi = y.(x' - x) + \frac{A - A'}{n} + \delta(y - y')$; que $a = (y' - y)$ & $x = (x' - x)$; ainsi l'équation qui exprime l'état d'équilibre deviendra

$$(A' - A) = [y(x' - x) + \frac{A - A'}{n} + \delta(y - y')]\left(\frac{y' - y - (\frac{x' - x}{n})}{x' - x + \frac{y' - y}{n}}\right).$$

Supposons, pour simplifier, $\delta = 0$, ce qui a lieu pour les terres nouvellement remuées, l'on aura

$$A' - A = \frac{y(x' - x)(y' - y) - (\frac{x' - x}{n})}{\frac{2(y' - y)}{n} + (x' - x)(1 - \frac{1}{nn})}.$$

Par le même raisonnement, l'on trouvera

$$A'' - A' = \frac{y'(x'' - x')(y'' - y' - \frac{(x'' - x')}{n})}{\frac{2(y'' - y')}{n} + (x'' - x')(1 - \frac{1}{nn})};$$

& par conséquent, en ajoutant ensemble ces deux équations, l'on aura

$$A'' - A = \frac{y(x' - x)(y' - y - \frac{(x' - x)}{n})}{\frac{2(y' - y)}{n} + (x' - x)(1 - \frac{1}{nn})} + \frac{y'(x'' - x')(y'' - y' - \frac{(x'' - x')}{n})}{\frac{2(y' - y')}{n} + (x'' - x')(1 - \frac{1}{nn})};$$

mais

mais puiſque la preſſion horizontale de la ſurface PMg doit être un *maximum*, de même que la preſſion horizontale de la ſurface $P''M''g$, il ſuit que les quantités y, y', y'' & x, x'' reſtant conſtantes, x', ſeul variable, doit être tel qu'il rende $A'' - A'$ un *maximum;* ce qui donne, en différentiant & faiſant $y' - y = y'' - y' = dy$,

$$\frac{d(A''-A)}{dx'} = \frac{y(dy - \frac{(x'-x)}{n})}{\frac{2dy}{n} + (x'-x)(1-\frac{1}{nn})} - \frac{\frac{y}{n}(x'-x)}{\frac{2dy}{n}+(x'-x)(1-\frac{nn}{1})} - \frac{(1-\frac{1}{nn})y(x'-x)(dy-\frac{(x'-x)}{n})}{[\frac{2dy}{n}+(x-x')(x-\frac{1}{nn})]^2}$$

$$- \frac{y'(dy - \frac{(x''-x)}{n}}{\frac{2dy}{n}+(x''-x')(1-\frac{1}{nn})} + \frac{\frac{y'}{n}(x''-x')}{\frac{2dy}{n}+(x''-x')(1-\frac{1}{nn})} + \frac{(1-\frac{1}{nn})y'(x''-x')(dy-\frac{(x''-x')}{n}}{[\frac{2dy}{n}+(x''-x)(1-\frac{1}{nn})]^2}$$

mais comme les différentes parties correſpondantes de cette équation ſont des fonctions conſécutives ſemblables, il ſuit, en intégrant & ſubſtituant dx à la place de $x' - x$,

$$B = \frac{y(dy - \frac{dx}{n})}{2(dy + dx(1-\frac{1}{nn})} - \frac{y\frac{dx}{n}}{\frac{2dy}{n}+dx(1-\frac{1}{nn})} - \frac{(1-\frac{1}{nn})y\,dx(dy-\frac{dx}{n})}{[\frac{2dy}{n}+dx(1-\frac{1}{nn})]^2}.$$

Si dans cette équation l'on fait $z\,dy = dx$, l'on trouvera

$$\frac{y(1-\frac{z}{n})}{\frac{2}{n}+z(1-\frac{1}{nn})} - \frac{y\frac{z}{n}}{\frac{2}{n}+z(1-\frac{1}{nn})} - \frac{(1-\frac{1}{nn})yz(1-\frac{z}{n})}{[\frac{2}{n}+z(1-\frac{1}{nn})]^2} = B.$$

Comme dans cette équation réduite, z n'eſt élevé qu'à la deuxième puiſſance, elle aura la forme ſuivante,

$$zz + \frac{F'+G'y}{F+Gy}z + \frac{F''+G''y}{F+Gy} = 0,$$

& par conſéquent,

$$z + \frac{F'+G'y}{2(F+Gy)} = \pm\left[\left(\frac{F'+G'y}{2(F+Gy)}\right)^2 - \frac{F''+G''y}{F+Gy}\right]^{\frac{1}{2}};\ F,F,F'',$$

de même que GG' & G'' ſont des coëfficiens conſtans.

Si l'on avoit eu égard à l'adhérence, l'on auroit eu préciſément une équation de la même forme, & l'on n'y trouveroit de différence que dans les coëfficiens.

L'on peut conclure de cette dernière recherche, que si un fluide, dont la cohésion & le frottement seroient donnés, étoit contenu dans un vase CBg', la pression contre la paroi CB seroit la même, quelle que fût la figure de Bg; si l'on pouvoit y inscrire la surface courbe Beg, qui produiroit un *maximum* dans une masse de fluide indéfinie; mais si la courbe Beg, qui produit la plus grande pression, étoit extérieure au vase; pour lors, il faudroit déterminer, de toutes les surfaces que l'on pouvoit inscrire de ce vase, celle qui produiroit la plus grande pression.

Cependant, il faut remarquer que si l'adhérence & le frottement du vase & du fluide étoient plus petits que ceux du fluide avec lui-même; pour lors, il se pourroit que la pression du fluide contenu dans le vase fut plus grande que celle du fluide indéfini. Le développement de ces remarques, de même que l'application des formules qui précèdent, demandent un travail exprès, & m'éloigneroit de la simplicité que je me suis prescrite dans ce Mémoire; j'espère cependant pouvoir une autre fois traiter cette matière dans la théorie des mines, qui, dépendant en partie des principes que je viens d'expliquer, demande encore la solution de quelques Problèmes assez curieux.

XVI.

Des Voûtes.

Fig. 9. Soit la courbe FAD, décrite sur l'axe FD; soit une seconde courbe fad, décrite extérieurement à la première; soit divisée la courbe FAM en une infinité de parties MM', & de chaque point M, soit tirée la ligne MM', perpendiculaire à la courbe intérieure en M, où formant avec l'élément MM' un angle suivant une loi donnée; si l'on suppose les deux lignes FAD, fad, telles qu'une portion quelconque $AaMm$, sollicitée par la pesanteur, & retenue par la cohésion & le frottement, soit en équilibre, l'on aura formé le profil d'une voûte. Si l'on suppose ensuite que ce profil se meut, parallèlement à lui-même, & forme une enveloppe solide,

comprise entre le tracé du mouvement des deux courbes, l'équilibre, démontré par rapport à ce profil, sera encore vrai, par rapport à cette enveloppe; & la voûte ainsi formée, sera celle que l'on appelle une *voûte en berceau*. C'est celle dont je me suis occupé dans les recherches qui suivent. Les principes que l'on y explique pourront s'appliquer à toutes les autres espèces de voûtes.

XVII.

Des Voûtes dont les joints n'ont ni frottement, ni cohésion.

Soit aB le profil d'une voûte, d'une épaisseur infiniment petite, dont les joints soient perpendiculaires à la courbe aB; l'on demande la figure de cette voûte, sollicitée par des puissances quelconques. Fig. 10.

Que toutes les forces qui agissent sur la portion aM soient décomposées suivant deux directions, l'une verticale, & l'autre horizontale; que la résultante de toutes les forces verticales soit Qz, que je nomme φ; que la résultante de toutes les forces horizontales soit $Q\varphi$, que je nomme π; soit de plus $aP \ldots y$, $PM \ldots x$, $Mq \ldots dx$, $qM' \ldots dy$, il est évident *(art. 1.er)* que la résultante de toutes les forces qui agissent sur la portion aM doit être perpendiculaire au joint en M; & par l'*article 3*, que toutes les forces qui sollicitent cette partie de voûte, étant décomposées suivant deux directions, l'une verticale & l'autre horizontale, perpendiculaires l'une à l'autre; la somme des forces, suivant chaque direction doit être nulle; ainsi, si l'on nomme P la pression du joint en M, & que l'on décompose cettte pression en deux forces, l'une horizontale $\frac{Pdx}{ds}$, & l'autre verticale $\frac{Pdy}{ds}$, l'on aura les deux équations suivantes $\frac{Pdx}{ds} = \pi$, & $\frac{Pdy}{ds} = \varphi$, & par conséquent, en divisant l'une par l'autre, pour faire disparoître P, l'on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{\pi}{\varphi}$;

équation qui exprime la figure d'une voûte, sollicitée par des puissances quelconques.

Cette formule se trouve exactement la même que celle qui a été déterminée par M. Euler *(dans le troisième volume de l'Académie de Péterbourg)* pour la figure d'une chaîne, sollicitée par des puissances quelconques. Ce qui doit effectivement arriver; car, en renversant la courbe, & substituant la tension à la pression, la théorie précédente s'applique également à l'un ou l'autre cas, & donne précisément la même expression. Au reste, la méthode de M. Euler n'a rien de commun avec celle-ci, que le résultat.

COROLLAIRE I.er

Si la puissance horizontale étoit constante & égale à la pression en a, & si la résultante des forces verticales étoit égale à la pesanteur de la portion de la voûte aM; pour lors, l'on auroit $\frac{dx}{dy} = \frac{A}{\int p\,ds}$; d'où l'on tirera la valeur de p, si la courbe est donnée, & de même l'expression de la courbe lorsque la loi de pesanteur p est donnée.

COROLLAIRE II.

Si l'épaisseur de la voûte étoit finie, les mêmes suppositions Fig. 11. existantes, que dans le Corollaire précédent; soit R le rayon de la développée au point M; soit z le joint Mm, l'on aura $MM'mm' = \frac{ds\,(2R+z)}{2R}$, & par conséquent $\frac{dx}{dy} = \frac{A}{\int \frac{z\,ds\,(2R+z)}{2R}}$, d'où $\frac{A\,ddy}{dx} = \frac{z\,ds\,(2R+z)}{2R}$; mais $R = \frac{ds^3}{ddy.dx}$, & $\frac{ddy}{dx} = \frac{ds^3}{R\,dx^2}$; ainsi, l'on aura $\frac{A(ds)^3}{R\,dx^2} = \frac{z(2R+z)}{2R}$; ce qui donne

$$R + z = \left(R\,R + \frac{2A(ds)^3}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

équation générale pour une voûte quelconque, dans le système de la pesanteur.

EXEMPLE.

Si la courbe intérieure *aMB* étoit un cercle dont le rayon fut 1, & qu'on cherchât la valeur de z, il est clair que $\frac{ds}{dx} = \frac{MM'}{qM'} = \frac{1}{\text{cos. } s}$; ainsi $1 + z = \left(1 + \frac{2A}{(\text{cos. } s)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Si l'on suppose qu'au sommet de la courbe le joint $Aa = b$, l'on aura pour lors cos. $s = 1$, & $A = \frac{2b + bb}{2}$.

REMARQUE I.ère

Par cette théorie, je n'ai cherché qu'à remplir la première condition d'équilibre, qui exige que toutes les forces qui agissent sur une portion de voûte *GaMm*, aient leur résultante perpendiculaire au joint *Mm;* mais il est facile de prouver que l'on a satisfait en même-temps à la deuxième condition, qui demande que cette résultante tombe entre les points *M* & *m;* car, puisque la force constante *A* agit perpendiculairement au joint vertical *Ga*, en un point quelconque *S*, il s'ensuit que puisque par la condition d'équilibre que l'on vient de remplir, la ligne des résultantes doit couper tous les joints perpendiculairement, elle formera une courbe parallèle à la ligne intérieure *aB;* ainsi, dans le cas où la force *A* seroit appliquée en *a*, la ligne des pressions seroit exactement la même que *aMb.*

M. Jacques Bernoulli *(Op. vol. II, p. 1119)* en cherchant la figure d'une voûte dont les voussoirs seroient égaux & très-petits, trouve, par les différentes conditions d'équilibre, deux expressions différentes; mais une fausse estimation dans les angles de cotangente, a donné lieu à l'erreur de M. Bernoulli, & la remarque en a été déjà faite dans les notes par les Éditeurs de ses Ouvrages.

REMARQUE II.

Il ſuit encore de la formule générale

$$R + z = (RR + \frac{2A(ds)^2}{dx^2})^{\frac{1}{2}},$$

que toutes les fois que la voûte aB forme au point B un angle droit avec ſon axe EB, parallèle à l'horizon, le joint, dans ce point, devient infini ; ou que ce joint eſt l'aſymptote de la courbe extérieure CD; car, puiſque dans l'équation fondamentale, ds devient infini par rapport à dx, il ſuit que $R + z$ devient auſſi une quantité infinie. Ce réſultat ſe trouve peu conforme avec ce que nous voyons exécuter tous les jours, puiſque dans la pratique, les joints horizontaux, au lieu d'être infinis, ſont ſouvent aſſez petits. Dans la théorie, en outre, la courbe intérieure étant donnée, la longueur du joint eſt toujours une quantité donnée; quantité cependant que les Architectes varient à l'infini dans l'exécution. Mais le frottement & l'adhérence conſervent par leur réſiſtance l'équilibre, que la force de la gravité tend à détruire. Nous chercherons dans la ſuite la manière de faire entrer dans l'expreſſion des voûtes ces nouvelles forces coërcitives; mais l'on peut en attendant inférer de cette remarque, que dans l'exécution, la théorie qui précède, ne peut être, comme nous l'avons déjà dit dans le Diſcours préliminaire, que d'une foible utilité.

COROLLAIRE III.

Si la courbe extérieure, de même que la courbe intérieure étoient données, l'on pourroit déterminer, dans le cas d'équilibre, la direction des joints de la manière ſuivante.

Fig. 12. Soit ſuppoſé, comme plus haut, le joint aG vertical, prolongé indéfiniment en l; ſoit qM le joint en M, qui, prolongé, rencontre la verticale al en G; ſoit φ le centre de gravité de la partie $aGMq$; ſoit Sp la direction de la force horizontale conſtante A qui rencontre en p une verticale paſſant par le centre de gravité φ; la réſultante de

toutes les forces sera exprimée par une ligne pn, qui *(art. 1)* doit être perpendiculaire au joint Mq, & passer entre les points M & q; soit tiré PM, parallèle à l'axe AB, & soit nommé h l'angle PMC. La courbe aMB étant donnée, de même que la courbe GqD, la pesanteur de la masse $GaMq$ sera exprimée par une fonction de PM & de h; mais les deux triangles semblables prn, PCM, dont les côtés du premier sont proportionnels aux forces qui agissent sur la portion de voûte $GaMq$, donnent l'analogie suivante: P pesanteur de la portion de la voûte $GaMq$: A :: cos. h : sin. h, ou $P = \frac{A \text{ cos. } h}{\text{sin. } h}$. Nous verrons dans la suite quels sont les points S entre a & G, où l'on peut appliquer la pression A, quantité déterminée par l'équation précédente, pour satisfaire à la deuxième condition d'équilibre; c'est-à-dire, pour que la résultante pn passe toujours entre les points M & q.

EXEMPLE.

Si l'on vouloit déterminer la direction des joints d'une plate-bande d'une épaisseur constante & donnée; que $aGBb$ représente cette voûte comprise entre deux lignes droites parallèles. La direction du joint vertical aG, de même que la direction du dernier joint Bb, par lequel la voûte s'appuie sur le mur $BLKo$, étant données, l'on cherche la direction de tous les autres joints MM'; soit $aG = a$, $aM = x$, que la direction du joint MM' rencontre la verticale aG en G, l'on aura $GaMM' = P = ax + \frac{a^2 \text{ cos. } h}{2 \text{ sin. } h}$; Fig. 13.

Substituant cette valeur de P dans l'équation fondamentale $\frac{A \text{ cos. } h}{\text{sin. } h} = P$, il en résulte $ax = (A - \frac{a^2}{2}) \frac{\text{cos. } h}{\text{sin. } h}$.

Pour avoir la valeur de la constante A, soit supposé que lorsque $x = aB = b$, $\frac{\text{cos. } h}{\text{sin. } h}$ égale C. L'on trouvera

$A = \frac{2ab + a^2 C}{2C}$; & par conséquent $x = \frac{b \text{ cof. } h}{C \text{ fin. } h}$; d'où l'on conclud que tous les joints d'une plate-bande paſſent par le même point *C*; ce qui donne une conſtruction très-facile.

Pour ſatisfaire, dans cet exemple, à la deuxième condition de l'*article I.er*, qui exige que la réſultante des forces qui tiennent en équilibre la portion de voûte *GaMM'*, paſſe entre les points *M* & *M'*; ſoit *φr* une ligne verticale paſſant par le centre de gravité de la maſſe totale *GaBb*. Si ſur le joint *bB* l'on élève au point *B* une perpendiculaire *Bn*, qui rencontre la verticale *φr* en *n*, & ſi, par ce point *n* on tire une ligne horizontale *ns*, le point *S*, où le joint vertical *Ga* ſera rencontré par cette ligne, ſera le point le plus bas ſur le joint *Ga*, où l'on puiſſe appliquer la force *A*, ſans que la plate-bande ſe rompe. Ainſi, ſi la direction du joint *Bb* étoit telle, que la ligne *Bn* rencontrât la verticale *φr*, en un point *n*, au-deſſus de la ligne *Gb*, il n'y auroit aucun point ſur le joint *Ga*, où l'on pût appliquer la force *A*, pour conſerver l'équilibre, & la plate-bande ſe briſeroit néceſſairement. Il eſt très-facile, d'après ces remarques, de déterminer la limite de l'inclinaiſon *Bb*, lorſque l'épaiſſeur *Ga* eſt donnée.

Je crois inutile d'avertir que ſi la réſultante *Bn*, pour la maſſe totale, paſſe par le point *B*, la réſultante, pour une maſſe particulière *GaMM'*, paſſera néceſſairement entre *M* & *M'*, puiſque la quantité *A* reſtant conſtante, les maſſes *GaMM'* diminuent. Ainſi, dès que l'on a ſatisfait à la deuxième condition d'équilibre pour le point *B*, l'on a néceſſairement ſatisfait à cette même condition pour un point quelconque *M*.

XVIII.

XVIII.

De l'équilibre des voûtes, en ayant égard au frottement & à la cohésion.

PROBLÈME.

Dans une voûte, la courbe intérieure aB, *la courbe extérieure* Gb *étant données, les joints* Mm, *perpendiculaires aux élémens de la courbe intérieure, seront aussi donnés: l'on demande les limites de la pression horizontale en* f, *qui soutiendra cette voûte, en supposant qu'elle soit sollicitée par sa propre pesanteur, & retenue par la cohésion & le frottement des joints.* Fig. 14.

Soit prise une portion de cette voûte, telle que *GaMm*, soit prolongé *mM* jusqu'en *R;* soit nommé l'angle *R, h;* soit la force de pression appliquée en *f* sur le joint vertical *aG*, exprimé par *A*.

Je suppose d'abord la portion *GaMm* solide, en sorte qu'elle ne puisse se diviser que suivant *Mm*. Il faut donc, pour que cette portion de voûte soit en équilibre, que la force *A* soit telle qu'elle l'empêche de glisser suivant *mM;* mais la force dépendante de *A*, décomposée suivant *Mm*, & dirigée suivant cette même ligne, est......... A sin. h.

La force parallèle à *mM*, dépendante de φ........... φ cos. h.

La force perpendiculaire à *mM*, dépendante de *A*....... A cos. h.

La force perpendiculaire à *mM*, dépendante de φ....... φ sin. h.

Ainsi, l'on aura, en ayant égard au frottement & à l'adhérence, φ cos. $h - A$ sin. $h \frac{-\varphi \text{ sin.} h - A \text{ cos.} h}{n} - \delta . Mm$, pour exprimer l'effort que fait cette portion de voûte pour glisser selon *mM;* & dans le cas que *A* sera seulement suffisant pour la soutenir, l'on aura

$$A = \frac{\varphi \left(\text{cos.}\, h - \frac{\text{sin.}\, h}{n}\right) - \delta\, Mm}{\text{sin.}\, h + \frac{\text{cos.}\, h}{n}}.$$

Or, comme par sa construction, la voûte peut non-seulement

gliſſer ſur le joint mM, mais même ſur tout autre, il ſuit que pour que la voûte ne ſe rompe point, A ne doit jamais

être moindre que la quantité $\dfrac{\varphi\,(\text{coſ.}\,h - \frac{\text{ſin.}\,h}{n}) - \delta\,Mm}{\text{ſin.}\,h + \frac{\text{coſ.}\,h}{n}}$;

quelle que ſoit la valeur de h. Ainſi, ſi l'on prend la valeur de h, telle qu'elle donne pour A un *maximum*, pour lors la conſtante A, ainſi déterminée, ſera ſuffiſante pour ſoutenir toute la voûte.

Je ſuppoſe que $A_{,}$ exprime ce *maximum*.

Si l'on cherchoit à déterminer la force en f, de manière qu'elle fût prête à faire couler la portion de voûte qui oppoſeroit la moindre réſiſtance, ſuivant Mm, pour lors, l'on auroit, dans le cas d'équilibre, pour une portion

quelconque $A = \dfrac{\varphi\,(\text{coſ.}\,h + \frac{\text{ſin.}\,h}{n}) + \delta\,Mm}{\text{ſin.}\,h - \frac{\text{coſ.}\,h}{n}}$; mais comme

aucune portion de voûte ne doit gliſſer ſur un joint quelconque Mm, il faut que A ſoit toujours plus petit que cette dernière quantité. Ainſi il faut chercher le *minimum* de A qui exprimera la plus grande force que l'on puiſſe appliquer en f, ſans rompre la voûte, ſuivant un joint Mm; je ſuppoſe que A' ſoit ce *minimum*.

Ainſi, comme dans le cas de repos, qui eſt celui que nous cherchons à fixer, la voûte, en tout ou en partie, ne doit point gliſſer ſur ſes joints dans aucun ſens, il ſuit que les limites des forces que l'on peut appliquer en f, ſont compriſes entre $A_{,}$ & A', ou $A_{,}$ exprime la moindre force qui puiſſe preſſer le point f, & A' la plus grande force qui puiſſe preſſer ce même point; d'où l'on peut conclure que ſi $A_{,}$ eſt plus grand que A', il ne peut y avoir d'équilibre, puiſque la preſſion en f ne pouvant point être plus grande que A', ne peut point être non plus plus petite que $A_{,}$, que nous ſuppoſons plus grand que A'.

Pour ſatisfaire à préſent à la deuxième condition d'équilibre,

il faut que la résultante gv, de toutes les forces qui agissent sur la portion de voûte $GaMm$, passe au-dessus du point M, & au-dessous du point m. Il faut, par conséquent, en nommant B la force qui agit en f, que BMQ soit toujours égal ou plus grand que $\varphi gM - \delta' zz$ (δ' étant une fraction constante de la cohésion du mortier, *art. 7*); & dans le cas où la résultante passeroit par le point M, l'on auroit $B = \frac{\varphi gM - \delta' zz}{MQ}$. Si la quantité B étoit supposée plus petite que $\frac{\varphi gM - \delta' zz}{MQ}$, pour lors la résultante gv passeroit au-dessous du point M, & la voûte se romproit. Ainsi, pour avoir la force B, suffisante pour soutenir toute la voûte, il faut chercher le *maximum* de B d'après l'équation précédente, & ce *maximum* exprimera la plus petite force que l'on puisse appliquer en f; que $A_{,}$ exprime ce *maximum*.

Comme il faut encore, pour satisfaire à la deuxième condition, que la résultante Lv passe au-dessous du point m, il suit que Bmq doit être plus petit, ou tout au plus égal à $\varphi Lq + \delta' zz$. Ainsi, d'après l'équation $B = \frac{\varphi \cdot gq + \delta' zz}{mq}$, il faut déterminer la constante B, telle qu'elle représente le *minimum* de $\frac{\varphi gq + \delta' zz}{mq}$; & B', déterminé d'après cette considération, donnera pour Bmq une quantité égale à $\varphi qg + \delta' zz$, dans un point seulement, & plus petite dans tous les autres points m, & par conséquent B' exprimera la plus grande force que l'on puisse supposer agir en f; d'où l'on conclud que pour remplir la deuxième condition, la force appliquée en f ne peut point être plus petite que B, ni plus grande que B'. Par conséquent, pour joindre les deux conditions ensemble, si $A_{,}$ ou $B_{,}$ étoient plus grands que A' ou B', l'équilibre ne pourroit point avoir lieu, & la voûte, dont les dimensions seroient données, se romproit nécessairement.

Pour avoir actuellement les vraies limites, il suffit de prendre entre $A_{,}$ & $B_{,}$ la quantité la plus grande, & entre

A' & B' la quantité la plus petite, en ſorte que ſi $B_{,}$ étoit plus grand que $A_{,}$, & B' plus petit que A', $B_{,}$ & B' ſeroient les véritables limites des forces que l'on pourroit appliquer en f ſans rompre la voûte.

REMARQUE I.

Le frottement eſt ſouvent aſſez conſidérable dans les matériaux que l'on emploie à la conſtruction des voûtes, pour que les différens vouſſoirs ne puiſſent point gliſſer l'un contre l'autre; en ce cas, l'on peut négliger la première condition d'équilibre; & il n'eſt plus néceſſaire que la réſultante des forces qui agit ſur une portion quelconque de voûte ſoit perpendiculaire aux joints qui la terminent; mais ſeulement qu'elle tombe ſur ces joints. Ainſi, en négligeant la cohéſion des joints, ce qui doit ſe faire dans les voûtes nouvellement conſtruites; il ſuffit de chercher le *maximum* de $\frac{\varphi g M}{MQ}$, pour déterminer la force $B_{,}$, & le *minimum* de $\frac{\varphi q g}{mq}$, pour déterminer B'; l'on doit en outre ſuppoſer que la force B agit en G, ſommet du joint, pour rendre la force $B_{,}$ auſſi petite qu'elle puiſſe être. Il faut cependant remarquer que lorſqu'on cherche à fixer l'état d'équilibre par cette ſeconde condition, en ſuppoſant les forces paſſant par les points G & M, il faut ſuppoſer que ces points ſont aſſez éloignés de l'extrémité des joints, pour que l'adhérence des vouſſoirs ne permette pas à ces forces d'en rompre les angles; ce qui ſe détermine par les méthodes que nous avons employées en cherchant la force d'un pilier.

REMARQUE II.

Dans la pratique, il ſera toujours plus ſimple de déterminer les limites de la force B par tâtonnement, que par des moyens exacts. Je ſuppoſe, par exemple, que l'on prenne la portion GaM de la voûte, telle que le joint Mm faſſe un angle de 45 degrés avec une ligne horizontale; l'on calculera la

force $B_{\prime}$ dans cette ſuppoſition; l'on cherchera enſuite cette même force par rapport à un ſecond joint, peu diſtant du premier, en s'approchant de la clef; ſi cette deuxième force eſt plus grande que la première, l'on ſera sûr que l'angle de rupture de la voûte eſt entre la clef & le premier joint; ainſi, en remontant, par cette même opération, vers cette clef, l'on déterminera facilement la vraie force $B_{\prime}$. Ce calcul ne ſauroit jamais être bien long, parce que par la propriété *de maximis & minimis*, il y aura, vers un point M, où l'on trouve la limite cherchée $B_{\prime}$, très-peu de variations ſur un aſſez grand développement de la courbe; & qu'ainſi, pour déterminer cette force $B_{\prime}$, il ne ſera néceſſaire que d'avoir à peu-près le point de rupture M; l'on déterminera par les mêmes moyens la plus grande force B' que puiſſe ſoutenir une voûte ſans ſe rompre. Par conſéquent, ſi les dimenſions de la voûte étoient données, comme nous le ſuppoſons ici, de même que la hauteur du pied-droit BE, ſur lequel elle porte, l'on déterminera facilement quelle doit être l'épaiſſeur Bb de ce pied-droit, pour que la réſultante de la force $B_{\prime}$, qui agit en G, & de la peſanteur totale de la voûte & de ſon pied droit paſſe entre E & e, ou paſſe par le point e; ce qui ſatisfera à la deuxième condition de ſolidité.

La deſtination de ce Mémoire, peut-être déjà trop long, ne me permet pas d'étendre cette théorie, ni de l'appliquer à toutes les eſpèces de voûtes; ainſi, je me contenterai d'avoir eſſayé de donner des moyens exacts, & tels que je les crois abſolument néceſſaires pour conſtater l'état de ſolidité.

En comparant les principes qui précèdent avec les différentes méthodes d'approximation uſitées dans la pratique, l'on s'apercevra facilement que leurs auteurs n'ont point aſſez diſtingué les deux conditions d'équilibre néceſſaires pour l'état de repos. Dans celle, par exemple, que l'on attribue à M. de la Hire, rapportée par M. Bélidor, & pratiquée par preſque tous les Artiſtes, l'on diviſe la voûte en trois parties, & l'on calcule la preſſion de la partie ſupérieure,

en ſe conformant à la première condition d'équilibre, & l'on détermine enſuite les dimenſions des pieds-droits, par la deuxième condition d'équilibre. Or, pour peu que l'on y faſſe attention, l'on verra que ſi l'on diviſe la partie ſupérieure vers la clef, & que l'on ſuppoſe que cette voûte ſe rompe en quatre parties, au lieu de ſe rompre en trois, la force de preſſion des parties ſupérieures ſera ſouvent, dans les voûtes plates, beaucoup plus grande que celle qui ſe détermine par la méthode de M. de la Hire, & que les dimenſions des pieds-droits, fixés par cette méthode, ſeront ſouvent inſuffiſantes.

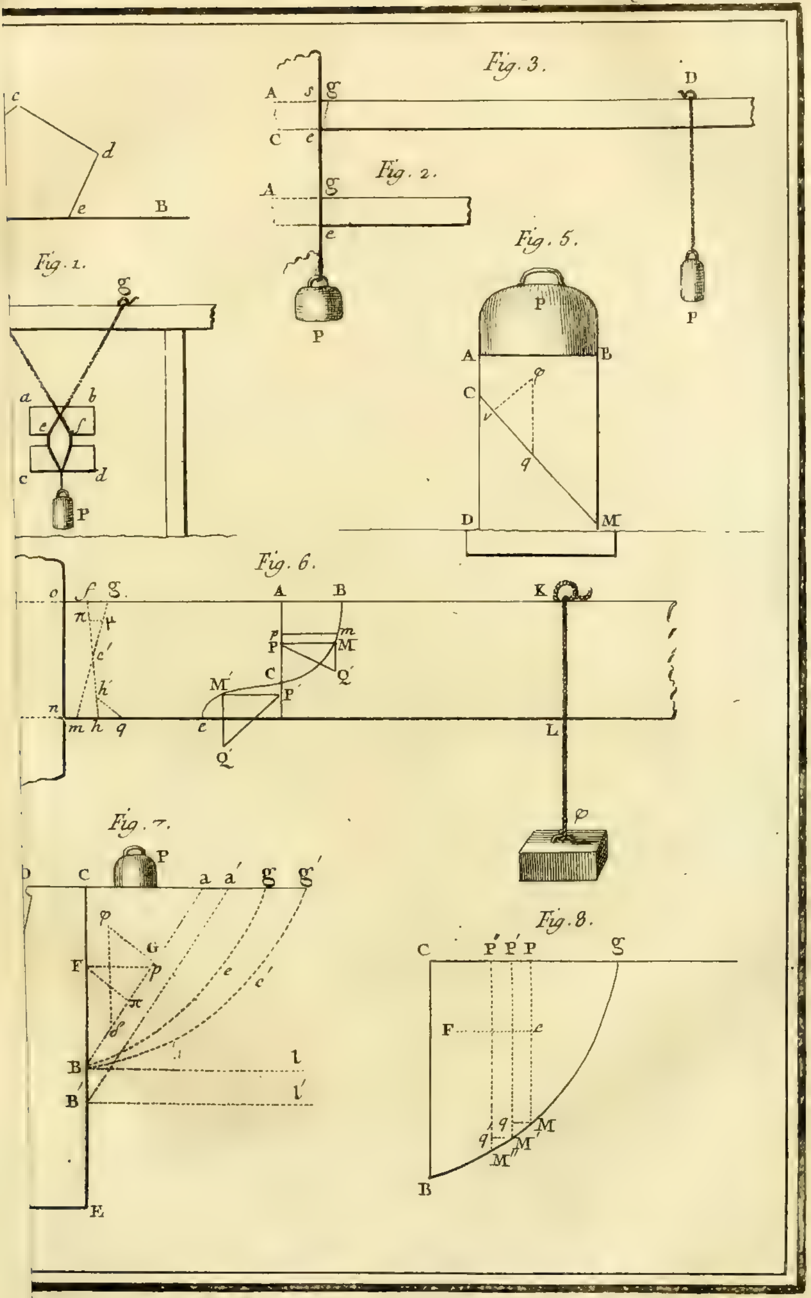
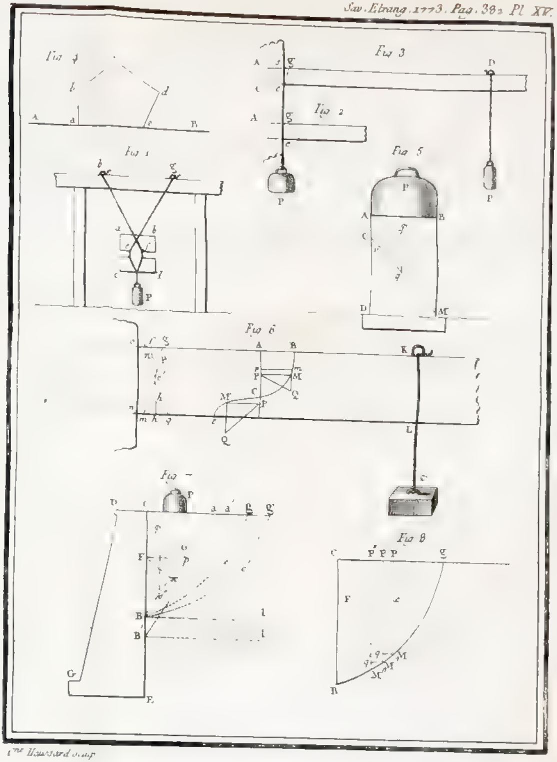


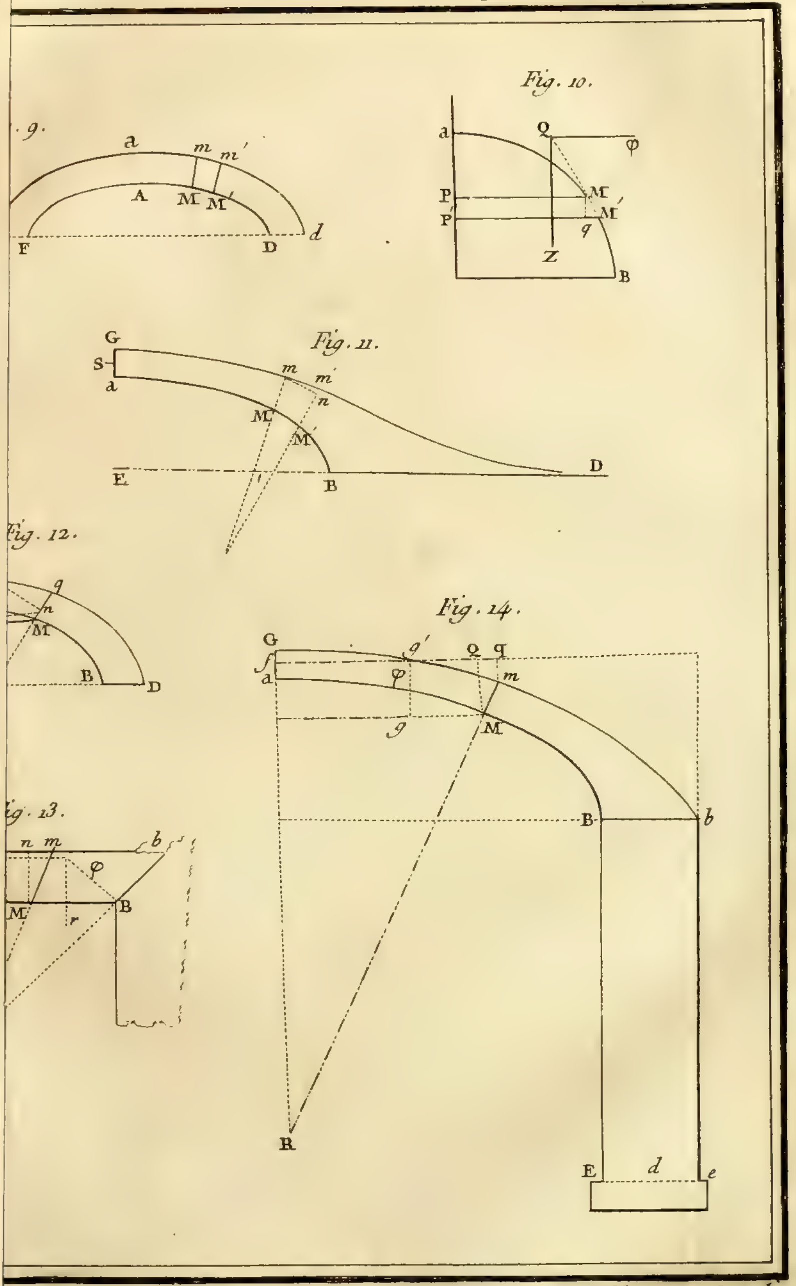
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

Pl. I

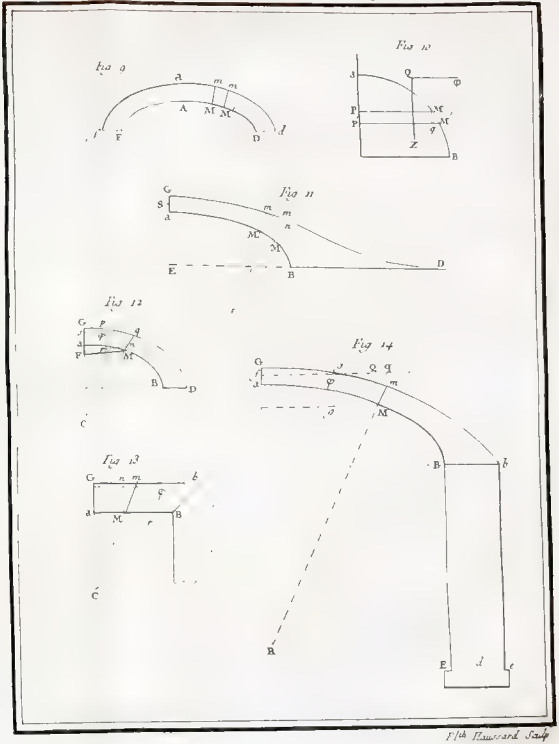
Sav. Etrang. 1773. Pag. 382 Pl. XV.



Cl. Haussard sculp.



Elth Haussard Sculp.



F.lle Haussard Sculp.

MÉMOIRE
SUR LA
THÉORIE DU JAUGEAGE,

Par M. DEZ, Professeur royal de Mathématiques
à l'École Royale Militaire.

I.

QUOIQUE l'objet de ce Mémoire ne demande que les principes les plus simples de la Géométrie, il mérite cependant l'attention des Géomètres par le choix des données dont on doit faire usage dans les calculs, & sur-tout par son importance dans la vie civile. On ne peut s'empêcher en effet, de convenir que les Jauges dont on se sert communément sont très-imparfaites: appliquées indistinctement à tous les vaisseaux, elles donneroient des erreurs considérables, parce qu'elles sont construites d'après une théorie inexacte. On a donc été obligé de les corriger par l'expérience, & de les modifier suivant les différentes espèces de vaisseaux que l'on s'est proposé de mesurer, ce qui a surchargé la pratique du Jaugeage d'un grand nombre de règles qui l'ont rendue difficile au point d'exiger un très-long apprentissage. Un inconvénient plus grand encore, est leur défaut de précision; les corrections que l'on a tirées de l'expérience supposent aux tonneaux une forme déterminée, & pour peu que ceux que l'on doit mesurer s'en écartent, on est exposé à se tromper; or, on sent combien les erreurs en ce genre peuvent être préjudiciables. Une méthode générale, simple & précise, d'avoir la capacité des vaisseaux, seroit donc fort utile. Depuis long-temps les Géomètres en ont fait l'objet de leurs recherches; mais leurs résultats diffèrent sensiblement entr'eux à cause de la différence des courbures qu'ils supposent aux douves des tonneaux; il seroit très-difficile de trouver cette courbure par l'expérience; il paroît même

impossible d'assujettir à une même équation celle de toutes les espèces de tonneaux : il ne reste ainsi d'autre parti à prendre, que de choisir parmi toutes les figures possibles, celle qui convient le mieux à la forme que les tonneaux affectent, d'en tirer une formule simple & commode dans la pratique, & de la comparer ensuite à l'observation ; car, si elle s'en écarte fort peu, en sorte que ces écarts soient du même ordre que les erreurs légères qu'il est impossible d'éviter dans la pratique, elle donnera une solution aussi complète qu'on puisse la desirer du Problème dont il est ici question. J'ose croire, d'après un grand nombre d'expériences, que la formule que je vais donner remplit ces conditions.

II.

Parmi toutes les figures que l'on a supposées jusqu'ici aux douves des tonneaux, celle que leur a donnée M. Camus me paroît s'éloigner le moins de la véritable. Cet Auteur *(Mém. de l'Acad. des Sc. ann. 1741, p. 385)* considère les tonneaux comme engendrés par la révolution *(fig. 1)* d'un arc de parabole mBM, terminé par les tangentes MF, mK, autour de l'axe Hh, les droites perpendiculaires MQ, mq, divisant les lignes HC & hC en deux parties égales : de-là, si l'on nomme b le diamètre BD du bouge ou du milieu ; f le diamètre FN du fond ou du bout ; l la longueur Hh, & m le rapport de la circonférence au diamètre, M. Camus trouve pour la solidité du tonneau, ou, ce qui revient au même, pour la quantité de fluide qu'il contient, l'expression (C), $ml\left(\frac{64b^2 + 37bf + 34f^2}{540}\right)$; ayant comparé cette formule aux résultats d'un grand nombre d'expériences faites sur des vaisseaux de toutes les espèces connues, elle y a toujours répondu avec la plus grande précision : mais comme le calcul en est assez compliqué, & qu'il est absolument impraticable pour les personnes chargées ordinairement de jauger les tonneaux, j'ai cherché à la rendre d'un usage très-facile, & c'est à quoi je suis parvenu de la manière suivante.

J'observe

J'obſerve pour cela que la différence du diamètre du bouge à celui du fond eſt ordinairement très-petite ; nommons donc α cette différence, en ſorte que l'on ait

$$\alpha = b - f, \text{ ou } f = b - \alpha.$$

En ſubſtituant donc cette valeur de f dans l'expreſſion *(C)*, j'ai trouvé qu'elle pouvoit ſe réduire, ſans erreur ſenſible, à la ſuivante

$$\tfrac{1}{4} ml.(b - \tfrac{3}{8}\alpha)^2, \text{ ou } (D), \tfrac{1}{4} ml. [\tfrac{b+f}{2} + \tfrac{1}{8}(b-f)]^2.$$

En effet, on trouvera facilement que la différence des deux formules *(C)* & *(D)* eſt ſeulement

$$\tfrac{1}{4} ml.(0{,}11122.\alpha - 0{,}02777.b).\alpha.$$

Si l'on ſuppoſe $\alpha = \frac{3}{10} b$, ce qui eſt le cas le plus défavorable que l'on puiſſe craindre, & ce qui eſt extrêmement rare, on trouvera que la différence eſt à peine $\frac{1}{500}$ de la capacité entière du tonneau, & comme la formule de M. Camus n'eſt pas rigoureuſe, il pourroit arriver que la nôtre approchât autant & même plus, de la vérité.

La formule *(D)* eſt très-ſimple & facile à calculer ; mais il faut la réduire en pratique, & conſtruire une jauge par ſon moyen ; c'eſt ce que l'on fera de cette manière.

III.

Conſtruction d'une nouvelle Jauge.

Pour conſtruire une jauge d'après la formule *(D)* ci-deſſus, il faut néceſſairement avoir deux échelles, dont l'une *(L)* *(fig. 2)* que je nomme *échelle des longueurs*, ſerve à meſurer l; l'autre *(d)* *(fig. 3)* que je nomme *échelle des diamètres*, ſerve à meſurer le facteur $\frac{1}{4} m . [\frac{b+f}{2} + \frac{1}{8}(b-f)]^2$, parce qu'alors, pour avoir le nombre de meſures que renferme un vaiſſeau, il ſuffira de multiplier l'un par l'autre les nombres donnés par les deux échelles. Or, b & f étant donnés (par les dimenſions d'un vaiſſeau quelconque) en pouces & lignes,

il s'agit de conſtruire une échelle qui repréſente

$$\frac{1}{4} m \cdot [\frac{b+f}{2} + \frac{1}{8} \cdot (b - f)]^2.$$

Conſidérons pour cela *(fig. 4)* le cylindre APC d'une meſure quelconque S, priſe pour unité de meſure, & ſuppoſant le diamètre $AP = a$, & la hauteur $NC = h$, on aura $S = \frac{1}{4} m h . a^2$. Préſentement, ſi l'on veut conſtruire une échelle, au moyen de laquelle le diamètre d'un cylindre quelconque dont la hauteur eſt h, étant donnée, on puiſſe déterminer ſur le champ le rapport de ſa ſolidité à S, il eſt plus ſimple de réſoudre le Problème inverſe ; c'eſt-à-dire de ſuppoſer la ſolidité connue, & de conſtruire une échelle au moyen de laquelle on puiſſe conclure le diamètre. Pour cela on formera *(fig. 3)* un angle droit APZ, tel que l'on ait $AP = a$. Soit $P\,1.^o = a = AP$, $P\,1.^o$ ſera le diamètre du cylindre dont la hauteur étant h, la ſolidité eſt S. Pour avoir le diamètre du cylindre, qui ayant une même hauteur, ait une ſolidité double, on tirera l'hypothénuſe $A\,1.^o$ & l'on prendra $P\,2.^o$ égal à $A\,1.^o$; alors $P\,2.^o$ ſera le diamètre de ce cylindre ; ce qui eſt viſible ; car les cylindres de même hauteur ſont comme les quarrés de leurs diamètres ; or, $(P\,2.^o)^2 : (P\,1.^o)^2 :: 2 : 1$; pareillement, ſi l'on tire l'hypothénuſe $A\,2.^o$, & que l'on prenne $P\,3.^o = A\,2.^o$; alors $P\,3^o$ ſera le diamètre du cylindre triple ; ſi l'on tire de même l'hypothénuſe $A\,3.^o$, & que l'on prenne $P\,4.^o = A\,3.^o$, $P\,4.^o$ ſera le diamètre d'un cylindre quadruple, &c. & ainſi de ſuite.

Pour trouver maintenant les diamètres des cylindres égaux à un nombre fractionnaire de meſure S, plus grand ou moindre que l'unité, on s'y prendra de la manière ſuivante. Je ſuppoſe qu'il s'agiſſe de trouver le diamètre du cylindre égal à $(n + \frac{1}{q}) . S$; n & q étant des nombres entiers, ſur la droite $n^o\,(n+1)^o$ *(fig. 3)* comme diamètre, je décris la demi-circonférence $n^o M\,(n+1)^o$; je fais enſuite $n^o H$ égal à la $q.^{ième}$ partie de la droite $n^o\,(n+1)^o$, &

menant l'ordonnée HM, du point P comme centre, & du rayon PM, je décris un arc de cercle Mq, la droite Pq sera le diamètre du cylindre égal à $(n + \frac{1}{q}) . S$; j'omets ici la démonstration de cette construction, parce que les Géomètres la suppléeront aisément. Au reste, il me paroît plus commode, dans la pratique, de faire usage du calcul arithmétique, en observant que le diamètre d'un cylindre égal à $(n + \frac{1}{q}) . S$, est $a\sqrt{(n + \frac{1}{q})}$; c'est-à-dire (*fig. 3*) qu'on a en général

$$Pn^{o} = a\sqrt{(n)}, \ \& \ Pq = a . \sqrt{(n + \frac{1}{q})}.$$

I V.

Si l'on suppose $a = 14$ pouces, & $h = 2$ pouces & demi, on aura $S = 385$ pouces cubes, ce qui n'excède que d'un pouce cube le setier de Paris qui renferme huit pintes dont chacune est de 48 pouces cubes.

On peut donc, sans erreur sensible, en prenant le setier pour unité de mesure, faire $a = 14$ pouces, & $h = 2$ pouces & demi; ces dimensions m'ont paru plus commodes que toute autre pour construire une jauge conforme à l'usage reçu de compter par setiers dans la pratique.

Cela posé, on divisera un bâton $PZHD$, (*fig. 5*) de forme parallélipipède, de manière que sur une moitié RQ Jauge I. d'une de ses faces on marque des divisions égales d'un pouce, que je nomme *échelle* (p) *des pouces*, & on les subdivisera chacune en quatre, ou en un plus grand nombre de parties égales, si l'on veut une plus grande précision. On divisera l'autre moitié PQ de cette face suivant la méthode de l'*article précédent*, en sorte que la première P 1.° soit de 14 pouces; les autres divisions P2.°, P3.°, P4.°, &c. étant formées suivant la règle donnée dans cet article. On divisera P 1.°, 1.° 2.°, 2.° 3.°, 3.° 4.° &c. en autant de parties que l'on desirera, suivant le degré d'exactitude que l'on veut avoir. Au

moyen de cette échelle, que je nomme *échelle* (d) *des diamètres*; le diamètre d'un cylindre dont la longueur est de 2 pouces & demi, étant donné, on connoîtra facilement combien il renferme de setiers; puisqu'il suffira de regarder à quelle division de la droite *PZ* répond la longueur du diamètre mesuré sur la droite *NX*; mais si le cylindre proposé, au lieu d'avoir 2 pouces & demi de longueur, en a une quelconque, il faut, dans ce cas, construire sur la face *RH* de la jauge I (*fig. 5*) une échelle que je nomme *échelle* (L) *des longueurs*, dont chaque division soit de 2 pouces & demi: chacune de ces divisions étant elle-même subdivisée en autant de parties égales qu'on le desirera. Alors, pour mesurer un cylindre quelconque, il faudra, sur l'échelle des diamètres, voir à quel numéro répond celui du cylindre, & sur l'échelle des longueurs, voir à quel numéro répond celle de ce cylindre; on multipliera ensuite ces deux nombres l'un par l'autre, & le produit sera le nombre de setiers que renferme le cylindre. Il est facile, cela posé, de mesurer la solidité d'un tonneau quelconque, puisque la formule (*D*) de l'*article II*, réduit cette mesure à celle d'un cylindre qui a pour longueur celle du tonneau, & pour diamètre la moitié de la somme des diamètres du bouge & du fond, plus la huitième partie de leur différence.

Pour donner un exemple de cette méthode, je suppose que dans un tonneau le diamètre du bouge soit de 33 pouces & demi, que celui du fond soit de 28 pouces & demi, & que sa longueur soit de 42 pouces & demi, ou de 17^{o} parties de l'échelle des longueurs, on ajoutera 33 pouces & demi, & 28 pouces & demi; on prendra la moitié de la somme qui est 31, & si on y ajoute $\frac{5}{8}$, qui est $\frac{1}{8}$ de la différence de $33\frac{1}{2}$ à $28\frac{1}{2}$, on aura 31 pouces $\frac{5}{8}$; cherchant ensuite sur la jauge le numéro de l'échelle des diamètres, auquel 31 pouces $\frac{5}{8}$ (pris sur l'échelle des pouces) répond, on trouvera que ce numéro est $5\frac{1}{10}$; multipliant donc $5\frac{1}{10}$ par 17, on aura $86\frac{7}{10}$ setiers, ou 693 pintes & demie, pour la quantité de liqueur contenue dans le tonneau.

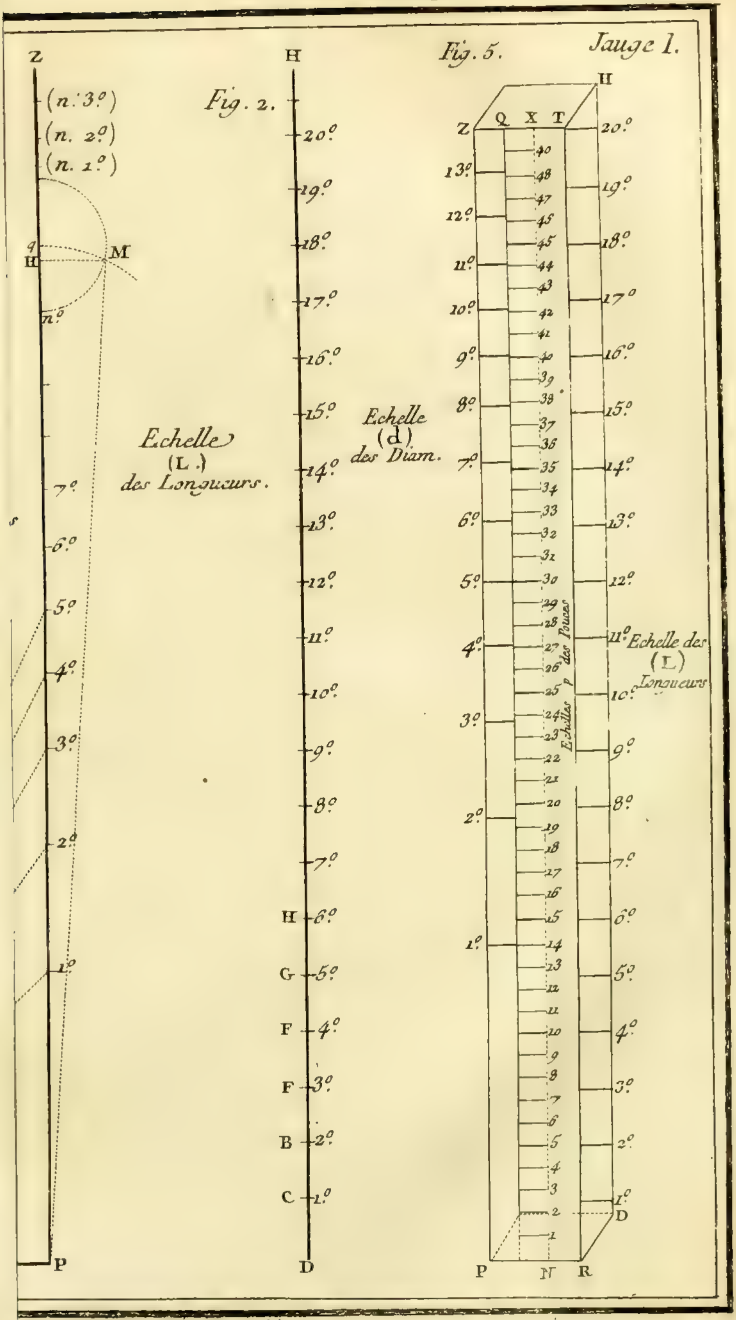
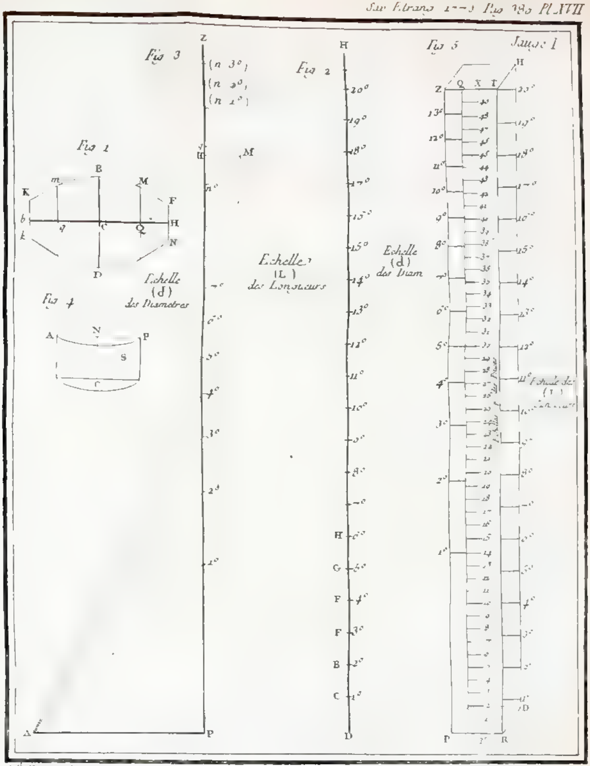


Fig. 2.
Fig. 5.
Jauge 1.
Echelle (L.) des Longueurs.
Echelle (d) des Diam.
Echelles des Pouces
Echelle des (L) Longueurs
(n. 3.°)
(n. 2.°)
(n. 1.°)
M
Z
H
D
P
Q
X
T
N
R



L. th Haus ... sculp.

Telle eſt la nouvelle méthode de jauger les vaiſſeaux, que je propoſe de ſubſtituer à celles qui ſont en uſage : elle eſt, ſi je ne me trompe, beaucoup plus générale & plus ſimple ; puiſqu'elle ne demande à être modifiée dans aucun cas. J'oſe croire, d'ailleurs, qu'elle eſt infiniment plus exacte, comme je m'en ſuis aſſuré par un grand nombre d'expériences, dont pluſieurs ont été faites ſous les yeux de M.rs les Commiſſaires de l'Académie : du reſte, l'importance de la matière exige qu'on vérifie encore cette jauge ſur un plus grand nombre de vaiſſeaux, & ſi elle ne ſe dément ſur aucuns, comme j'ai très-lieu de le préſumer, je me ſaurai gré de m'être livré à cette recherche, peu brillante en elle-même, mais utile à la ſociété.

RÉFLEXIONS SUR UN TOUR DE CARTES.

Par M. MONGE, Professeur royal de Mathématique & de Physique, à l'École du Génie.

UN des tours de cartes les plus usités est celui dans lequel on vous présente un jeu composé d'un certain nombre de cartes, en vous proposant d'en prendre une, de la remarquer, & de la remettre dans le jeu; on mêle alors les cartes, & après un certain nombre de permutations, celui qui fait le tour devine la carte remarquée. Il y a différens moyens d'y parvenir, mais tous consistent à mêler les cartes de manière que l'on puisse facilement trouver la place de celle qu'il s'agit de deviner. Parmi ces moyens, il y en a qui demandent de l'adresse, d'autres sont fondés sur des tromperies à peu-près du genre de celle-ci; on peut, par exemple, avoir une carte dans le jeu qui soit un peu plus longue, ou un peu plus large que les autres, présenter le jeu, lorsqu'on y remet la carte remarquée, de manière qu'elle se trouve immédiatement avant ou après celle qui est la plus grande, & qui sert d'indice, & mêler assez peu les cartes pour que celle que l'on veut deviner ne quitte pas l'indice qui servira à la faire connoître; mais ces artifices sont grossiers & ne méritent pas qu'on s'en occupe.

On peut avoir remarqué, d'après l'expérience (& nous nous proposons de démontrer cette propriété des changemens d'ordre) que si l'on mêle un jeu, composé d'un nombre quelconque de cartes, de manière que la seconde se place sur la première, la troisième dessous, la quatrième dessus, la cinquième dessous, la sixième dessus, &c. & ainsi de suite; qu'après avoir achevé ce battement, on en recommence un pareil, après celui-ci un troisième, & ainsi de suite, on parvient à remettre les cartes dans le même ordre qu'elles

étoient auparavant. Cette réflexion faite, il eſt facile de reconnoître que ſi l'on ſait quel rang tenoit dans le jeu la carte remarquée, & le nombre de permutations qu'il faut faire pour que les cartes ſe retrouvent dans le même ordre, il ſera très-aiſé de deviner la carte, & s'il ſe trouve alors quelque difficulté dans le tour, elle ne conſiſtera que dans la manière adroite de compter promptement, lorſqu'on remet la carte dans le jeu, quel rang elle y tient.

Il s'agit donc de démontrer ici, 1.° qu'après un certain nombre de permutations, comme celles que nous venons de définir, un jeu, compoſé d'un nombre quelconque de cartes, doit ſe retrouver dans le même ordre qu'il étoit auparavant; 2.° de trouver combien on doit battre de fois un jeu compoſé d'un nombre quelconque de cartes, pour qu'elles ſe retrouvent dans le même ordre.

Pour cela, ſoit un nombre quelconque de cartes, par exemple 14, & placées dans le jeu ſuivant l'ordre

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14;

on reconnoîtra aiſément qu'après la première permutation elles ſeront dans l'ordre ſuivant

A 14. 12. 10. 8. 6. 4. 2. 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13;

après la ſeconde permutation, dans l'ordre

B 13. 9. 5. 1. 4. 8. 12. 14. 10. 6. 2. 3. 7. 11;

après la troiſième permutation, dans l'ordre

C 11. 3. 6. 14. 8. 1. 9. 13. 5. 4. 12. 10. 2. 7,

& ainſi de ſuite.

Cela poſé, je dis que ſi l'on met les uns ſous les autres, les ordres dans leſquels doivent ſe trouver les cartes après toutes les permutations ſucceſſives, les nombres qui ſe trouvent dans chaque colonne verticale, ſeront les mêmes, & dans le même ordre, avec cette différence cependant que les colonnes ne commenceront pas par le même numéro: voici, en effet, toutes les permutations poſſibles d'un jeu compoſé de 14 cartes:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
A	14.	12.	10.	8.	6.	4.	2.	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.
B	13.	9.	5.	1.	4.	8.	12.	14.	10.	6.	2.	3.	7.	11.
C	11.	3.	6.	14.	8.	1.	9.	13.	5.	4.	12.	10.	2.	7.
D	7.	10.	4.	13.	1.	14.	3.	11.	6.	8.	9.	5.	12.	2.
E	2.	5.	8.	11.	14.	13.	10.	7.	4.	1.	3.	6.	9.	12.
F	12.	6.	1.	7.	13.	11.	5.	2.	8.	14.	10.	4.	3.	9.
G	9.	4.	14.	2.	11.	7.	6.	12.	1.	13.	5.	8.	10.	3.
&c.	3.	8.	13.	12.	7.	2.	4.	9.	14.	11.	6.	1.	5.	10.
	10.	1.	11.	9.	2.	12.	8.	3.	13.	7.	4.	14.	6.	5.
	5.	14.	7.	3.	12.	9.	1.	10.	11.	2.	8.	13.	4.	6.
	6.	13.	2.	10.	9.	3.	14.	5.	7.	12.	1.	11.	8.	4.
	4.	11.	12.	5.	3.	10.	13.	6.	2.	9.	14.	7.	1.	8.
	8.	7.	9.	6.	10.	5.	11.	4.	12.	3.	13.	2.	14.	1.
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.

Or, un numéro quelconque de la permutation *B*, ne ſe trouve ſous celui qui eſt dans la même colonne verticale dans la permutation *A*, que parce que le même numéro, dans la permutation *A*, ſe trouve ſous le même, dans le premier ordre; le n.° 5, par exemple, ne ſe trouve ſous 10 dans *A*, que parce que 5 dans *A*, ſe trouve ſous 10 dans le premier ordre; de même, le n.° 11, dans *E*, ſe trouve ſous 13 dans *D*, parce 11 dans *D*, ſe trouve ſous 13 dans *C*; en effet, ſi une carte du premier ordre prend un certain rang dans la permutation *A*, il faut néceſſairement que celle qui occupe dans la permutation *A*, le même rang qu'elle occupoit dans le premier ordre, tienne dans la permutation *C*, le même rang qu'elle occupe dans *A*. Ainſi, dans toutes les colonnes verticales, le même numéro ſe trouve précédé & ſuivi par les mêmes numéros; donc, les nombres qui compoſent chaque colonne ſont les mêmes, & dans le même ordre. Par conſéquent, lorſqu'après un certain nombre de permutations, on ſera parvenu à avoir le n.° 1 dans la première colonne verticale, on aura 2 dans la ſeconde, 3 dans la troiſième, 4 dans la quatrième, &c. c'eſt-à-dire, que les cartes ſe retrouveront dans le même ordre qu'en commençant.

Il ne

Il ne s'agit donc plus que de démontrer que le n.° 1 doit revenir dans la première classe : or, cela est évident, puisqu'il est en tête de la colonne, & qu'il est, par conséquent, un des numéros de la suite qui compose chaque colonne.

COROLLAIRES.

I. Donc, après un certain nombre de permutations, comme celles que nous avons définies, de quelque nombre de cartes qu'un jeu soit composé, il doit se reproduire dans le même ordre qu'il étoit auparavant.

II. Le nombre des permutations qu'il faut faire pour qu'un jeu de cartes se reproduise dans le même ordre, ne peut pas excéder le nombre des cartes qui composent le jeu; car, ce nombre est le même que celui des numéros différens qui composent une colonne verticale; & le nombre de ces numéros ne peut pas excéder celui des cartes.

REMARQUES.

Lorsque le nombre des cartes est impair, la dernière ne change pas de rang, après quelque nombre de permutations que ce soit; c'est-à-dire, que dans chaque permutation elle reste toujours la dernière. Qu'on examine, en effet, le rang qu'occupent les cartes après la permutation *A*, & on remarquera que toutes celles dont le rang étoit pair se trouvent les premières, & celles dont le rang étoit impair, les dernières; mais de manière que celles-ci forment la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. & que la dernière carte de chaque permutation est toujours celle qui occupoit le dernier rang impair dans la permutation précédente.

Donc, lorsque le nombre des cartes qui composent le jeu est impair, la dernière carte ne fait aucun effet dans le changement d'ordre qui arrive parmi les autres, après chaque permutation; ainsi, le nombre des permutations qu'il faut faire, pour qu'un jeu composé d'un nombre impair de cartes se reproduise tel qu'il étoit, est le même que celui qui convient à un jeu composé du nombre pair, immédiatement

inférieur. Par conſéquent, toutes les recherches qu'on peut faire là-deſſus ſe réduiſent à trouver les nombres de permutations qui conviennent à tous les jeux compoſés de nombres pairs de cartes.

Nous avons vu que le nombre de permutations étoit égal au nombre des numéros qui compoſent chaque colonne, ou, plus ſimplement, la première; donc, ſi l'on parvient à compoſer la ſuite de ces numéros, on connoîtra aiſément le nombre de permutations demandées: or, ſoit la ſuite des cartes dans le premier ordre, & après la première permutation

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14.
A 14. 12. 10. 8. 6. 4. 2. 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13.

13. On trouvera que le nombre 13 doit être le ſecond terme
11. de la ſuite, parce qu'il ſe trouve ſous 14, dans *A*; que de
7. même, 11 doit être le troiſième, parce qu'il ſe trouve ſous
2. 13, dans *A*; Pareillement, 7 le quatrième, parce qu'il ſe
12. trouve ſous 11 dans *A*; Par la même raiſon, 2 le cinquième,
9. parce qu'il eſt ſous 7 dans *A*, & ainſi de ſuite, continuant
3. 10. juſqu'à ce qu'on parvienne au n.° 1, & le nombre des
termes de la ſuite ſera celui des permutations. Or, m étant
5. 6. le nombre des cartes du jeu, il eſt facile de remarquer que
4. ſous un numéro dont le rang, dans le premier eſt $\frac{m}{2} + 1$,
8. 1. eſt 1; ſous celui dont le rang eſt $\frac{m}{2} + 2$, eſt 3; ſous celui
dont le rang eſt $\frac{m}{2} + 3$, eſt 5; ou que l'on aura les ſuites correſpondantes

$$\frac{m}{2} + 1,\ \frac{m}{2} + 2,\ \frac{m}{2} + 3,\ \frac{m}{2} + 4,\ \frac{m}{2} + 5, \text{\&c.}$$
$$1 \qquad 3 \qquad 5 \qquad 7 \qquad 9, \text{\&c.}$$

d'où l'on conclura facilement que le numéro qui doit ſe trouver dans *A*, ſous un rang quelconque $\frac{m}{2} + n$, (n étant un nombre quelconque) doit être le $n.^{ième}$ terme de la progreſſion arithmétique 1, 3, 5, 7, 9, &c. ou $1 + 2(n + 1)$,

ou $2n - 1$; donc, dans la première colonne, après un numéro $= \frac{m}{2} + n$, doit ſuivre le numéro $= 2n - 1$. Cette formule ne peut ſervir que pour les numéros qui ſurpaſſent la moitié du nombre des cartes; mais on obſervera que ſous un numéro, dont le rang dans le premier ordre eſt $\frac{m}{2} - 1$, ſe trouve le n.° 4; ſous celui dont le rang eſt $\frac{m}{2} - 2$, eſt 6; ſous celui dont le rang eſt $\frac{m}{2} - 3$, ſe trouve 8 ... &c. ce qui donne des ſuites correſpondantes

$$\left[\begin{array}{l} \ldots \frac{m}{2} - 4 . \frac{m}{2} - 3 . \frac{m}{2} - 2 . \frac{m}{2} - 1 . \frac{m}{2} - 0 . \\ \ldots\ldots\ldots 10 \ldots\ldots\ldots 8 \ldots\ldots\ldots 6 \ldots\ldots\ldots 4 \ldots\ldots\ldots 2 . \end{array} \right]$$

d'où l'on conclura que le n.° qui doit ſe trouver dans *A*, ſous un rang $\frac{m}{2} - n$, doit être le $n^{ième}$ terme de la progreſſion 4, 6, 8, 10, &c. & par conſéquent

$$= 4 + 2(n - 1) = 2(n + 1).$$

Donc, dans la première colonne, après un numéro $\frac{m}{2} - n$, doit ſuivre le n.° $2(n + 1)$. Donc, en général, ſous un n.° $= \frac{m}{2} \pm n$ doit ſe trouver le numéro $\left\{ \begin{array}{l} 2n - 1. \\ 2(n + 1); \end{array} \right.$ d'où il ſuit qu'il ſera facile de compoſer la première ſuite, & par conſéquent de déterminer le nombre des permutations.

EXEMPLE.

Soit propoſé de trouver le nombre de fois qu'on doit mêler un jeu compoſé de 20 cartes, pour que les cartes ſe retrouvent dans le même ordre qu'elles étoient. On compoſera la ſuite dont le premier terme doit être 20 (nombre des cartes); *n* dans 20 étant $= 10$, le ſecond terme ſera $20 - 1 = 19$; dans 19, *n* étant $= 9$, le troiſième terme ſera $18 = 1 + 17$; dans 17, *n* étant $= 7$, le

quatrième terme ſera 13; de la même manière on trouvera que la ſuite qui doit, par le nombre de ſes termes, indiquer celui des permutations, ſera

20, 19, 17, 13, 5, 12, 3, 16, 11, 1;

le nombre des permutations demandées ſera donc 10.

C'eſt par cette méthode qu'on a calculé la table ſuivante.

Nombre des cartes.	*Nombre des permutations.*	*Nombre des cartes.*	*Nombre des permutations.*
2	2.	28	9.
4	3.	30	30.
6	6.	32	6.
8	4.	34	22.
10	6.	36	9.
12	10.	38	30.
14	14.	40	27.
16	5.	42	8.
18	18.	44	11.
20	10.	46	10.
22	12.	48	24.
24	21.	50	50.
26	26.	52	12.

Il faut obſerver qu'il y a tel nombre de cartes, d'où il réſulte qu'une certaine d'entre elles conſerve le même rang dans toutes les permutations : ſoient par exemple, écrits de ſuite le premier ordre, & les permutations ſucceſſives d'un jeu compoſé de dix cartes, on aura

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.
10. 8. 6. 4. 2. 1. 3. 5. 7. 9.
9. 5. 1. 4. 8. 10. 6. 2. 3. 7.
&c. &c.

On voit que la quatrième carte ne change pas d'ordre dans tous les battemens; cette propriété peut être d'un grand uſage dans le tour, parce que ſi la carte remarquée ſe trouve être la quatrième du jeu elle reſtera toujours la quatrième, après un nombre quelconque de battemens (on ſuppoſe

toujours ici que le nombre total des cartes ſoit 10). Le nombre 10 n'eſt peut-être pas le ſeul qui jouiſſe de cet avantage; pour le découvrir, & reconnoître en même-temps tous ceux qui peuvent en jouir de même; ſoit m le nombre des cartes, & x le numéro de la carte fixe dans le jeu, & ſuppoſons 1.° que cette carte ſe trouve dans la première moitié du jeu, on aura $x = \frac{m}{2} - n$, & parce que le numéro inférieur doit être égal au ſupérieur, on aura

$$\frac{m}{2} - n = 2(n + 1);$$

d'où l'on tirera $x = \frac{m + 2}{3}$.

Comme le numéro de la carte ne peut pas être un nombre rompu, il ſuit que la propriété dont nous venons de parler aura lieu toutes les fois que le nombre m des cartes ſera tel qu'en y ajoutant 2 il devienne multiple de 3, & le numéro de la carte ſera égal au nombre de fois qu'il ſera multiple. Or il eſt aiſé de remarquer (les nombres impairs ne pouvant d'ailleurs pas convenir à m) que les différens nombres qu'on doit trouver pour m doivent être en progreſſion arithmétique, ayant 6 pour différence; de plus, 4 eſt une des valeurs de m; car $\frac{4 + 2}{3} = 2$: donc, tous les termes de la ſuite

4. 10. 16. 22. 28 34. 40. 46.... &c.

dont la différence eſt 6, ſont tels que ſi l'un d'entr'eux eſt le nombre des cartes d'un jeu, la carte dont le rang dans le jeu eſt exprimé par le terme correſpondant de la ſuite

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16.... &c.

ne changera pas de place après un nombre quelconque de permutations.

Mais ceci ſuppoſe, comme nous l'avons dit, que la carte fixe doit ſe trouver dans la première moitié du jeu; voyons s'il ſeroit poſſible qu'elle ſe trouvât dans la ſeconde; x ſeroit pour lors $= \frac{m}{2} + n$, & parce que dans deux permutations

confécutives les numéros de la carte doivent être égaux, on aura

$$\frac{m}{2} + n = 2n - 1;$$

ce qui donne

$$x = m + 1;$$

c'eſt-à-dire que ſi l'on ajoute une carte au jeu, ou que le nombre des cartes ſoit impair, cette dernière carte occupera toujours le dernier rang, après un nombre quelconque de battemens; ce que nous avions déjà remarqué.

Il eſt encore une autre ſingularité dans le jeu: ſoient écrites de ſuite toutes les permutations conſécutives d'un jeu de douze cartes,

		*					*				
1...	2...	3...	4...	5...	6...	7...	8...	9...	10...	11...	12.
12...	10...	8...	6...	4...	2...	1...	3...	5...	7...	9...	11.
11...	7...	3...	2...	6...	10...	12...	8...	4...	1...	5...	9.
9...	1...	8...	10...	2...	7...	11...	3...	6...	12...	4...	5.
&c.											&c.

On remarquera que dans chaque permutation les cartes indiquées par 8 & 3 prennent alternativement la même place; c'eſt-à-dire la troiſième celle de la huitième, & la huitième celle de la troiſième. Cette propriété peut encore avoir ſon uſage dans le jeu; car ſi la carte remarquée ſe trouve être à la troiſième ou huitième place, elle ſe trouvera toujours, après un nombre quelconque de permutations, à la troiſième ou huitième place, & pour la reconnoître il ſuffira de ſavoir ſi le nombre des permutations eſt pair ou impair. Or, voici comment nous allons découvrir quels ſont avec 12 les nombres de cartes qui donneront la même ſingularité.

Soient x & x' les numéros des cartes qui ſe ſuccèdent alternativement, & ſuppoſons que de ces deux cartes l'une ſoit dans la première moitié du jeu, ce ſera x, & l'autre x' dans la ſeconde moitié. Nous aurons, en raiſonnant comme ci-devant, les deux équations

$$x' = 2\left(\frac{m}{2} - x + 1\right) = m - 2x + 2$$

$$x = 2\left(x' - \frac{m}{2}\right) - 1 = 2x' - m - 1;$$

d'où l'on tirera

$$x = \frac{m+3}{5},$$

&

$$x' = \frac{3m+4}{5};$$

mais les valeurs de x & x' qui indiquent les rangs des cartes qui ſe ſuccèdent mutuellement ne peuvent pas être des nombres rompus; donc, toutes les fois que m ſera tel que les quantités $\frac{m+3}{5}$ & $\frac{3m+4}{5}$ ſeront des nombres entiers; ces nombres indiqueront les rangs de deux cartes qui ſe ſuccèderont dans chaque permutation. Or, tous les nombres compris dans la formule $\frac{m+3}{5}$ ſont

2. 12. 22. 32. 42. 52... &c.

& tous les nombres compris dans la formule $\frac{3m+4}{5}$ ſont

2. 12. 22. 32. 42. 52... &c.

Donc, tous les nombres compris dans cette ſuite jouiſſent de la même propriété, & les numéros des cartes qui ſe ſuccèdent pour chaque nombre, & qui ſont indiqués par les quotiens des quantités $m + 3$ & $3m + 4$, diviſé par 5, ſont exprimés dans la table ſuivante:

Nombre des cartes du jeu.	*Numéros des cartes qui ſe ſuccèdent.*
2	1 & 2.
12	3 & 8.
22	5 & 14.
32	7 & 20.
42	9 & 26.
52	11 & 32.
&c.	&c. &c.

Il eſt aiſé de continuer cette Table, parce que les deux ſuites ſont en progreſſions arithmétiques, dont la différence eſt 2 pour la première & 6 pour la ſeconde; ce qui eſt évident par les formules.

Nous avons ſuppoſé que les cartes qui devoient ſe ſuccéder fuſſent dans chaque moitié du jeu; voyons s'il ſeroit poſſible qu'elles ſe trouvaſſent dans la même moitié, & 1.° dans la première, on auroit

$$x' = 2\left(\frac{m}{2} - x + 1\right) = m - 2x + 2,$$

&

$$x = 2\left(\frac{m}{2} - x' + 1\right) = m - 2x' + 2,$$

ce qui donneroit

$$x = \frac{m+2}{3},$$

&

$$x' = \frac{m+2}{3}, \text{ \& par conséquent } x = x';$$

d'où il ſuit qu'il n'eſt pas poſſible que les deux cartes puiſſent être différentes dans la première moitié, mais que la même carte peut ſe ſuccéder; ce que nous ſavions déjà. La formule $\frac{m+2}{3}$ eſt d'ailleurs la même que celle que nous avons déjà trouvée.

On trouveroit de même qu'il n'eſt pas poſſible que deux cartes priſes dans la ſeconde moitié du jeu, puiſſent ſe ſuccéder.

De même que nous avons trouvé qu'il y a certains nombres de cartes, tels qu'une d'entre elles occupe toujours le même rang, ou que deux ſe ſuccèdent toujours après un nombre quelconque de permutations, dans certains jeux trois cartes ſe ſuccèdent continuellement, de même 4, 5, 6, &c. Nous allons en donner un exemple. Soient écrits de ſuite les différentes permutations d'un jeu compoſé de 22 cartes:

1. 2.

1	2 ❋	3 *	4	5 ✠	6	7	8 ⚘	9	10 ❋	11	12	13 *	14 ✠	15	16	17 ❋	18 *	19	20 ❋	21	22
22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
21	17	13	9	5	1	4	8	12	16	20	22	18	14	10	6	2	3	7	11	15	19
19	11	3	6	14	22	16	8	1	9	17	21	13	5	4	12	20	18	10	2	7	15
15	2	18	12	5	21	9	8	22	6	11	19	3	14	16	1	17	13	4	20	10	7
7	20	13	1	14	19	6	8	21	12	2	15	18	5	9	22	11	3	16	17	4	10
10	17	3	22	5	15	12	8	19	1	20	7	13	14	6	21	2	18	9	11	16	4
&c.																					&c.

On remarquera 1.° que parce que le nombre 22 eſt compris dans chacune des ſuites

4. 10. 16. 22. 28. 34. 40. 46. . . . &c.

&

2. 12. 22. 32. 42. 52. . . . . &c.

2.° Une des cartes, ſavoir la huitième, ne doit pas changer de place; 3.° les deux cartes 5 & 14 doivent ſe ſuccéder mutuellement, mais de plus, les trois cartes 3, 18 & 13 ſe ſuccèdent, il en eſt de même des quatre cartes 2, 20, 17, 11; & comme les cartes qui ſe ſuccèdent ne doivent pas entrer dans la première colonne, il eſt évident que leur nombre retranché de celui des cartes du jeu, doit indiquer le nombre des permutations qu'il faut faire pour que le jeu ſe reproduiſe dans le même ordre; il ne ſera donc pas inutile, pour l'intelligence de la matière, de trouver les nombres de cartes qui doivent donner ſucceſſivement 2, 3, 4, 5, &c. cartes qui ſe ſuccèdent mutuellement. Cherchons premièrement quels ſont ceux dans leſquels trois cartes ſe ſuccèdent. Pour cela ſoient écrits de ſuite les trois premiers ordres d'un nombre quelconque (22 par exemple)

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. ‖ 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22.
22. 20. 18. 16. 14. 12. 10. 8. 6. 4. 2. ‖ 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.
21. 17. 13. 9. 5. 1. | 4. 8. 12. 16. 20. ‖ 22. 18. 14. 10. 6. 2. | 3. 7. 11. 15. 19.

Cela poſé, cherchons comment les termes de la troiſième ſuite dépendent de ceux de la première; & pour y parvenir, remarquons qu'elle eſt elle-même compoſée de quatre ſuites de nombres, de deux de pairs & de deux d'impairs, & que ces

ſuites partielles ſont autant de progreſſions arithmétiques dont la différence eſt 4; on aura donc un terme quelconque de la première (qui commence par 21) le rang de ce terme étant n, ou le nombre qui lui répond dans le premier ordre étant n, par cette formule $m - 1 - 4(n - 1)$. De même on aura un terme quelconque de la ſeconde ſuite partielle, n étant le nombre qui lui répond, dans le premier ordre par cette formule

$$m - 2 - 4\left(\frac{m}{2} - n\right),$$

pour la troiſième ſuite partielle

$$m - 4\left(n - \frac{m}{2} - 1\right),$$

& pour la quatrième

$$m - 3 - 4(m - n).$$

Après le troiſième battement le jeu ſe trouve donc partagé en quatre caſes, compoſées chacune d'une des ſuites dont nous venons de parler: or, il peut arriver que l'un des rangs que doivent occuper continuellement les trois cartes qui ſe ſuccèdent, ſoit, ou ne ſoit pas compris dans la première caſe; s'il y eſt compris, dans leurs trois numéros il y en aura néceſſairement un pair & un impair, comme on peut le voir par l'inſpection des colonnes verticales; mais le troiſième pourra être pair ou impair. 1.° Suppoſons qu'il doive être impair, & ſoient x, x' & x'', ces trois numéros x & x'' ſeront donc des nombres impairs, & les trois arrangemens de ces numéros ſeront

$$x \quad x' \quad \& \quad x''$$
$$x' \quad x'' \quad \& \quad x$$
$$x'' \quad x \quad \& \quad x';$$

or le ſecond arrangement finiſſant par un impair, ne pourra ſe trouver que dans la quatrième caſe, & le troiſième ayant au milieu un nombre impair ne pourra être compris que dans la troiſième; on aura donc par les formules que nous venons de trouver les trois équations ſuivantes,

$$x'' = m - 1 - 4(x - 1) = m - 4x + 3$$
$$x = m - 3 - 4(m - x') = 4x' - 3m - 3$$
$$\& \; x' = m - 4\left(x'' - \frac{m}{2} - 1\right) = 3m + 4 - 4x'';$$

d'où l'on tirera $x = \frac{7m+35}{63} = \frac{m+5}{9}$

$$x' = \frac{49m+56}{63} = \frac{7m+8}{9},$$

& $x'' = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{5m+7}{9}.$

Donc (puisque m ne peut être qu'un nombre entier & pair, & que x, x' & x'' ne peuvent être que pairs) toutes les fois que m sera un nombre entier & pair, tel que les quantités $m+5$, $7m+8$, & $5m+7$ soient multiples de 9, trois cartes se succéderont mutuellement, & deux de ces trois cartes occuperont dans le premier ordre un rang impair. Or les nombres compris dans les formules

$\frac{m+5}{9}$, $\frac{5m+7}{9}$, $\frac{7m+8}{9}$ sont
- 4. 13. 22. 31. 40. 49. 58. 67. 76. 85. 94. 103... &c.
- 4. 13. 22. 31. 40. 49. 58. 67.................. &c.
- 4. 13. 22. 31. 40........................... &c.

Donc, tous les termes pairs de cette suite jouissent de la propriété demandée, & les quotiens des quantités $m+5$, $5m+7$, $7m+8$, divisées par 9, indiquent les numéros des cartes qui se succèdent; c'est sur ce principe qu'a été calculée la Table suivante.

Nombre des cartes du jeu.	*Numéros des cartes qui se succèdent 3 à 3 (2 étant impairs).*		
4	1	3	4.
22	3	13	18.
40	5	23	32.
58	7	33	46.
76	9	43	60.
94	11	53	74.
&c.	&c.	&c.	&c.

Il eſt facile de continuer cette Table, parce que les ſuites qui la compoſent ſont des progreſſions arithmétiques, comme il eſt aiſé de le reconnoître par l'inſpection des formules.

Nous avons vu que des trois numéros qui ſe ſuccèdent, il doit y en avoir néceſſairement un pair & l'autre impair, mais que le troiſième peut être pair ou impair; nous venons d'examiner le cas où ce troiſième eſt impair, traitons maintenant celui où il eſt pair. Conſervons toujours aux trois numéros leurs caractères x, x' & x'', (x & x' étant des nombres pairs) leurs trois arrangemens ſeront

$$x \quad x' \quad \& \quad x''$$
$$x' \quad x'' \quad \& \quad x$$
$$x'' \quad x \quad \& \quad x';$$

or, le ſecond arrangement finiſſant par un nombre pair, mais ayant un impair dans le milieu, ne peut ſe trouver que dans la troiſième caſe, & le troiſième arrangement finiſſant par deux pairs, ne peut ſe trouver que dans la ſeconde caſe. On aura donc, par le moyen des formules que nous avons trouvées plus haut,

$$x'' = m - 1 - 4\ (x - 1) = m - 4x + 3,$$
$$x = m - 4\left(x' - \frac{m}{2} - 1\right) = 3m - 4x' + 4,$$
&
$$x' = m - 2 - 4\left(\frac{m}{2} - x''\right) = 4x'' - m - 2;$$
ce qui donne

$$x = \frac{m+4}{7},$$
$$x' = \frac{5m+6}{7},$$
&
$$x'' = \frac{3m+5}{7}.$$

Donc, lorſque m ſera un nombre pair, tel que les quantités $m + 4$, $5m + 6$, $3m + 5$ ſeront des multiples de 7,

trois cartes ſe ſuccèderont mutuellement, & deux d'entre elles ſeront paires. Les différentes valeurs de m & les numéros des cartes qui ſe ſuccèdent ſont compris dans la Table ſuivante.

Nombre des cartes du jeu.	*Numéros des cartes qui ſe ſuccèdent* (un ſeul devant être impair).
10	2..... 5..... 8.
24	4.....11.....18.
38	6.....17.....28.
52	8.....23.....38.
66	10.....29.....48.
80	12.....35.....58.
94	14.....41.....68.
108	16.....47.....78.

Tout ce que nous avons dit juſqu'à préſent ſur la ſucceſſion de trois cartes, ſuppoſe qu'un de leurs arrangemens ſoit compris dans la première caſe; voyons maintenant s'il eſt poſſible que le premier arrangement ſoit dans la ſeconde caſe. Que l'on jette les yeux ſur les différentes permutations pour le nombre 22 que nous avons données plus haut, & l'on verra que l'arrangement compris dans la ſeconde caſe doit néceſſairement comprendre deux nombres pairs, le troiſième pouvant être pair ou impair. Dans le premier cas, il eſt facile de reconnoître à l'inſpection, que pour que la ſucceſſion eût lieu, il faudroit que les trois arrangemens ſe trouvaſſent dans la même caſe, puiſqu'il n'y a qu'elle qui puiſſe avoir trois nombres pairs dans la même colonne verticale, ce qui donneroit $x = x' = x''$.

Dans le ſecond cas, où un des numéros eſt impair, il faut obſerver qu'aucun de leurs arrangemens ne peut être compris dans la quatrième caſe, puiſque toutes les colonnes verticales contiennent deux impairs. Il faudroit donc que deux, au moins, ſe trouvaſſent dans la ſeconde ou la troiſième caſe, ce qui donneroit deux des quantités x, x' & x'' égales; or, deux de ces quantités (par la nature de la choſe) ne peuvent pas être égales ſans que la troiſième ne le ſoit auſſi, ce qui eſt impoſſible, puiſqu'un nombre poſitif pair ne peut pas égaler un impair.

COROLLAIRE.

Il ſuit de-là que la carte qui ſe ſuccède continuellement eſt toujours renfermée dans la ſeconde des quatre caſes dans leſquelles le jeu ſe trouve partagé après la ſeconde permutation.

Nous allons trouver, de la même manière, les nombres de cartes qui permettront que quatre d'entre elles ſe ſuccèdent; pour cela, jetons les yeux ſur les quatre premiers ordres d'un jeu composé de 22 cartes;

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.10.11 | 12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22
22.20.18.16.14.12.10. 8. 6. 4. 2 | 1. 3. 5. 7. 9.11.13.15.17.19.21
21.17.13. 9. 5. 1 | 4. 8.12.16.20 | 22.18.14.10. 6. 2 | 3. 7.11.15.19
19.11. 3 | 6.14.22 | 16. 8 | 1. 9.17 | 21.13. 5 | 4.12.20 | 18.10. 2 | 7.15

& remarquons 1.° que le quatrième ordre ſe trouve composé de huit parties, qui ſont chacune une progreſſion arithmétique, dont la différence eſt 8; 2.° que les plus grands termes des progreſſions quatrième & cinquième ſeront conſtamment pour toutes les valeurs de m, $m - 5$ pour la première, & $m - 1$ pour la ſeconde; 3.° que lorſque la valeur de m ne ſera pas de cette forme $(4p)$ les plus grands termes des ſeconde, troiſième, ſixième & ſeptième progreſſions ſeront (par ordre)

$$m,\ m - 6,\ m - 2\ \&\ m - 4;$$

mais que lorſque l'on aura $m = 4p$, ces termes ſeront

$$m - 4,\ m - 2,\ m - 6\ \&\ m;$$

4.° que les plus grands termes des deux progreſſions extrêmes ſeront $m - 3$ pour la première, & $m - 7$ pour la dernière; d'où nous conclurons que la valeur d'un terme quelconque de la quatrième ligne, n étant celui qui lui répond dans la première, ſera, s'il ſe trouve dans la première ſuite (ou caſe).

Pour la 1.ère caſe $m - 3 - 8(n - 1)$

Pour la 2.e ..... $m - 8\left(\frac{m+2}{4} - n\right)$ (& ſi $m = 4p$) $= m - 4 - 8\left(\frac{m}{4} - n\right)$

Pour la 3.e .....$m - 6 - 8\left(\frac{m+2}{4} + n - 1\right)$...$= m - 2 - 8\left(n - \frac{m}{4} - 1\right)$

Pour la 4.^{e} case $m - 5 - 8(\frac{m}{2} - n)$

Pour la 5.^{e}... $m - 1 - 8(n - \frac{m}{2} - 1)$

Pour la 6.^{e}... $m - 2 - 8(\frac{3(m+2)}{4} - n - 1)$ (& si $m = 4p$) $= m - 6 - 8(\frac{3m}{4} - n)$

Pour la 7.^{e}... $m - 4 - 8(n - \frac{3(m+2)}{4})$............ $= m - 8(n - \frac{3m}{4} - 1)$

Et pour la 8.^{e} $m - 7 = 8(m - n)$.

Cela posé, supposons que le premier rang que doivent occuper les quatre cartes qui se succèdent, soit compris dans la première case, les numéros des deux dernières de ce rang seront nécessairement impairs, celui de la seconde sera pair, il n'y aura que le premier qui pourra être pair ou impair. 1.° Supposons qu'il soit pair, & représentons les quatre numéros par x, x', x'', & x''', les quatre arrangemens seront

$$\begin{matrix} x & x' & x'' & x''' \\ x' & x'' & x''' & x \\ x'' & x''' & x & x' \\ x''' & x & x' & x'' \end{matrix} \quad (x \text{ \& } x' \text{ sont pairs}).$$

L'on voit aisément que le second arrangement ne peut avoir lieu que dans la septième case, le troisième dans la sixième case, & le quatrième dans la quatrième case; ce qui donnera les quatre équations suivantes, si $m = 4p$; c'est-à-dire si m est multiple de 4.

$$x''' = m - 3 - 8(x - 1)\ldots\ldots = m - 8x + 5$$

$$x = m - 8(x' - \frac{3m}{4} - 1)\ldots\ldots = 7m - 8x' + 8$$

&

$$x' = m - 6 - 8(\frac{3m}{4} - x'' - 0) = 8x'' - 6 - 5m$$

$$x'' = m - 5 - 8(\frac{m}{2} - x''')\ldots\ldots = 8x''' - 5 - 3m,$$

& si m n'est pas $= 4p$,

$$x''' = m - 3 - 8\,(x - 1) \ldots\ldots\ldots\ldots = m \quad - 8\,x + 5$$

$$x = m - 4 - 8\,\left(x' - \frac{3\,(m+2)}{4}\right) \ldots = 7m - 8\,x' + 8$$

$$x' = m - 2 - 8\,\left(\frac{3\,(m+2)}{4} - x'' - 1\right) = 8\,x'' - 5\,m - 6$$

$$x'' = m - 5 - 8\,\left(\frac{m}{2} - x'''\right) \ldots\ldots\ldots = 8x''' - 5 - 3\,m,$$

ce qui donne, pour les deux cas,

$$x = \frac{m + 8}{15}$$

$$x' = \frac{13\,m + 14}{15}$$

$$x'' = \frac{11\,m + 13}{15}$$

&

$$x''' = \frac{7\,m + 11}{15}.$$

Donc, quel que ſoit le nombre des cartes, pourvu qu'il ſoit pair, & de la forme $\frac{m+8}{15}$, quatre cartes ſe ſuccéderont, elles auront un de leurs rangs dans la première caſe, & deux de leurs numéros ſeront impairs.

Nombre des cartes.	*Numéros des cartes qui ſe ſuccèdent 4 à 4.*
22	2 . . . 11 . . . 17 . . . 20.
52	4 . . . 25 . . . 39 . . . 46.
82	6 . . . 39 . . . 61 . . . 72.
112	8 . . . 53 . . . 83 . . . 98.
142	10 . . . 67 . . . 105 . . . 124.
172	12 . . . 81 . . . 127 . . . 156.
202	14 . . . 95 . . . 149 . . . 176.

2.° Suppoſons que la carte dont le numéro pouvoit être pair ou impair, & que nous avons déjà ſuppoſé pair, ſoit, ou doive être impair, alors, des quatre nombres x, x', x'', x''', il n'y aura que x' de pair; le ſecond arrangement qui commence par un pair ne pourra avoir lieu que dans la huitième caſe; la troiſième, qui finit par un nombre pair, ne pourra être

être que dans la ſeptième caſe; enfin le quatrième arrangement ſera néceſſairement dans la cinquième caſe. On aura donc les quatre équations ſuivantes,

$$x''' = m - 3 - 8(x - 1) \ldots\ldots = m - 8x + 5$$
$$x = m - 7 - 8(m - x) \ldots\ldots = 8x' - 7m - 7$$
$$x' = m - 8\left(x'' - \frac{3m}{4} - 1\right) \ldots = 7m + 8 - 8x''$$
$$x'' = m - 1 - 8\left(x''' - \frac{m}{2} - 1\right) = 5m - 8x''' + 7,$$

(de même que dans le cas précédent, les différentes eſpèces de parité ne changent rien à ces équations) & l'on aura

$$x = \frac{m + 9}{17}$$
$$x''' = \frac{9m + 13}{17}$$
$$x'' = \frac{13m + 15}{17}$$
$$x' = \frac{15m + 16}{17}.$$

Donc, tous les nombres pairs de la forme $\frac{m + 9}{17}$ donneront des ſucceſſions de quatre cartes, le numéro de la première étant impair.

Nombre des cartes.	*Numéros des cartes qui ſe ſuccèdent 4 à 4.*			
8	1	5	7	8.
42	3	23	33	38.
76	5	41	59	68.
110	7	59	85	98.
144	9	77	111	128.
178	11	95	137	158.
212	13	113	163	188.

Tout ce que nous avons dit juſqu'à préſent ſur les ſucceſſions quatre à quatre, ſuppoſe qu'un des rangs ou colonnes ſoit dans la première des huit caſes; ſuppoſons maintenant qu'il n'y en ait pas dans la première, & que ce ſoit dans la ſeconde, on remarquera que le ſecond & le quatrième de la

colonne verticale seront nécessairement pairs, le troisième impair; mais le premier pourra être ou l'un ou l'autre. Supposons 1.° qu'il doive être pair, il y aura trois nombres pairs, & x'' sera seul impair; par conséquent le second arrangement ne pourra avoir lieu que dans la sixième case, le troisième dans la troisième, & le quatrième dans la quatrième case; on aura donc

$$x''' = m - 4 - 8\left(\frac{m}{4} - x\right) \ldots = 8x - m - 4$$

$$x = m - 6 - 8\left(\frac{3m}{4} - x'\right) \ldots = 8x' - 5m - 6$$

$$x' = m - 2 - 8\left(x'' - \frac{m}{4} - 1\right) = 3m + 6 - 8x''$$

$$x''' = m - 5 - 8\left(\frac{m}{2} - x'''\right) \ldots = 8x''' - 3m - 5;$$

ce qui donne $x = \frac{3m + 10}{17}$

$$x' = \frac{11m + 14}{17}$$

& $x'' = \frac{5m + 11}{17}$;

$$x''' = \frac{7m + 12}{17};$$

d'où l'on conclura que lorsque m sera de telle forme, que $\frac{3m + 10}{17}$ sera un nombre entier, quatre cartes, dont la première sera paire, se succèderont, sans qu'aucun de leurs rangs se trouve dans la première huitième partie du jeu. Les nombres qui satisfont à cette condition sont dans cette Table.

Nombre des cartes.	*Numéros des cartes qui se succèdent 4 à 4.*
8	2... 3... 4... 6.
42	8...13...18... 28.
76	14...23...32... 50.
110	20...33...46... 72.
144	26...43...66... 94.
178	32...53...74...116.
&c.	&c... &c.... &c.... &c.

De ce que cette ſuite eſt la même que la précédente, on peut conclure que toutes les fois qu'un nombre de cartes ſera tel, qu'étant mêlées comme nous l'avons indiqué, quatre d'entre elles ſe ſuccéderont, à commencer par un nombre impair, compris dans la première huitième partie du jeu, quatre autres différentes ſe ſuccèderont, en commençant par un nombre pair dans la ſeconde huitième partie du jeu.

En faiſant de ſemblables raiſonnemens, on connoîtra, 1.° qu'il n'eſt pas poſſible que quatre cartes ſe ſuccèdent, de manière que leur premier rang ſoit impair & dans la ſeconde huitième partie du jeu; 2.° qu'il ne ſe peut pas faire de même que quatre cartes ſe ſuccèdent, de manière que leur premier rang ne ſoit pas dans le premier quart du jeu.

En continuant ces opérations, on trouveroit des formules pour déterminer les nombres des cartes dans leſquelles cinq, ſix, ſept & un plus grand nombre de cartes ſe ſuccèdent.

Il ſuit, de ce que nous avons dit ſur la ſucceſſion mutuelle des mêmes cartes, d'autres méthodes de déterminer le nombre de permutations qui convient à un jeu, pour qu'il ſe reproduiſe dans le même ordre.

1.° Il eſt évident que toutes les cartes qui ſe ſuccèdent dans un rang qui ne commence pas par 1, ne peuvent pas ſe trouver dans la première colonne verticale; donc, ſi du nombre des cartes du jeu on retranche la ſomme des nombres de cartes qui ſe ſuccèdent, on aura le nombre de permutations demandées.

EXEMPLE.

Soit propoſé le nombre 22, en jetant les yeux ſur les Tables que nous venons de donner, on remarquera que 1, 2, 3 & 4 cartes ſe ſuccèdent; comme la ſomme de ces nombres eſt 10, il ſuit que 22 — 10, ou 12, ſera le nombre des permutations.

2.° Il n'eſt pas moins clair que lorſque deux cartes doivent ſe ſuccéder, le nombre des permutations qu'on doit faire pour que le jeu ſe reproduiſe, doit être pair ou multiple

de 2, lorſque le nombre des cartes ſucceſſives eſt 3, celui des permutations doit être multiple de 3, & en général, le nombre des permutations doit être multiple de tous les nombres de cartes qui ſe ſuccèdent; avec cette différence cependant, qu'il peut être un multiple quelconque; c'eſt-à-dire, pair ou impair, des nombres pairs de cartes qui ſe ſuccèdent, & qu'il ne peut être que multiple pair des nombres impairs plus grands que l'unité (cela eſt trop clair pour le démontrer). Donc, pour déterminer le nombre des permutations, il faudra choiſir un nombre qui ſoit en même-temps multiple quelconque des nombres pairs de cartes ſucceſſives, & multiple pair des nombres impairs.

Soit propoſé, par exemple, le nombre 22, les nombres de cartes ſucceſſives dans ce jeu, ſont 1, 2, 3 & 4; comme 4 eſt multiple de 2 & de 1, on n'a à conſidérer que les nombres 3 ou 4, le nombre des permutations eſt donc le nombre moindre que 22, multiple de 4, & pairement multiple de 3; il n'y a que 12 qui ſoit dans ce cas-là; donc 12 eſt le nombre des permutations.

Quoique ces méthodes ſoient moins abrégées que celle que nous avons donnée dans le commencement; elles peuvent néanmoins jeter un jour ſur cette matière, & ſervir à concevoir les raiſons des inégalités qu'on obſerve dans le nombre des permutations.

OBSERVATION
ET
CALCUL DE L'OPPOSITION DE JUPITER,
du 19 Août 1772,
FAITE À ROUEN,

Par M. le Chevalier d'ANGOS, Officier au régiment de Navarre, & Membre de l'Académie des Sciences de Rouen.

LE 17 Août, je comparai Jupiter avec une étoile de sixième grandeur, qui est la dernière de la page 27 du Catalogue de Séligny, par le moyen d'un réticule rhomboïde, fixé dans une lunette achromatique de Dollond, de six pieds de foyer; le 21 Août je répétai les mêmes observations, & je vais avoir l'honneur d'en présenter à l'Académie les détails & les résultats, qui fixent l'instant de l'opposition de Jupiter au Soleil, pour le 19 Août, à $18^h\ 47'\ 56'',6$.

Le 18 Août, je pris avec un quart-de-cercle d'un pied de rayon, dix-neuf hauteurs correspondantes du Soleil, & le 19 Août j'en pris vingt-une; je trouvai que ma pendule étoit en retard de quelques secondes sur le temps moyen, & qu'elle avançoit de $4'',4$; j'ai corrigé en conséquence mes observations.

La longitude moyenne de l'Étoile, pour 1755, prise dans le Catalogue, est $10^s\ 28^d\ 1'\ 45'',0$; la latitude, $1^d\ 59'\ 2'',0$ *A;* en calculant par les méthodes connues le changement produit dans sa position par la précession des Équinoxes, la nutation & l'aberration, l'on trouve pour la longitude apparente de l'Étoile, le 17 Août 1772, $10^s\ 28^d\ 16'\ 59'',9$, & pour la latitude apparente $1^d\ 59'\ 8'',97$, d'où je déduis (par la Trigonométrie sphérique) son ascension

droite apparente = 331^{d} 9′ 27″,7, & sa déclinaison apparente = 13^{d} 56′ 36″,5 *A*.

La longitude apparente de l'Étoile, calculée de même pour le 21 Août = 10^{f} 28^{d} 17′ 0″,4; la latitude apparente = 1^{d} 59′ 2″,01; d'où je déduis l'ascension droite apparente du 21 = 331^{d} 9′ 37″,3, & la déclinaison apparente = 13^{d} 56′ 36″,8 *A*.

Par un milieu pris entre plusieurs observations le 17 Août à 11^{d} 39′ 19″,4, temps moyen à Paris, Jupiter (dans la partie nord du réticule) précédoit l'Étoile (dans la partie Sud du réticule) de 2′ 14″,1 de temps = 33′ 37″,1 de degrés.

Ascension droite apparente de l'Étoile le 17 Août	331^{d} 9′ 27″,7.
Différence d'ascension droite entre Jupiter & l'Étoile.	— 33′ 37″,1.
Ascension droite de Jupiter..................	330^{d} 35′ 50″,6.

La somme des durées de Jupiter & de l'Étoile dans le réticule = 2′ 28″ de temps = 37′ de degrés.

Logarithme..............................	3,3463530.
Log. cos. décl. moyenne entre Jup. & l'Ét. 13^{d} 38′ 48″	9,9875631.
Logarithme de 35′ 57″,3..................	3,3339161.
Grand axe du réticule en temps 5′ 47″,4 = en degrés.	1^{d} 11′ 51″,0.
Différence de déclinaison....................	— 35′ 53″,7.
Déclinaison apparente de l'Étoile.............	13^{d} 56′ 36″,5.
Déclinaison apparente de Jupiter..............	13^{d} 20′ 42″,8.

Par le moyen de cette ascension droite & de cette déclinaison de Jupiter, je trouve sa longitude apparente = 327^{d} 58′ 48″,0, & sa latitude apparente = 1^{d} 14′ 1″,0.

Le 21 Août à 11^{h} 8′ 45″, temps moyen à Paris,

Jupiter, sur le fil, précédoit l'Étoile de 4′ 13″,8 de temps = en degrés.......................	1^{d} 3′ 37″,6.
Ascension droite apparente de l'Etoile le 21.....	331^{d} 9′ 27″,3.
Ascension droite de Jupiter..................	330^{d} 5′ 49″,7.

Différence des durées 1′ 38″,9 = en degrés 24′ 43″,5.

Logarithme........................... 3,1712876.

Logarithme cosin. déclin. moyenne $13^d\ 43'\ 18'',4$. 9,9874245.

Logarithme différence de déclinaison. $24'\ 1'',2$. 3,1587121.

Déclinaison apparente de l'Étoile. $13^d\ 56'\ 36'',8$.

Déclinaison apparente de Jupiter. $13^d\ 32'\ 35'',6$.

d'où je déduis la longitude apparente de Jupiter le 21 Août $= 327^d\ 27'\ 18'',8$, & sa latitude apparente $= 1^d\ 15'\ 2'',5$ *A.*

La long. ap. de Jupiter le 17 à $11^h\ 39'\ 19'',4$ étoit $10^f\ 27^d\ 58'\ 48'',0$.

Celle du Soleil pour le même instant......... $4^f\ 25^d\ 27'\ 28'',4$.

Donc Jupiter étoit plus avancé que le point opposé au Soleil, de........................ $2^d\ 31'\ 19'',4$.

Longitude appar. de Jupiter le	$17^j\ 11^h\ 39'\ 19'',4$.	$327^d\ 58'\ 48'',0$.	du Soleil	$4^f\ 25^d\ 27'\ 28'',4$.
	21 11 8 45 ,0.	327 27 17 ,8.		4 29 17 38 ,3.
Diff. des temps & des longit.	$3^j\ 23^h\ 29'\ 25'',6$....	$0^d\ 31'\ 30'',2$,...........		$0^f\ 3^d\ 50'\ 9'',9$.

Donc, $3^j\ 23^h\ 29'\ 25'',6$, ou $3^j,978757 : 3^d\ 50'\ 9'',9 :: 1^j : 57'\ 50'',9$, mouvement diurne du Soleil.

Et $3^j,978757 : 31'\ 30'',2 :: 1^j \cdot 7'\ 55'',8$, mouvement diurne de Jupiter.

Donc le mouvement relatif en 24 heures $= 1^d\ 5'\ 46'',7$.

Donc, enfin $1^d\ 5'\ 46'',7 : 86400'' :: 2^d\ 31'\ 19'',6 : 2^j\ 7^h\ 12'\ 5''$.

Temps moyen de l'obs. du 17, $11^h\ 39'\ 19'',4 = 17^j\ 11^h\ 35'\ 56'',6$ de temps vrai.
+ 2 7 12' 5 ,0.

Temps vrai de l'oppos. vraie de Jupiter à Paris. $19^f\ 18^h\ 47'\ 56'',6$.

Si je calcule maintenant par le mouvement diurne de chacun des deux astres leurs longitudes apparentes, pour l'instant de l'opposition, partant des longitudes déterminées pour l'instant de l'observation du 17 Août, je trouve,

Pour Jupiter.......................... $10^f\ 27^d\ 40'\ 34'',9$.

Pour le Soleil......................... 4 27 40 34 ,9.

Ce qui s'accorde parfaitement, & sert de vérification à ces derniers calculs.

OBSERVATIONS ET CALCULS DES OPPOSITIONS DE MARS ET DE SATURNE DE 1773, FAITES À GENÈVE.

Par M. MALLET, Correſpondant de l'Académie.

L'OBSERVATOIRE que je deſirois de faire conſtruire déjà depuis pluſieurs années, ayant enfin été achevé & en état de recevoir mes inſtrumens au commencement de cette année, le premier uſage que j'en ai fait, a été pour obſerver les Oppoſitions de Mars & de Saturne qui ont eu lieu à la fin des mois de Janvier & de Février: c'eſt le réſultat de ces premiers travaux que j'ai l'honneur de préſenter à l'Académie, comme un foible témoignage de mon dévouement & du deſir que j'ai de mériter ſon approbation.

Les inſtrumens dont je me ſuis ſervi, ſont 1.° un inſtrument des paſſages dont la lunette achromatique a 4 pieds; les ſupports de l'axe ſont fixés à deux très-groſſes pierres de roche, aſſiſes ſur de bons fondemens, & dont la maſſe en aſſure la ſolidité: cette lunette a la commodité de pouvoir parcourir tout le Méridien du nord au midi, & on la place facilement à la hauteur convenable au moyen d'un index & d'un demi-cercle diviſé, où un nonius fait diſtinguer un angle de 3 minutes.

2.° Un quart-de-cercle anglois de 2 pieds & demi de rayon, fait par Siſſon, diviſé de 10 en 10 minutes; la lunette achromatique, mobile autour du centre, porte un nonnius qui ſubdiviſe juſqu'à 30 ſecondes, & une vis extérieure, garnie d'un index & d'un cadran, fait apercevoir très-ſenſiblement ſur le limbe un mouvement de la lunette de 3 à 4 ſecondes. Pluſieurs vérifications m'ayant convaincu de quelques

quelques erreurs dans les divisions du nonius, j'ai renoncé totalement à en faire usage, & je me sers uniquement de la vis, après m'être bien assuré de son exactitude. Quoique ce quart-de-cercle soit fait pour être mobile, & soit muni de tout ce qui peut le rendre extrêmement commode pour prendre des hauteurs correspondantes, je m'en suis servi cependant pour prendre les hauteurs méridiennes, en attendant un mural qui n'est pas encore placé: je mets facilement le limbe dans le plan du Méridien, au moyen d'une méridienne filaire très-exacte, & chaque jour d'observation j'ai eu soin de revérifier sa position.

3.° Une pendule de Lepaute, avec la verge composée; elle est réglée de temps en temps par les hauteurs correspondantes du Soleil, & je me suis assuré de la régularité de sa marche par l'observation que je fais du passage du Soleil à la lunette méridienne toutes les fois que le temps le permet: je tiens encore une note exacte des degrés d'un thermomètre placé dans la caisse de la pendule, pour comparer sa marche à celle de l'horloge.

Mars a été observé les 20, 21 & 26 Janvier, & comparé aux étoiles α, β, δ, ζ des Gemeaux & γ de l'Écrevisse. Ce que j'ai appelé *Hauteurs méridiennes non corrigées,* sont les hauteurs données immédiatement par le quart-de-cercle, sans égard à l'erreur de l'instrument ni aux réfractions.

Saturne a été comparé le 27 Février, le 1.er & le 2 Mars, aux étoiles α, β de l'Écrevisse, Régulus, o & ρ du Lion. Les ascensions droites apparentes des Étoiles ont été prises par un milieu entre celles de M. de la Caille & celles de M. Bradley.

J'ai eu pour aide dans ces observations M. Marc Pictet, jeune homme plein de zèle & de talens pour l'Astronomie.

OBSERVATIONS pour

La pendule retarde de 11″,6 par jour sur le temps moyen, & le

1773. Janv.	NOMS des ASTRES	PASSAGE à la Lunette mérid. en temps de la Pendule.	DIFFÉR. des Passages, réduites en T. moy.	DIFFÉRENCES en Ascension dr.	ASCENSIONS droites des Étoiles.	ASCENSIONS droites appar. de Mars, observées.
		H. M. S.	*H. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*
20.	♂	12. 14. 40,5	1. 26. 19,2	21. 38. 20,8	102. 39. 53,8	124. 18. 14,6
	ζ ♊	10. 48. 22,0				
	δ ♊ ...	11. 4. 15,0	1. 10. 26,1	17. 39. 25,6	106. 38. 41,8	124. 18. 7,4
	α ♊ ...	11. 17. 44,8	0. 56. 56,2	14. 16. 23,3	110. 1. 48,6	124. 18. 11,9
	β ♊ ...	11. 29. 1,5	0. 45. 39,4	11. 26. 43,6	112. 51. 41,5	124. 18. 25,1
21.	♂	12. 8. 51,5	1. 24. 37,7	21. 12. 54,0	*Voyez ci-dessus.*	123. 52. 47,8
	ζ ♊	10. 44. 14,5				
	δ ♊ ...	11. 0. 7,0	1. 8. 45,1	17. 14. 6,3	*Idem.........*	123. 52. 48,1
	α ♊ ...	11. 13. 37,2	0. 55. 14,8	13. 50. 58,6	*Idem.........*	123. 52. 47,2
	β ♊ ...	11. 24. 54,0	0. 43. 57,9	11. 1. 16,9	*Idem.........*	123. 52. 58,4
	γ ♋ ...	12. 23. 26,5	0. 14. 35,1	3. 39. 21,9	127. 32. 19,1	123. 52. 57,2
26.	♂	11. 40. 6,0	1. 16. 16,6	19. 7. 16,7	*Voyez ci-dessus.*	121. 47. 10,5
	ζ ♊	10. 23. 48,0				
	δ ♊ ...	10. 39. 41,0	1. 0. 23,9	15. 8. 27,5	*Idem.........*	121. 47. 9,3
	α ♊ ...	10. 53. 11,5	0. 46. 53,6	11. 45. 19,2	*Idem.........*	121. 47. 7,8
	β ♊ ...	11. 4. 28,2	0. 35. 37,2	8. 55. 45,5	*Idem.........*	121. 47. 27,0

Résultat des Observations

	TEMPS vrai à Genève.	TEMPS vrai à Paris.	TEMPS moyen à Paris.	ASCENSION dr. apparente de Mars, observée.	DÉCLIN. bor. appar. de Mars, observée.	LONGITUDE géocent. appar. de Mars, observée.
	H. M. S.	*H. M. S.*	*H. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*S. D. M. S.*
Janv. 20	12. 2. 51,4	11. 48. 11,4	12. 0. 1,0	124. 18. 15	24. 16. 26	IV. 1. 1. 3
21	11. 56. 53,3	11. 42. 13,3	11. 54. 18,3	123. 52. 52	24. 22. 2	IV. 0. 37. 10
26	11. 27. 48,0	11. 13. 8,0	11. 26. 22,6	121. 47. 14	24. 47. 43	III. 28. 39. 43
20	6. 15. 40,0	6. 1. 0,0	6. 12. 45,0	Longitude vraie de Mars en opposition Latitude boréale géocentrique........		

l'Opposition de MARS.

20 Janvier à midi, elle eſt en avance de 11′ 46″,6 ſur le temps vrai.

NOMS des ASTRES.	HAUTEURS méridiennes non corrigées.	DIFFÉRENCES	DIFFÉRENCES des Haut. corrigées de la Réfraction & de la Parallaxe	DÉCLINAISON boréale appar. des Étoiles, tirée de M. de la Caille	DÉCLINAISON apparente de Mars, obſervée.
	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.
♂	68. 29. 21,9	1. 53. 34,6	1. 53. 42,2	22. 22. 34,7	24. 16. 16,9
δ♊	66. 35. 47,3				
α♊	76. 34. 33,0	8. 5. 11,1	8. 5. 16,4	32. 21. 50,2	24. 16. 33,8
β♊	72. 46. 7,3	4. 16. 45,4	4. 16. 45,0	28. 33. 13,8	24. 16. 27,9
♂	68. 34. 59,1	3. 28. 58,8	3. 29. 8,8	20. 52. 56,2	24. 22. 5,0
ζ♊	65. 6. 0,3				
δ♊	66. 35. 43,3	1. 59. 15,8	1. 59. 23,6	*Voyez ci-deſſus.*	24. 21. 58,3
α♊	76. 34. 39,1	7. 59. 40,0	7. 59. 45,1	*Idem*	24. 22. 5,1
β♊	72. 46. 20,4	4. 11. 21,3	4. 11. 21,6	*Idem*	24. 21. 52,2
γ♋	66. 29. 3,8	2. 5. 55,3	2. 6. 3,3	22. 16. 5,8	24. 22. 9,1
♂	69. 0. 35,0	3. 54. 37,8	3. 54. 48,4	*Voyez ci-deſſus*	24. 47. 44,6
ζ♊	65. 5. 57,2				
δ♊	66. 35. 44,2	2. 24. 50,8	2. 24. 59,2	*Idem*	24. 47. 33,9
α♊	76. 34. 28,9	7. 33. 53,9	7. 33. 58,4	*Idem*	24. 47. 51,8
β♊	72. 46. 14,3	3. 45. 39,3	3. 45. 39,0	*Idem*	24. 47. 34,8
γ♋	66. 28. 59,8	2. 31. 35,2	2. 31. 43,8	*Idem*	24. 47. 49,6

de MARS.

LONGITUDE géocentr. appar. calculée par les Tables de Halley.	ERREUR des Tabl. en longitude	LATITUDE géocentrique obſervée.	LATITUDE géocentrique calculée ſuivant les T. de Halley	ERREUR des Tabl. en latitude.	VRAI LIEU du Soleil, par les Tables de la Caille.	ERREUR des Tables de Caſſini en longitude.
S. D. M. S.	M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	S. H. M. S.	M. S.
IV. 1. 1. 0	—0. 3	4. 25. 47	4. 25. 1	—0. 46	X. 1. 21. 47,0	
IV. 0. 37. 1	—0. 9	4. 26. 3	4. 25. 22	—0. 41	X. 2. 22. 35,0	—17. 22
III. 28. 39. 27	—0. 16	4. 26. 23	4. 25. 53	—0. 30	X. 7. 26. 32,0	

IV. 1. 7. 4 calculée ſur les Tables de Halley, corrigées de l'erreur moyenne 9″.

4. 25. 20 .... 39.

OBSERVATIONS pour

On a raccourci la verge de la pendule; elle avance chaque jour de 2″,6 sur le temps

1773. Févr.	NOMS des ASTRES	PASSAGE à la Lunette mérid. en temps de la Pendule.	DIFFÉR. des Passages, réduites en T. moy.	DIFFÉRENCES en Ascension dr.	ASCENSIONS droites des Étoiles.	ASCENSIONS droites app. de Saturne, observées.
		H. M. S.	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.
27.	♄	12. 16. 46,0	2. 43. 37,5	41. 1. 6,0	121. 3. 21,0	162. 4. 27,0
	β ♋ ...	9. 33. 8,2				
	α ♋ ...	10. 14. 53,2	2. 1. 52,6	30. 33. 10,2	131. 31. 19,4	162. 4. 29,6
	ο ♌	10. 57. 44,0	1. 19. 1,9	19. 48. 43,6	142. 15. 48,3	162. 4. 31,9
	Régulus.	11. 24. 54,2	0. 51. 51,7	13. 0. 3,6	149. 4. 27,7	162. 4. 31,3
Mars. 1.	♄	12. 8. 24,0	1. 18. 25,9	19. 39. 41,6	*Voyez ci-dessus.*	161. 55. 29,9
	ο ♌	10. 49. 58,0				
	Régulus.	11. 17. 8,5	0. 51. 15,4	12. 50. 57,6	*Idem*	161. 55. 25,3
	ρ ♌	11. 41. 39,2	0. 26. 44,8	6. 42. 17,8	155. 13. 3,7	161. 55. 21,5
2.	♄	12. 4. 12,5	2. 42. 43,5	40. 47. 33,3	*Voyez ci-dessus.*	161. 50. 54,3
	β ♋ . .	9. 21. 28,7				
	α ♋ ...	10. 3. 13,5	2. 0. 58,8	30. 19. 40,4	*Idem*	161. 50. 59,8
	ο ♌	10. 46. 4,7	1. 18. 7,7	19. 35. 7,8	*Idem*	161. 50. 56,1
	Régulus.	11. 13. 15,0	0. 50. 57,4	12. 46. 26,3	*Idem*	161. 50. 54,0
	ρ ♌	11. 37. 45,2	0. 26. 27,3	6. 37. 54,6	*Idem*	161. 50. 58,3

Résultat des Observations

	TEMPS vrai à Genève.	TEMPS vrai à Paris.	TEMPS moyen à Paris.	ASCENSION dr. apparente de Saturne, observée.	DÉCLIN. bor. app. de Saturne, observée.	LONGITUDE géocentr. app. de Saturne, observée.
	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	S. D. M. S.
Févr. 27	12. 3. 1,0	11. 48. 21,0	12. 1. 12,9	162. 4. 30	9. 52. 26	V. 9. 43. 25
Mars 1	11. 54. 57,9	11. 40. 17,9	11. 52. 45,9	161. 55. 26	9. 55. 3	V. 9. 33. 46
2	11. 50. 56,7	11. 36. 16,7	11. 48. 31,9	161. 50. 56	9. 56. 59	V. 9. 28. 56
Févr. 27	11. 0. 48,0	10. 46. 8,0	10. 59. 0,0	Longitude vraie de Saturne en opposition		
				Latitude boréale géocentrique..........		

l'Opposition de SATURNE.

moyen, & le 27 Février à midi, elle est en avance de 13′ 49″,5 sur le temps vrai.

NOMS des ASTRES.	HAUTEURS méridiennes non corrigées.	DIFFÉRENCES	DIFFÉRENCES des Haut. corrigées de la Réfraction & de la Parallaxe	DÉCLINAISON boréale appar. des Étoiles, tirée de M. de la Caille	DÉCLINAISON apparente de Saturne, observée.
	D. M. S.	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*
♄	54. 4. 31,0	0. 0. 35,0	0. 0. 35,0	9. 51. 57,4	9. 51. 22,4
β♋	54. 5. 6,0				
α♋	56. 56. 21,3	2. 51. 50,3	2. 51. 55,2	12. 43. 17,5	9. 51. 22,3
ο♌	55. 7. 49,7	1. 3. 18,7	1. 3. 20,4	10. 54. 44,5	9. 51. 24,1
Régulus	57. 16. 57,4	3. 12. 26,4	3. 12. 31,8	13. 4. 2,5	9. 51. 30,7
ρ♌	54. 41. 1,2	0. 36. 30,2	0. 36. 31,3	10. 28. 0,7	9. 51. 29,4
♄	54. 8. 9,7	0. 59. 43,0	0. 59. 44,6	*Voyez ci-dessus.*	9. 55. 0,0
ο♌	55. 7. 52,7				
Régulus	57. 17. 1,4	3. 8. 51,7	3. 8. 57,0	*Idem.*	9. 55. 5,5
ρ♌	54. 41. 5,2	0. 32. 55,5	0. 32. 56,5	*Idem.*	9. 55. 4,2
♄	54. 10. 4,0	0. 5. 1,0	0. 5. 1,1	*Voyez ci-dessus.*	9. 56. 58,5
β♋	54. 5. 3,0				
α♋	56. 56. 17,2	2. 46. 13,2	2. 46. 18,0	*Idem.*	9. 56. 59,5
ο♌	55. 7. 48,7	0. 57. 44,7	0. 57. 46,3	*Idem.*	9. 56. 58,2
Régulus	57. 17. 0,4	3. 6. 56,4	3. 7. 1,7	*Idem.*	9. 57. 0,8
ρ♌	54. 41. 3,2	0. 30. 59,2	0. 31. 0,2	*Idem.*	9. 57. 0,5

de SATURNE.

LONGITUDE géocentr. appar. calculée par les Tables de Halley.	ERREUR des Tabl. en longitude	LATITUDE géocentrique observée.	LATITUDE géocentrique calculée suivant les T. de Halley	ERREUR des Tabl. en latitude.	VRAI LIEU du Soleil, par les Tables de la Caille.	ERREUR des Tables de Cassini en longitude.
S. D. M. S.	*M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*S. H. M, S.*	*M. S.*
V. 9. 42. 7	—1. 18	2. 4. 46	2. 5. 23	+0. 37	XI. 9. 46. 13,8	+22. 13
V. 9. 32. 32	—1. 14	2. 4. 44	2. 5. 33	+0. 49	XI. 11. 46. 7,6	
V. 9. 27. 45	—1. 11	2. 4. 50	2. 5. 37	+0. 47	XI. 11. 46. 1,1	

V. 9. 43. 38 calculée sur les Tables de Halley, corrigées de l'erreur moyenne 1′ 14″.

2. 4. 39 .... 0. 44.

OBSERVATIONS
DE LA COMÈTE
Découverte par M. MESSIER le 1.er Avril 1771, Faites à l'Observatoire de Saint-Lô, à Rouen.

Par M. DULAGUE.

CES observations ont été faites avec un réticule rhomboïde, adapté à une lunette achromatique de 5 pieds, de la façon de Dollond.

Les 12, 13 & 14 Avril, la Comète a été comparée avec la 101.e Étoile du catalogue des Éphémérides de M. de la Caille; savoir:

Temps vrai.				
Le 12 à 9h 3′ 12″	La Comète étoit à l'occident de l'Étoile de...	2d 39′ 11″	& au Sud de..	0′ 27″
Le 13 à 8. 26. 49		1. 24. 55	& plus N. de.	22. 38
Le 14 à 8. 15. 37		0. 8. 41	& plus N. de.	45. 34

En supposant l'ascension droite apparente de l'Étoile pour le 13, de 54d 8′ 57″, & sa déclinaison boréale de 24d 52′ 14″, on aura l'ascension droite apparente de la Comète,

Le 12, à 9h 3′ 12″	de 51d 29′ 46″	& sa déclin. boréale de	24d 51′ 47″
Le 13, à 8. 26. 49	de 52. 44. 2		25. 14. 52
Le 14, à 8. 15. 37	de 54. 0. 16		25. 37. 48

Le 15 à 8h 26′ 58″ la Comète étoit à l'Occident de *p*♉, qui est la 109.e des Éphémérides, de 3d 55′ 37″, & plus nord de 7′ 26″; l'ascension droite apparente de l'Étoile étant de 59d 14′ 6″, & sa déclinaison boréale 25d 51′ 49″, celle de la Comète sera 55d 18′ 29″, & sa déclinaison boréale 25d 59′ 15″.

Le 16, à $8^h\ 32'\ 54''$, la Comète étoit à l'occident de la précédente du quadrilatère du col du Taureau de $1^d\ 31'\ 26''$, & au Sud de $0^d\ 36'\ 59''$.

Le 17, à $8^h\ 15'\ 19''$, elle étoit à l'Oueſt de $0^d\ 12'\ 9''\frac{1}{2}$, & au Sud de $0^d\ 17'\ 53''$.

Le 18, à $8^h\ 11'\ 25''$ elle étoit à l'Eſt de $1^d\ 9'\ 6''$, & au Nord de $0^d\ 2'\ 46''$; l'aſcenſion droite apparente de l'Étoile étant de $58^d\ 8'\ 39''$, & ſa déclinaiſon boréale $26^d\ 56'\ 31''$, celle de la Comète ſera,

Le 16, à $8^h\ 32'\ 54''$	de $56^d\ 37'\ 13''$	& ſa déclin. boréale de	$26^d\ 19'\ 32''$
Le 17, à 8. 15. 19	de 57. 56. $29\frac{1}{2}$		26. 38. 38
Le 18, à 8. 11. 25	de 59. 17. 45		26. 59. 17

Le 22, à $8^h\ 31'\ 5''$ la Comète étoit à l'Oueſt d'une petite étoile de 7.^{e} grandeur, qui n'eſt point dans les Catalogues, de $0^d\ 11'\ 44''$, & au Sud de $0^d\ 12'\ 43''$.

Le 23, à $8^h\ 23'\ 26''$ elle étoit à l'Eſt de $1^d\ 14'\ 24''$, & plus Nord de $0^d\ 3'\ 30''\frac{1}{2}$.

En ſuppoſant l'aſcenſion droite apparente de l'étoile de $65^d\ 4'\ 21''$, & ſa déclinaiſon boréale de $28^d\ 26'\ 20''$; celle de la Comète ſera,

Le 22 à $8^h\ 31'\ 5''$	de $64^d\ 52'\ 37''$	& ſa déclin. boréale de	$28^d\ 13'\ 37''$
Le 23 à 8. 23. 36	de 66. 18. 45		28. 29. $50\frac{1}{2}$

On a trouvé la poſition de cette étoile en la comparant le 23 avec une de 7.^{e} grandeur, qui eſt la ſeptième de la *page 8* du Catalogue du Zodiaque, gravé par d'Heulland, elle précédoit celle du catalogue de $12^d\ 8'\ 59''$, & étoit au Sud de $14'\ 34''$; l'aſcenſion droite apparente de l'étoile du Catalogue étant de $77^d\ 13'\ 20''$, & ſa déclinaiſon boréale de $28^d\ 40'\ 54''$, celle de notre étoile eſt de $65^d\ 4'\ 21''$, & ſa déclinaiſon boréale de $28^d\ 26'\ 20''$.

Le 28, à $8^h\ 54'\ 32''$, la Comète étoit à l'Oueſt de la 22.^{e} étoile de la *page 8* du Catalogue du Zodiaque, de $7^d\ 15'\ 19''$, & au Sud de $0^d\ 39'\ 24''$.

Le 2 Mai	à $8^h\ 59'\ 29''$	de $1^d\ 5'\ 38''$	& au Sud de	$0^d\ 0'\ 44''$
Le 3	à 8. 50. 12 elle étoit à l'E. de	27. 1	& plus N. de	0. 4. 15
Le 4	à 9. 40. 13	de 2. 4. 26	de	0. 9. 47

Aſcenſion droite apparente de l'étoile, ſuppoſée de $80^d\ 59'\ 52''$, & ſa déclinaiſon boréale de $30^d\ 18'\ 40''$; donc, l'aſcenſion droite apparente de la Comète ſera,

Le 28 Avril à $8^h\ 54'\ 32''$ de $73^d\ 44'\ 33''$	& ſa déclin. boréale de	$29^d\ 39'\ 16''$
Le 2 Mai à 8. 59. 29 de 79. 54. 14		30. 17. 56
Le 3 à 8. 50. 12 de 81. 26. 53		30. 22. 55
Le 4 à 9. 40. 13 de 83. 4. 18		30. 28. 27

Le 7, à $9^h\ 10'\ 28''$, la Comète étoit à l'Eſt d'une petite étoile de 7.^e grandeur, de $1^d\ 7'\ 30''$, & au Sud de $20'\ 10''$; aſcenſion droite apparente de l'étoile déduite de nos obſervations, $86^d\ 37'\ 36''$, & ſa déclinaiſon boréale de $30^d\ 58'\ 36''$; aſcenſion droite apparente de la comète $87^d\ 45'\ 6''$, & ſa déclinaiſon boréale de $30^d\ 38'\ 26''$.

La poſition de cette Étoile a été déterminée, en la comparant avec celle qui avoit ſervi les jours précédens; elle en étoit à l'orient de $5^d\ 37'\ 44''$, & étoit plus Nord de $39'\ 56''$.

Le 15, à $9^h\ 46'\ 26''$	La Comète étoit à l'O. de τ ♊, ou la 195.^e des Éph. de	$3^d\ 48'\ 38''$	& au Sud de	$0^d\ 19'\ 11''$
Le 16, à 9. 55. 51		2. 15. 26		0. 27. 43
Le 17, à 9. 42. 58		0. 43. 48		0. 36. 47

Aſcenſion droite apparente de l'étoile $104^d\ 8'\ 14''$, & ſa déclinaiſon boréale de $30^d\ 35'\ 48''$; donc l'aſcenſion droite apparente de la Comète ſera,

Le 15, à $9^h\ 46'\ 26''$ de $100^d\ 19'\ 36''$	& ſa déclin. boréale de	$30^d\ 16'\ 37''$
Le 16, à 9. 55. 51 de 101. 52. 48		30. 8. 5
Le 17, à 9. 42. 58 de 103. 24. 26		29. 59. 1

Le 19, à $9^h\ 39'\ 32''$	La Comète à l'O. de σ ♊, ou la 213.^e des Éph. de	$5^d\ 46'\ 49''$, & plus Nord de $0^d\ 11'\ 52''$
Le 20, à 9. 27. 45		4. 17. 27, & ſur le même parallèle.
Le 21, à 9. 15. 2		2. 49. 9, & au Sud de 0. 12. 25

Aſcenſion droite appar. de l'Étoile de 112. 14. 42, & ſa décl. boréale de 29. 24. 57

L'aſcenſion

L'ascension droite apparente de la Comète sera,

Le 19, à 9h 39′ 32″ de 106d 27′ 53″	& sa déclin. boréale de	29d 36′ 49″
Le 20, à 9. 27. 45 de 107. 57. 15		29. 24. 57
Le 21, à 9. 15. 2 de 109. 25. 33		29. 12. 32

Nota. On trouve dans les Éphémérides 18d 25′ 49″ pour la déclinaison moyenne de σ ♊, au commencement de 1765, je l'ai supposée de 29d 25′ 49″.

Le 22 à 10h 0′ 16″ elle étoit à l'O. de β ♊ de 1d 51′ 3″ & plus N. de 0d 25′ 0″
Le 23 à 9. 11. 28 . . . . de 0. 26. 19 . . . . de 0. 10. 54
Le 24 à 10. 3. 43 elle étoit à l'Est de 1. 3. 56, & au Sud. de 0. 5. 9
Ascension droite apparente de l'Étoile . . . . . 112. 49. 38, déclin. bor. 28. 33. 34

Donc, l'ascension droite apparente de la Comète sera,

Le 22, à 10h 0′ 16″ de 100d 58′ 35″	& sa déclin. boréale de	28d 58′ 34″
Le 23, à 9. 11. 28 de 112. 23. 19		28. 44. 28
Le 24, à 10. 3. 43 de 113. 53. 34		28. 28. 25

Enfin, en rassemblant ces différens résultats, on aura, comme ci-dessous, la position apparente de la Comète pour chaque jour d'observation.

		Temps vrai à Rouen.	*Ascens. dr. appar. de la Comète.*	*Déclin. bor. appar. de la Comète, B.*
Avril 1771. Le	12 à	9h 3′ 12″	51d 29′ 46″	24d 51′ 47″
	13.	8. 26. 49	52. 44. 2	25. 14. 52
	14.	8. 15. 37	54. 0. 16	24. 37. 48
	15.	8. 26. 58	55. 18. 29	25. 59. 15
	16.	8. 32. 54	56. 37. 13	26. 19. 32
	17.	8. 15. 19	57. 56. 29½	26. 38. 38
	18.	8. 11. 25	59. 17. 45	26. 59. 17
	22.	8. 31. 5	64. 52. 37	28. 13. 37
	23.	8. 23. 26	66. 18. 45	28. 29. 50⅘
	28.	8. 54. 32	73. 44. 33	29. 39. 16
Mai	2.	8. 59. 29	79. 54. 14	30. 17. 56
	3.	8. 50. 12	81. 26. 53	30. 22. 55
	4.	9. 40. 13	83. 4. 18	30. 28. 27
	7.	9. 10. 28	87. 45. 6	30. 38. 26
	15.	9. 46. 26	100. 19. 36	30. 16. 37

	Temps vrai à Rouen.	*Ascens. dr. appar. de la Comète.*	*Déclin. bor. appar. de la Comète.*
Mai 1771. Le 16, à	9^h 55′ 51″	101^d 52′ 48″	30^d 8′ 4″
17,	9. 42. 58	103. 24. 26	29. 59. 1
19,	9. 39. 32	106. 27. 53	29. 36. 49
20,	9. 27. 45	107. 57. 15	29. 24. 57
21,	9. 15. 2	109. 25. 33	29. 12. 32
22,	10. 0. 16	110. 58. 35	28. 58. 34
23,	9. 11. 28	112. 23. 19	28. 44. 28
24,	10. 3. 43	113. 53. 34	28. 28. 25

MÉMOIRE SUR LA MÉTÉOROLOGIE;

Qui contient l'extrait des Obſervations Météorologiques, faites à Paris pendant dix ans, depuis le 1.er Janvier 1763, juſqu'au 31 Décembre 1772, par M. Meſſier, de l'Académie royale des Sciences, avec une Méthode pour analyſer ces ſortes d'Obſervations.

Par le P. COTTE, Prêtre de l'Oratoire & Curé de Montmorenci, Correſpondant de l'Académie royale des Sciences.

LES Obſervations Météorologiques, ſemblables aux Obſervations Aſtronomiques, ne peuvent être de quelque utilité qu'autant qu'on les rapproche & qu'on les compare les unes avec les autres. Toutes les différentes combinaiſons qu'on leur fait ſubir, & qu'on peut varier à l'infini, répandent néceſſairement du jour ſur les faits, ſervent à les détailler, à les éclaircir, & je ne doute pas qu'à force de retourner ces obſervations de différentes manières, nous n'acquérions par la ſuite des connoiſſances ſur les cauſes mêmes de ces faits météorologiques. Un journal d'obſervations Météorologiques, eſt pour le Naturaliſte, ce qu'eſt pour le Géomètre un Problème dont il ne peut trouver la ſolution qu'en le ſoumettant au calcul & à l'analyſe. La différence eſt qu'il y a beaucoup plus de termes inconnus dans les problèmes de la Météorologie que dans ceux de la Géométrie. Il faut, en Météorologie une longue ſuite d'obſervations pour former les données du problème, & il faut encore être ſûr de l'exactitude des Obſervateurs & de la perfection des inſtrumens dont ils ſe ſont ſervi, circonſtances qui contribuent beaucoup

à retarder les progrès de la ſcience Météorologique. Dans le grand nombre d'obſervations que nos prédéceſſeurs nous ont laiſſé, nous en avons à la vérité dont la ſcience & l'exactitude des Obſervateurs garantiſſent la bonté; mais le défaut des bons inſtrumens en diminue beaucoup le mérite; ainſi, avant que M. de Reaumur nous ait appris à conſtruire des thermomètres comparables, pouvoit-on compter ſur les obſervations que l'on faiſoit avec les thermomètres anciens? Ainſi, avant que l'on connut toutes les petites précautions qu'exige la conſtruction d'un bon baromètre, quel fond pouvoit-on faire ſur les obſervations faites avec des inſtrumens défectueux? On ne pouvoit que multiplier les erreurs, & s'éloigner de plus en plus du flambeau de la vérité.

Les bonnes Obſervations météorologiques ne datent donc que de quarante ou cinquante ans, encore y a-t-il beaucoup de choix à faire dans le grand nombre de celles que nous poſſédons. J'ai tâché de le faire de mon mieux, ce choix, en donnant dans mon *Traité de Météorologie* le précis des meilleures obſervations en ce genre; mais il s'en faut de beaucoup que je prétende être arrivé au bout de la carrière que j'ai commencé à me frayer. Les obſervations Météorologiques ſe multiplient tous les jours, & acquièrent auſſi de jour en jour de nouveaux degrés de perfection, ſoit du côté des Obſervateurs, ſoit du côté des inſtrumens; j'ai bien prévu que mon premier travail ne ſeroit qu'une foible eſquiſſe de celui qui me reſtoit à faire. J'ai donc formé dès-lors le deſſein d'extraire & d'analyſer toutes les obſervations qui me tomberoient entre les mains; & c'eſt pour ſuivre le plan que je me ſuis tracé que je donne aujourd'hui l'extrait & le réſultat des obſervations Météorologiques faites à Paris pendant dix ans par M. Meſſier. Tout ce que je pourrois dire à l'éloge de ce ſavant Obſervateur & de ſes excellentes obſervations, ſeroit infiniment au-deſſous de leur mérite. Il faudroit avoir parcouru, comme je l'ai fait, le journal de M. Meſſier qui contient ces Obſervations, pour pouvoir juger du zèle dont ce Savant eſt animé pour les progrès de la Phyſique, & de

l'exactitude ſcrupuleuſe qu'il apporte à tout ce qu'il fait. Il a ſu donner à ſes inſtrumens un degré de perfection & de préciſion que tout autre que lui auroit de la peine à obtenir. Il n'y a pas juſqu'à la propreté qui règne dans la manière dont ſes obſervations ſont peintes dans ſon Journal, qui n'annonce un Obſervateur patient, exact & laborieux. Et ce ne ſont pas les ſeules obſervations dont M. Meſſier s'occupe; celles-ci ne ſont qu'un délaſſement pour l'Obſervateur aſtronome qui enrichit tous les jours le Public d'une infinité d'Obſervations intéreſſantes, ſur-tout, ſur la marche des Comètes, dont la découverte ſemble lui être dévolue par un privilége excluſif.

Je reviens aux Obſervations météorologiques de M. Meſſier; elles méritent certainement qu'on les diſtingue de la foule, & qu'on leur donne des ſoins particuliers; c'eſt ce que j'ai fait, je n'ai épargné ni mon temps, ni mes peines pour en tirer tout le parti poſſible. C'eſt une bien foible reconnoiſſance pour tous les ſoins & pour l'aſſiduité qu'elles ont exigé de la part de cet exact Obſervateur. Ce travail que je préſente à l'Académie étoit néceſſaire pour qu'elle pût jouir des fruits de celui de M. Meſſier. Ce ſont d'excellens matériaux, mais épars, & qui avoient beſoin d'être raſſemblés, d'être mis chacun dans leur place pour former un enſemble utile & agréable. J'ai donc rédigé avec ſoin ces Obſervations, & je me ſuis fait pour cela une méthode dont je vais donner ici le détail, parce que je crois qu'il ſeroit eſſentiel que les Phyſiciens qui s'occupent à la rédaction de ces ſortes d'Obſervations, ſuiviſſent tous la même méthode; les conſéquences & les réſultats en ſeroient bien plus ſûrs. Je propoſe donc la mienne, non pas comme la meilleure en général, mais comme celle qui m'a paru la meilleure; ſi on y trouve des défauts, on voudra bien m'en avertir, & je me corrigerai; ſi on la trouve bonne, elle pourra ſervir de modèle à ceux qui s'engageront dans un pareil travail.

Je diviſe ce Mémoire en quatre parties. Dans la *première*, après avoir fait connoître les inſtrumens dont ſe ſert M. Plan de ce Mémoire.

Meſſier, & avoir donné une idée de l'ordre qu'il ſuit dans ſes Obſervations, je tracerai la méthode que j'ai ſuivie moi-même dans la rédaction de ſon Journal d'Obſervations. Dans la *ſeconde partie*, je mettrai ſous les yeux du Lecteur l'extrait & le réſultat des Tables que j'ai dreſſé en grand nombre, pour parvenir à la rédaction de celles de M. Meſſier. La *troiſième partie* contiendra les réſultats généraux de mes Tables de réduction; enfin, la *quatrième partie* indiquera la méthode que je ſuis pour rédiger tous les mois les Obſervations dont je fais part au public dans les Ouvrages périodiques, & à l'Académie à la fin de chaque année.

On voit que j'ai ſuivi dans mon travail la méthode que les Géomètres appellent *l'analyſe;* il doit néceſſairement en ſortir quelques rayons de lumière. Si nous avions ſeulement dix Obſervateurs Météorologiſtes, tels que M. Meſſier, répandus dans les différentes parties du monde, je ne doute pas que leurs obſervations combinées & rapprochées comme celles que je préſente ici, ne répandiſſent un très-grand jour ſur la ſcience Météorologique. Il y a lieu d'eſpérer de l'exactitude que l'on apporte actuellement à l'étude de la Nature, & de l'attention que l'on donne en particulier à tous les phénomènes qui intéreſſent la Météorologie, que nous ne tarderons pas à recueillir les fruits dont l'étude de cette Science eſt ſuſceptible.

PREMIÈRE PARTIE.

MÉTHODE pour réduire & analyſer les Obſervations Météorologiques.

Plan des Obſervations de M. Meſſier.

Les Obſervations de M. Meſſier ont été faites à Paris au collége Royal de France, depuis le 1.er Janvier 1763, juſqu'au 1.er Novembre 1771, & à l'hôtel de Clugny, depuis le 1.er Novembre 1771 juſqu'à préſent. M. Meſſier les continue toujours avec le même zèle & la même exactitude.

Ce ſavant Obſervateur ſe ſert de trois thermomètres, un à Mercure vide d'air, ayant huit pouces dix lignes de marche de la congélation à l'eau bouillante: ce thermomètre porte deux échelles; celle de M. de Reaumur, & celle de M. de l'Iſle. Le ſecond thermomètre dont M. Meſſier fait uſage eſt à eſprit-de-vin, il contient 28 degrés $\frac{1}{4}$ dans un pied, & porte les deux échelles de M.[rs] de Reaumur & Fahrenheit. Enfin, le troiſième thermomètre eſt auſſi à eſprit-de-vin, contenant 20 degrés $\frac{3}{4}$ dans un pied, & portant les trois échelles de M.[rs] de Reaumur, de l'Iſle & Fahrenheit. M. Meſſier a réglé lui-même au mois d'Août 1763 le thermomètre à mercure.

Deſcription des Inſtrumens.

Le baromètre dont M. Meſſier a fait uſage juſqu'au mois d'Octobre 1766, avoit été conſtruit avec ſoin; cependant il en conſtruiſit un autre, & par la comparaiſon qu'il fit de ce dernier avec le premier, il reconnut que dans ſon nouveau baromètre le mercure ſe ſoutenoit à 13 ou 14 centièmes plus haut que dans le premier. Au reſte, cette différence entre ces deux baromètres peut très-bien être indépendante des manipulations qu'on a ſuivie dans leur conſtruction. Du mercure plus ou moins parfait, plus ou moins purgé d'air, des verres de tubes de nature différente, tout cela a pu influer beaucoup ſur cette petite différence que M. Meſſier a remarqué entre ſes deux baromètres; ajoutez à cela que quelque ſoin qu'on ait pris à bien purger d'air un baromètre, il eſt de fait qu'à la longue le peu d'air qui eſt reſté dans le mercure, & qui n'a pu s'en dégager, ſe développe dans la partie vide du tube, & empêche le mercure de s'élever autant qu'il faiſoit auparavant: voilà ce qui oblige de les faire rebouillir de temps en temps. M. Meſſier appliqua à ſon nouveau baromètre une diviſion de *nonius*, qui donne les centièmes de pouce & les douzièmes de ligne. Il a reconnu qu'au Collége royal, où il a fait la plus grande partie de ſes Obſervations, le mercure ſe ſoutient une ligne trois dixièmes plus bas que ſur le bord de la Seine, au pont de la Tournelle.

M. Meſſier ne s'eſt pas ſervi d'anémomètre pour faire les

obſervations du vent, il s'en eſt rapporté aux girouettes des clochers qui ſuffiſent pour ce genre d'obſervations.

Heures des Obſervations.

Les Obſervations contenues dans le journal de M. Meſſier ſont faites ordinairement à trois heures différentes de la journée; ſavoir à ſept heures du matin, à midi & à dix heures du ſoir; mais M. Meſſier en fait ſouvent juſqu'à ſix, huit & dix par jour, ſur-tout dans les temps où les élévations & les abaiſſemens extrêmes du baromètre & du thermomètre indiquent quelque choſe de ſingulier dans l'état de l'atmoſphère.

Diviſion des Tables.

Les Tables ſont diviſées en huit colonnes; la *première* contient les jours du mois; la *ſeconde*, les heures de la journée où les Obſervations ont été faites; la *troiſième*, les élévations du mercure dans le baromètre; les *quatrième*, *cinquième* & *ſixième*, les degrés de chaleur & de froid indiqués par le thermomètre, ſelon les échelles de M.rs de Reaumur, de l'Iſle & Fahrenheit; la *ſeptième*, le vent qui règnoit; la *huitième*, l'état du ciel. Dans cette huitième colonne M. Meſſier nous apprend que le ciel a été ou ſerein ou couvert dans le moment où il obſervoit; il rend compte des grands vents qui ont ſoufflé, des pluies qui ſont tombées, ſoit le jour, ſoit la nuit, de la neige, de la grèle, du tonnerre, des aurores boréales & des autres météores. S'il a fait quelques remarques particulières & qui exigent des détails, on les trouve dans une page blanche qu'il a eu l'attention de ménager entre chacune des feuilles qui contiennent les Tables. C'eſt auſſi là qu'il rend compte des faits météorologiques contenus dans les papiers publics, & qu'il a ſoin d'en extraire pour les comparer avec les Obſervations qu'il faiſoit en même-temps à Paris. J'aurai ſoin de rapprocher tous ces faits dans une Table.

Tel eſt le plan des Obſervations intéreſſantes de M. Meſſier. Je vais maintenant tracer celui du travail que j'ai fait ſur ces Obſervations. Je ſuivrai pour cela l'ordre que chacune de ces Obſervations occupe dans le journal de M. Meſſier. Je ſerai attentif à accompagner ma narration d'exemples qui rendront mes opérations plus ſenſibles.

Le

Réduction des Observations du Baromètre.

Le journal de M. Messier contient, comme je l'ai dit, au moins trois observations du baromètre par jour. J'ai donc construit une Table que j'ai divisée en dix colonnes pour chacune des dix années d'observations; une onzième colonne contenoit les jours du mois. Je prenois l'élévation moyenne de chaque jour des dix années que je rapportois sur ma Table. Cette élévation moyenne étoit la somme de toutes les hauteurs observées, divisées par le nombre des observations.

EXEMPLE.

JANVIER 1770.		
HEURES.		*BAROMÈTRE.*
Matin...	7^h	28^p 5,5^l
1. Soir...	$1\frac{1}{2}$	28. 5,6
Soir...	$10\frac{1}{4}$	28. 4,7
$\frac{85^{po}\ 3{,}6^l}{3}$		= 28. 5,2

Cette opération faite pour chaque jour, m'a donné aussi pour chaque jour des dix années, une somme d'élévations moyennes que j'ai également divisée par le nombre des années, ou par dix. De ce calcul, résultoit nécessairement & exactement l'élévation moyenne du jour. Voilà le calcul que j'ai fait pour chacun des jours des dix années d'observations; d'où j'ai conclu, 1.° l'élévation moyenne de chaque jour, 2.° l'élévation moyenne de chaque mois, 3.° l'élévation moyenne de l'année. En voici un exemple.

JANVIER.

Jours du Mois.	1763.	1764.	1765.	1766.	1767.
	P. L.	P. L.	P. L.	P. L.	P. L.
1.	27. 10¼.	27. 10.	27. 5¼.	28. 0½.	28. 1¼
2.	28. 0.	27. 10.	27. 3¾.	27. 11.	27. 6.
3.	27. 10.	27. 10¼.	27. 3¼.	27. 9.	27. 6.
4.	27. 9¾.	28. 2½.	27. 5½.	27. 11¼.	27. 6¼.
5.	27. 10⅔.	27. 11½.	27. 6¼.	28. 0½.	27. 11.
6.	28. 1¼.	27. 9¼.	27. 5¼.	28. 1.	27. 9.
7.	28. 1.	27. 10.	27. 6.	28. 1½.	27. 10.
8.	28. 0.	28. 0½.	27. 6.	28. 0.	27. 8.
9.	27. 10.	28. 1¼.	27. 5.	28. 1.	27. 9¼.
10.	28. 0¾.	27. 11¼.	27. 7¼.	28. 0¼.	27. 9.
Élévation moyenne des 10 j.	27. 9,6	27. 10,8	27. 4,5	28. 0,0	27. 8,4
	1768.	1769.	1770.	1771.	1772.
	P. L.	P. L.	P. L.	P. L.	P. L.
1.	27. 5¼.	27. 9.	28. 5.	28. 0¾.	28. 1¼
2.	27. 7.	27. 9.	28. 2¼.	27. 10½.	28. 2¼.
3.	28. 0.	27. 10.	28. 3½.	27. 8.	28. 2¾.
4.	28. 0½.	28. 0¼.	27. 10¼.	27. 8½.	28. 0¾
5.	28. 1¼.	27. 9½.	27. 6¼.	27. 8½.	28. 2¼
6.	27. 11.	27. 11.	27. 4¾.	27. 10½.	28. 0.
7.	27. 8½.	28. 0½.	27. 7.	28. 0.	27. 4.
8.	27. 8¼.	28. 3¼.	27. 9¾.	27. 9½.	27. 2½.
9.	27. 4¾.	28. 2½.	27. 10.	27. 9½.	27. 7¼.
10.	27. 6.	27. 11½.	27. 3¼.	27. 9.	27. 10¾.
Élévation moyenne des 10 j.	27. 8,4	27. 10,8	27. 9,6	27. 9,6	27. 10,1

Jours du Mois.	Élévation moyenne de chaque jour.
	P. L.
1.	27. 10,10.
2.	27. 11,10.
3.	27. 9,10.
4.	27. 10, 4.
5.	27. 11, 6.
6.	27. 9,10.
7.	27. 9, 7.
8.	27. 9, 6.
9.	27. 9, 7.
10.	27. 9, 4.
Élévation moyenne des 10 j.	27. 10, 2.

J'ai fait auſſi pour chaque mois des dix années le relevé des plus grandes & des moindres élévations du mercure ; en

additionnant ces différentes élévations, il en eſt réſulté deux ſommes que j'ai diviſées par le nombre des années, ou par dix; les quotiens ont été la plus grande & la moindre élévation qui doivent avoir lieu chaque mois, *année commune.* J'en ai dreſſé une Table qui trouvera ſa place dans la *ſeconde partie de ce Mémoire.*

Réduction des Obſervations du Thermomètre.

Parmi les obſervations du Thermomètre, il faut diſtinguer les degrés de chaleur & les degrés de froid dans les mois où il gèle, tels que ceux de Janvier, Février, Mars, Novembre & Décembre. Les degrés de chaleur indiquent la quantité dont la liqueur du thermomètre eſt dilatée par la chaleur, & les degrés de froid indiquent la quantité de la condenſation que cette même liqueur éprouve. Dans les autres mois de l'année où les gelées ſont très-rares, le thermomètre ne donne que des degrés de chaleur ou de dilatation. J'ai donc été obligé, pour avoir le degré moyen de chaleur & de froid dans les mois où la gelée a lieu, de conſtruire une Table diviſée en vingt colonnes, outre celle qui contenoit les jours du mois. J'ai pris le degré moyen de chaleur & de froid qui a eu lieu chaque jour des dix années d'obſervation. Ce degré moyen eſt, comme dans les obſervations du baromètre, la ſomme de tous les degrés obſervés chaque jour, à différentes heures de la journée, diviſée par le nombre des obſervations.

EXEMPLE.

JANVIER 1770.	
HEURES.	*THERMOMÈT.*
Matin... 6 ½	— 1ᵈ ¼
10 Midi	1 ½
Soir... 10 ¼	— 1 ¼

$$\frac{\text{Ch. } 1^{d}\tfrac{1}{2}\ \text{Fr. } -\ 2^{d}\tfrac{1}{2}}{3} = -\ 1.$$

On voit dans cet Exemple, que le 10 Janvier 1770, la chaleur a été nulle, puisque le froid l'a emporté d'un degré sur la chaleur observée à midi. A l'égard des autres mois où la gelée n'a point lieu, la Table qui contient les degrés moyens de chaleur, doit être seulement divisée en dix colonnes, indépendamment de la onzième qui renferme les jours du mois. Je vais donner ici un modèle de l'opération dont je viens de parler, appliquée au mois de Janvier; cet exemple suffira pour faire entendre de quelle manière on doit opérer sur les autres mois.

JANVIER.

Jours du Mois.	1763.		1764.		1765.		1766.		1767.	
	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.
	D.	D.	D.	D.	D.	D.	D.	D.	D.	D.
1.	...	−1¾	8¼	...	3½	...	...	−6	1¾	
2.	...	−2¼	6¾	...	5	...	...	−5¾	1¼	
3.	...	−4¾	5	...	5¼	...	...	−6½	...	−0½
4.	...	−4¼	2¼	...	4	...	...	−3¼	...	−2
5.	...	−2¼	3¾	...	5½	...	...	−3½	...	−4¼
6.	...	−2	8	...	8¼	...	...	−6	...	−2
7.	...	−3	8¾	...	8¾	...	...	−6¼	...	−11
8.	...	−2¾	7¾	...	9	...	...	−4¼	...	−7¼
9.	...	−3¼	8	...	8¼	...	...	−7	...	−3¾
10.	...	−2	8¼	...	5½	...	...	−7¼	...	−4¾
Degre moy. des 10 jours.	...	−2.8	6. 7	...	6. 3	...	...	−5.6	1. 2	−4. 3

Suite de JANVIER.

Jours du Mois.	1768.		1769.		1770.		1771.		1772.	
	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.
	D.	D.	D.	D,	D.	D.	D.	D.	D.	D,
1.	...	—4	6	...	3	...	8 ½	...	2	
2.	...	—8	4	...	6 ½	...	7 ¾	...	1 ¼	
3.	...	—7 ¾	2 ¾	...	2 ¾	...	6 ½	...	1	
4.	...	—11	2 ¾	...	3 ¼	...	3	...	1 ¼	
5.	...	—12 ½	3	...	0 ½	...	2	...	0 ½	
6.	...	—10 ½	4 ¼	...	...	—1	1	...	2	
7.	...	—2 ½	3 ¼	...	...	—6 ¼	...	—0 ¼	2 ½	
8.	0 ¼	...	3 ¼	...	...	—4	...	—0 ¾	...	—0 ½
9.	2	...	2	...	...	—3	...	—0 ¼	2	
10.	2 ¼	...	2 ¼	...	...	—1	...	—1 ¾	3 ¼	
Degré moy. des 10 jours.	1. 5	—8.0	3. 3	...	3. 0	—3.0	4. 7	—0.8	1. 9	—0

Jours du Mois.	Degrés moyens de	
	Chaleur.	Froid.
	D.	D.
1.	3. 0	— 1. 1
2.	3. 1	— 1. 5
3.	2. 1	— 1. 8
4.	1. 5	— 2. 0
5.	1. 4	— 2. 2
6.	2. 2	— 2. 0
7.	2. 2	— 2. 7
8.	1. 9	— 1. 8
9.	2. 0	— 1. 7
10.	1. 5	— 1. 6
Degré moy. des 10 jours.	2. 1	— 1. 8

Réduction des Observations du Vent.

Les Tables que j'ai été obligé de construire pour réduire les observations du vent, sont plus compliquées que les précédentes. Comme le journal de M. Messier indique le vent qui a régné le matin, & celui qui a régné le soir, j'étois curieux de savoir s'il y avoit quelque uniformité dans les variations du vent le matin & le soir. J'ai donc commencé par dresser, pour chaque mois, une Table qui contenoit vingt-une colonnes. Dans la première, étoient placés les jours du mois; des vingt colonnes qui suivoient, il y en avoit deux pour chacune des dix années d'observations, l'une de ces colonnes indiquoit les vents qui avoient régné chaque jour le matin, & l'autre marquoit la même chose pour le soir. J'ai donc été obligé de transporter sur ces Tables toutes les observations du vent contenues dans le journal de M. Messier, ce que j'ai exécuté de la manière suivante.

JANVIER.

Jours du Mois.	1763.		1764.		1765.		1766.		1767.	
	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.
1.	N. O.	O.	O.	O.	S.	S.	N. E.	N. E.	S. O.	S. O.
2.	O.	S. E.	S.	S.	S. E.	S. E.	N.	N.	N. O.	N.
3.	N.	E.	O.	N. O.	S.	S.	N. E.	N. E.	N. O.	N. O.
4.	N. E.	E.	S.	O.	N. O.	N. O.	N.	N.	N. E.	N.
5.	N.	N.	S.	S.	S.	S.	N. O.	N.	N.	N. E.
6.	N.	N.	S.	S.	S. O.	S. O.	N. E.	N.	O.	O.
7.	N.	N.	S.	S.	S.	S.	N.	N. E.	N. E.	N. E.
8.	E.	E.	O.	S.	S.	S.	O.	O.	N. O.	N. O.
9.	E.	E.	S.	S.	O.	S.	N. E.	N.	O.	O.
10.	N.	N.	S.	S. O.	S. O.	S. O.	N. E.	N. E.	S.	S.

	1768.		1769.		1770.		1771.		1772.	
	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.
1.	S. E.	S. E.	S.	S.	S. O.	O.	S.	S. O.	N. E.	N. E.
2.	N. E.	N. E.	S.	S.	N. O.	N. O.	S. O.	S. O.	N. E.	N. E.
3.	N. E.	N. E.	S. O.	S. O.	N.	N. E.	S. O.	S. O.	N. E.	N. E.
4.	N. E.	N. E.	N. E.	E.	S. O.	O.	S. O.	S. O.	N.	N.
5.	N. E.	E.	E.	E.	O.	O.	S. O.	O.	N. E.	N. E.
6.	E.	S. E.	E.	E.	S. O.	O.	O.	O.	S.	S.
7.	S. E.	S.	N. O.	N.	N. E.	N.	N.	S. O.	S. O.	S. O.
8.	S.	S.	N.	N.	N. E.	O.	N. O.	N. O.	S. O.	S. O.
9.	S. E.	S.	E.	S.	N. E.	S. O.	O.	N. O.	O.	O.
10.	S.	S. O.	S.	S.	S. O.	O.	S. O.	O.	S. O.	S. O.

Après avoir ainſi fait le relevé de tous les vents qui ont régné chaque jour, matin & ſoir, pendant dix ans, j'ai dreſſé une ſeconde Table qui marquoit le nombre de fois que chacun des huit vents principaux avoit régné chaque jour du mois, matin & ſoir. Cette Table étoit diviſée en dix-ſept colonnes; la première étoit pour les jours du mois; dans les ſeize autres, dont huit pour le matin & huit pour le ſoir, j'avois écrit en tête le nom de chacun des huit vents principaux. Cette Table ſervoit à réduire celle que je viens de décrire ci-deſſus. Je comptois le nombre de fois que chacun de ces vents avoit régné chaque jour pendant les dix années d'obſervations, & j'écrivois ce nombre dans les Tables dont je vais donner un modèle. Il m'étoit aiſé enſuite de déterminer le vent dominant de chacun des jours du mois; il ſuffiſoit de voir dans ma Table quel vent avoit régné plus ſouvent tel jour pendant dix ans. Lorſque je trouvois que deux vents avoient régné dans un même jour, à-peu-près autant de fois, je les marquois tous les deux pour ce jour dans le calendrier Météorologique, ayant l'attention de donner la première place à celui des deux qui avoit été le plus dominant. Voici un modèle de cette ſeconde Table.

JANVIER.

Jours du Mois.	MATIN.							
	NORD.	Nord-Eſt.	Nord-O.	SUD.	Sud-Eſt.	Sud-O.	EST.	OUEST.
1.	......	2.	1.	3.	1.	2.	......	1.
2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.	......	1.
3.	2.	3.	1.	1.	......	2.	......	1.
4.	2.	4.	1.	1.	......	2.		
5.	2.	2.	1.	2.	......	......	2.	1
6.	1.	1.	......	2.	......	2.	2.	2.
7.	3.	2.	1.	2.	1.	1.		
8.	1.	1.	2.	2.	......	1.	1.	2.
9.	......	2.	......	1.	1.	......	2.	4.
10.	1.	1.	......	4.	......	4.		
TOTAL des Vents	13.	20.	8.	20.	4.	16.	7.	12.
	SOIR.							
	NORD.	Nord-Eſt.	Nord O.	SUD.	Sud Eſt.	Sud O.	EST.	OUEST.
1.	......	2.	......	2.	1.	2.	......	3.
2.	1.	2.	1.	2.	2.	2.		
3.	......	4.	2.	1.	......	2.	1.	
4.	3.	1.	2.	......	......	......	2.	2.
5.	2.	2.	......	2.	......	......	2.	2.
6.	2.	......	......	2.	1.	1.	1.	3.
7.	3.	2.	......	3.	......	2.		
8.	1.	......	2.	3.	......	1.	1.	2.
9.	1.	......	1.	4.	......	1.	1.	2.
10.	1.	1.	......	2.	......	4.	......	2.
TOTAL des Vents.	14.	14.	8.	21.	4.	15.	8.	16.

Rien de plus facile, d'après cette Table de déterminer les vents dominans de chaque jour du mois, de la manière indiquée dans la Table ſuivante,

JANVIER.

JANVIER.

Jours du Mois.	VENTS DOMINANS.
1.	Sud & Sud-Oueſt.
2.	Nord-Eſt & Nord-Oueſt.
3.	Nord-Eſt & Sud-Oueſt.
4.	Nord & Nord-Eſt.
5.	Nord & Nord-Eſt.
6.	Oueſt & Sud.
7.	Nord & Sud.
8.	Sud & Sud-Oueſt.
9.	Oueſt & Sud.
10.	Sud-Oueſt & Sud.
Vents domin. des 10 jours.	Sud & Sud-Oueſt.

Enfin, le dernier objet des Obſervations de M. Meſſier, eſt l'état du Ciel, dont ce Savant rend compte chaque fois qu'il indique l'élévation du mercure, & le degré de chaleur ou de froid. Son Journal renferme exactement les différens états du ciel pendant la matinée, la ſoirée & la nuit de chaque jour. J'étois curieux de ſavoir s'il y avoit quelque proportion dans la manière dont les pluies ſont diſtribuées le jour & la nuit; ſi, par exemple, il pleut & neige plus ſouvent le jour que la nuit, ou plus fréquemment la nuit que le jour. Il m'étoit facile de ſatisfaire ma curioſité avec le ſecours des Tables de M. Meſſier. J'ai donc dreſſé, pour chaque mois une Table diviſée en dix colonnes. La *première* contenoit les jours du mois, la *ſeconde* & la *troiſième* indiquoient le nombre de fois que la pluie ou la neige étoit tombée le jour, & les *quatrième* & *cinquième*, marquoient la même choſe pour la nuit, la *ſixième* contenoit les jours ſereins, la *ſeptième* celui des jours couverts, les *huitième*, *neuvième* & *dixième*, le

nombre des jours où l'on avoit eu du brouillard, du tonnerre ou quelque aurore boréale.

EXEMPLE.

JANVIER.

Jours du Mois.	Jour.		Nuit.		Serein.	Couvert	Brouill.	Tonn.	Aurore boréale.
	Pluie.	Neige.	Pluie.	Neige.					
1.	5.	1.	2.	1.	1.	9.	1.		
2.	4.	.....	2.	.....	4.	6.	1.		
3.	2.	1.	3.	1.	4.	6.	1.		
4.	3.	1.	.....	1.	5.	5.			
5.	1.	2.	1.	2.	3.	7.			
6.	2.	2.	1.	1.	2.	8.			
7.	3.	1.	2.	4.	5.	5.	1.		
8.	2.	3.	1.	2.	2.	8.	1.		
9.	3.	2.	.....	3.	2.	9.			
10.	3.	.....	3.	.....	1.	8.			
Total des 10 j.	28.	13.	15.	15.	29.	71.	5.		

Il résulte de cette Table, que le 1.er Janvier, par exemple, dans l'espace de dix ans, il est tombé de la pluie cinq fois pendant la journée, & deux fois pendant la nuit, & de la neige une fois le jour & une fois la nuit; que le ciel a été une fois serein & neuf fois couvert, & qu'il n'y a eu qu'une seule fois du brouillard. Cette opération répétée sur chacun des jours des dix années d'observations, j'en ai conclu facilement la température de chaque jour de l'année moyenne. Lorsque le nombre des jours sereins a été à peu-près égal à celui des jours couverts, j'ai indiqué la température qui en résultoit, par le terme de *variable*. Voici un modèle des résultats de la Table précédente.

JANVIER.

Jours du Mois.	État du Ciel.
1.	couvert, pluie.
2.	variable.
3.	*idem.*
4.	*idem.*
5.	*idem*, neige.
6.	couvert.
7.	variable, neige.
8.	couvert, neige.
9.	*idem.*
10.	couvert, pluie.
Temps moyen	variable, humide.

Tel eſt le plan du premier travail que j'ai été obligé d'entreprendre pour pouvoir dreſſer le calendrier Météorologique, qui occupe la première place parmi les Tables contenues dans la *ſeconde partie de ce Mémoire.* On n'auroit pas de ce calendrier l'idée que j'en ai conçue moi-même en le rédigeant, ſi on le regardoit comme devant ſervir à prédire la température qui doit avoir lieu chaque jour de l'année, ſi, dis-je, on le comparoit à ces almanacs de Liége, de Troies, &c. où l'on met ces ſortes de prédictions. Celles de mon calendrier ſeroient peut-être plus fondées que ces dernières, puiſqu'elles ont pour baſe une ſuite d'obſervations faites exactement pendant dix ans. Mais, 1.° elles ne pourroient ſervir que dans le climat de Paris. 2.° Il s'en faut de beaucoup que je croie que dix années d'obſervations ſuffiſent pour que l'on puiſſe en conclure ſans erreur la température moyenne de chaque jour. A peine cent années d'obſervations pourroient-elles donner quelques réſultats généraux, toujours ſujets aux exceptions dans un climat comme le nôtre, où la température Calendrier Météorologiq.

eſt ſi inconſtante. S'il s'agiſſoit des pays ſitués vers l'Équateur où les vents ſont toujours conſtans, & où, par conſéquent, la température ne varie preſque pas, quatre ou cinq années d'obſervations fourniroient pour ce pays des réſultats plus ſûrs, que vingt années n'en fourniroient pour le nôtre. Ainſi le véritable point de vue ſous lequel on doit enviſager mon calendrier Météorologique, c'eſt de le regarder comme le tableau fidèle des vents dominans, des élévations moyennes du Baromètre & du Thermomètre, & de l'état moyen du ciel pour chaque jour des dix années d'obſervations dont il eſt le réſultat; je parle de ce qui eſt paſſé, & non pas de ce qui arrivera. Nous ne pouvons, juſqu'à préſent, tirer d'autres fruits des obſervations Météorologiques, en les réſumant, que de nous procurer des réſultats généraux ſur l'élévation moyenne du mercure, ſur ſes plus grandes élévations & ſes plus grands abaiſſemens, ſur les plus grands, les moindres & les moyens degrés de chaleur & de froid, ſur le nombre moyen des jours de pluie ou de neige, des jours ou ſereins ou couverts, du nombre de fois que le tonnerre ſe fait entendre année commune. N'eſpérons pas d'en obtenir davantage, quant-à-préſent; ne nous laſſons cependant pas d'obſerver; les nouvelles Obſervations ſerviront à confirmer ou à rectifier nos premiers réſultats, & quand nous ſerons une fois aſſurés de leur exactitude, nous pourrons faire des tentatives pour tirer de ces réſultats généraux quelque choſe de plus particulier & de plus poſitif ſur la température des ſaiſons, des mois, & des jours même de ce qu'on appelle l'*année moyenne*.

Tables des réſultats généraux, & de ceux du Calendrier Météorologiq.

Je ne préſente donc ici que des réſultats généraux, & pour les obtenir, ces réſultats, il falloit néceſſairement entreprendre le travail que je viens de décrire. En effet, les Tables générales dont on a eu juſqu'à préſent le détail, m'ont procuré des réſultats que j'ai eu ſoin de rédiger & de rapprocher dans d'autres Tables d'une plus petite étendue que les premières, & où les objets, ainſi reſſerrés, préſentent des faits qui ont quelque choſe de plus net & de plus précis. Les Tables

générales m'ont donné pour chaque mois des dix années d'obſervations; 1.° le vent dominant; 2.° le plus grand, le moindre & le moyen degré de chaleur & de froid; 3.° la plus grande, la moindre & la moyenne élévation du mercure, &c. Voilà les différens objets que j'ai eu en vue en conſtruiſant les Tables qui ſuivent ici le Calendrier météorologique.

J'ai dreſſé une première Table qui ne ſe trouve point dans ce Mémoire, parce que celle que j'y donne, & qui eſt intitulé *II.^e Table*, renferme les mêmes objets rangés dans un ordre différent. Cette première Table étoit diviſée en onze colonnes, & elle ſuivoit l'ordre des dix années d'obſervations. Dans la *première colonne* étoient les mois, dans la *ſeconde*, le vent dominant de chaque mois; dans la *troiſième* & la *quatrième*, les plus grands & les moindres degrés de chaleur & de froid; les *cinquième* & *ſixième* indiquoient pour chaque mois les degrés moyens de chaleur & de froid; dans la *ſeptième*, étoient marquées le jour & l'heure de la plus grande élévation du mercure; la *huitième* indiquoit cette plus grande élévation; la *neuvième* & la *dixième* montroient la même choſe pour la plus petite élévation; & dans la *onzième* ſe trouvoit l'élévation moyenne, auſſi pour chaque mois. J'ai fait la même choſe pour chacune des dix années d'obſervations. Mon deſſein étoit d'obtenir pour chaque année un réſultat général que je pus comparer avec les réſultats du Calendrier, & de ceux de la ſeconde Table dont je vais parler.

Cette *II.^e Table*, ne diffère de la précédente, que parce que j'y ai ſuivi l'ordre des mois, au lieu de ſuivre celui des années; la diviſion des colonnes eſt la même que dans la Table que je viens de décrire, avec cette différence que la première colonne contient les années, au lieu de contenir les mois. Le travail que j'avois fait pour les jours, dans le calendrier, je l'ai fait ici pour les mois. Un coup-d'œil jeté ſur cette Table développera mieux le plan que j'y ai ſuivi, que tout ce que j'en pourrois dire ici. J'ai donc eu pour chaque mois un réſultat qui étoit celui de dix années d'obſervations.

Je préſente dans la *III.^e Table*, tous les réſultats que

chaque mois m'avoit fournis, pour parvenir à un résultat général, qui est celui de l'année moyenne. Je donne de même dans la *IV.^e^ Table* le résultat du calendrier météorologique, & dans la *V.^e^* ceux que j'avois obtenus de la Table où je suivois l'ordre des années; voilà donc trois résultats pour l'année moyenne, que je rapproche dans la *VI.^e^ Table*, & qui me produisent enfin le résultat le plus général & le plus exact, auquel on puisse espérer de parvenir, en fait de météorologie *(a)*.

La *VII.^e^ Table* a pour but de montrer combien de fois chacun des huit vents principaux a régné chaque mois, matin & soir, dans l'espace de dix années. Cette Table m'a servi à dresser la *VIII.^e^* qui indique le nombre de fois que chaque vent doit souffler par mois, tant le matin que le soir. On remarquera que dans cette Table, comme dans le calendrier météorologique, je suppose pour chaque jour deux vents, dont l'un des deux doit dominer.

On verra dans la *IX.^e^ Table*, quel a été le nombre des jours de pluie ou de neige, tant le jour que la nuit; des jours couverts & sereins, de ceux où il y a eu du brouillard, où l'on a entendu le tonnerre, où l'aurore boréale s'est montrée pendant dix ans *(b)*. Je me suis servi de cette même Table pour construire la *X.^e^* où l'on trouve combien de fois ces mêmes phénomènes ont lieu chaque mois de l'année moyenne. Dans la Table suivante, qui est la *XI.^e^*, ce sont encore les

(a) Il faut faire attention que dans cette Table, & dans celle de la *troisième partie de ce Mémoire*, la quantité qui indique le *plus grand & le moindre degré de chaleur*, est le quotient de la somme de tous les degrés extrêmes du thermomètre dans chaque mois de l'*année moyenne*, divisée par le nombre des mois. C'est-à-dire que lorsqu'on voudra comparer les plus grands & les moindres degrés de chaleur d'une année avec ceux de l'*année moyenne*, il faudra additionner tous les degrés extrêmes observés chaque mois, & diviser cette somme par le nombre des mois, on verra en quoi le quotient différera de celui de l'*année moyenne;* on comprend bien qu'il faut opérer séparément sur les degrés extrêmes de chaleur, & sur les degrés extrêmes de froid.

(b) Je soupçonne que M. Messier n'a pas tenu compte dans son journal de toutes les aurores boréales qui ont paru; j'en juge par le petit nombre de celles dont il parle.

mêmes résultats pour l'année moyenne, mais ils sont extraits de la *I.ere Table*, ou du calendrier météorologique.

Les résultats des *X.e* & *XI.e Table* sont rapprochés dans la *XII.e* afin de parvenir au résultat général de l'année moyenne.

Je donne dans la *XIII.e Table*, 1.° les degrés extrêmes & peu ordinaires de chaleur & de froid, observés à Paris & en différens pays, pendant les dix années d'observations; 2.° les élévations & les abaissemens peu communs, du Mercure, observés aussi à Paris pendant dix ans.

J'ai comparé dans la *XIV.e Table*, les observations que M. Messier a faites à Paris pendant cinq ans, depuis 1768, jusqu'en 1772, avec celles que j'ai faites à Montmorenci dans le même temps, & j'en donne les résultats.

La *XV.e Table* est le tableau des faits météorologiques observés en différens pays, comparés avec la température qui avoit lieu à Paris dans le même temps.

Enfin, j'ai cru devoir placer dans la *XVI.e & dernière Table*, le rapport du thermomètre de M. de Reaumur, avec ceux de M.rs de l'Isle & Farhenheit. J'ai déjà donné ce rapport dans mon *Traité de Météorologie*, mais je n'avois divisé ma Table que par degrés, au lieu que celle qu'on trouvera ici est divisée par quart de degrés; elle est l'extrait fidèle des observations journalières que M. Messier fait du thermomètre, relativement à ces trois échelles. Cette Table s'étend depuis le zéro de M. de Reaumur, ou le terme de la congélation jusqu'à 15 degrés au-dessous de ce terme; & ensuite depuis le même point de zéro jusqu'à 32 degrés au-dessus. Ce sont les deux points extrêmes où l'on a vu descendre & monter la liqueur du thermomètre dans le climat de Paris.

Après cette explication de mes Tables, je vais les placer ici de suite; on fera bien de jeter un coup-d'œil sur chacune de ces Tables, à mesure qu'on lira le détail que je viens d'en donner, on en saisira mieux l'esprit & le plan.

SECONDE PARTIE.

Extrait des Tables Météorologiques de M. Messier.

I.ère Table. Calendrier Météorologique, où l'on trouve, 1.° le vent dominant; 2.° le degré moyen de chaleur suivant les trois échelles de M.rs de Reaumur, de l'Isle & Fahrenheit; 3.° l'élévation moyenne du mercure; 4.° l'état moyen du ciel, qui doivent avoir lieu chaque jour de l'année commune.

II.e Table. Résultats des Tables d'Observations de M. Messier, où l'on trouve pour chaque mois des dix années d'observations; 1.° le vent dominant; 2.° le plus grand, le moindre & le moyen degré de chaleur & de froid; 3.° la plus grande, la moindre & la moyenne élévation du mercure.

III.e Table. Résultats de la II.e Table, où l'on trouve pour chaque mois de l'*année commune*, 1.° le vent dominant, &c. comme dans la Table précédente.

IV.e Table. Résultats de la I.re Table, ou du Calendrier Météorologique, où l'on trouve pour chaque mois de l'*année commune*, 1.° le vent dominant, &c. comme ci-dessus.

V.e Table. Résultats de la Table où j'indiquois pour chaque mois des dix années d'observations, 1.° le vent dominant, &c. comme ci-dessus.

VI.e Table. Résultats des trois Tables précédentes où l'on trouve plus exactement, 1.° les vents dominans, &c. qui doivent avoir lieu dans l'*année commune.*

VII.e Table. Résultats des Observations faites sur les vents qui ont régné à Paris pendant dix ans, où l'on indique combien de fois chacun des huit vents principaux a soufflé chaque mois le matin & le soir, dans le même espace de temps.

VIII.e Table. Résultats de la Table précédente, où l'on trouve combien de fois les huis vents principaux doivent souffler chaque mois de l'*année commune.*

IX.e Table. Résultats du nombre de jours de pluie ou de neige, des jours couverts ou sereins, des brouillards, des tonnerres

tonnerres & des aurores boréales, pendant les dix années d'observations.

X.e Table. Résultats de la Table précédente, où l'on trouve pour chaque mois de l'*année commune*, le nombre des jours de pluie ou de neige, &c. comme ci-dessus.

XI.e Table. Résultats de la I.re Table, ou du Calendrier Météorologique, où l'on trouve pour chaque mois de l'*année commune*, le nombre des jours de pluie ou de neige, &c. comme ci-dessus.

XII.e Table. Résultats des deux Tables précédentes où se trouve plus exactement, pour l'*année commune*, le nombre des jours de pluie ou de neige, &c. comme ci-dessus.

XIII.e Table. État des élévations & des abaissemens extrêmes & peu ordinaires du mercure, des degrés extrêmes & peu communs de froid & de chaleur, observés pendant dix ans à Paris & ailleurs.

XIV.e Table. Comparaison des observations faites à Paris par M. Messier depuis 1768, jusqu'en 1772, avec celles que j'ai faites pendant le même-temps à Montmorenci.

XV.e Table. Comparaison des phénomènes météorologiques observées en différens pays éloignés, avec les températures qui avoient lieu dans le même-temps à Paris.

XVI.e Table. Rapport des trois échelles des thermomètres de M.rs de Reaumur, de l'Isle & Fahrenheit, comparées entre elles & divisées en quart de degrés.

Il me suffira d'avoir détaillé ici les objets qui sont contenus dans les Tables suivantes; je me contenterai de les désigner par *I.re*, *II.e*, *III.e Table*, *&c.* on voudra bien avoir recours à l'exposé que je viens d'en faire.

I.ere TABLE. *JANVIER.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	S. & S.O.	1,9.	149 ¼.	36 ¼.	27. 10,10	couvert, pluie.
2.	N.E. - N.O.	1,5.	150 ⅛.	35 ⅜.	27. 11,10	variable.
3.	N.E. - S.O.	0,3.	152 ½.	32 ½.	27. 9,10	*idem.*
4.	N. - N.E.	0,5.	150 ⅛.	33 ⅛.	27. 10,4	*idem.*
5.	N. - N.E.	—0,8.	154 ½.	30 ⅓.	27. 11,6	variable, neige.
6.	O. - S.	0,2.	152.	32 ¼.	27. 9,10	couvert.
7.	N. - S.	—0,5.	154.	31.	27. 9,7	variable, neige.
8.	S. - S.O.	0,1.	149 ½.	32 ⅛.	27. 9,6	couvert, neige.
9.	O. - S.	0,3.	152.	32 ½.	27. 9,7	*idem.*
10.	S-O. - S.	0,0.	153.	32.	27. 9,4	couvert, pluie.
11.	S. - N.	1,2.	152.	34 ½.	27. 9,11	couvert.
12.	O. - S.	1,0.	151.	34 ¼.	27. 10,8	*idem.*
13.	S.	1,7.	149 ¾.	35 ¼.	27. 11,3	*idem*, brouillard.
14.	S. - S.O.	2,0.	149 ⅛.	36 ½.	27. 11,3	variable.
15.	S.	1,5.	150 ⅛.	35 ⅛.	27. 10,4	*idem.*
16.	S.O. - S.	2,2.	148 ¾.	36 ¾.	27. 9,9	*idem*, pluie.
17.	S.	0,5.	152 ¼.	33 ⅛.	27. 9,10	couvert.
18.	S.	0,0.	153.	32.	27. 9,8	*idem*, pluie.
19.	N. E. - S.	0,3.	152 ½.	32 ½.	27. 9,2	couvert.
20.	N. E.-N.	0,5.	152 ¼.	33 ⅛.	27. 8,11	*idem*, pluie.
21.	N. - N. E.	1,1.	151.	34 ½.	27. 10,10	variable.
22.	N. E. - S.	1,2.	150 ¾.	34 ½.	27. 11,7	couvert, pluie.
23.	N.E. - S.O.	2,6.	148 ¼.	37 ¾.	27. 11,3	*idem.*
24.	S.O. - S.	3,4.	146 ½.	39 ½.	28. 0,7	*idem.*
25.	S. - S.O.	4,2.	144 ½.	41 ½.	28. 0,9	couvert.
26.	S. - S.O.	3,2.	147.	39.	28. 0,10	variable, brouillard.
27.	S. - S. E.	3,1.	147 ¼.	38 ⅞.	28. 0,3	ſerein.
28.	S.O. - S.	4,4.	144 ½.	42.	27. 11,6	variable, pluie.
29.	N.	3,8.	145 ½.	40 ½.	28. 0,1	couvert, pluie.
30.	S. - S. E.	3,2.	147.	39.	28. 0,1	couvert.
31.	S. O.	3,9.	145 ½.	40 ¾.	27. 10,10	*idem*, pluie, brouillard

Suite de la I.[ere] Table. *FÉVRIER.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	O. & S. O.	4,1.	$145\frac{1}{4}$.	$41\frac{1}{8}$.	27. 10,6	variable, pluie.
2.	S. - N. O.	3,5.	$146\frac{1}{3}$.	$39\frac{3}{4}$.	27. 10,5	couvert, pluie.
3.	O. - N. E.	3,5.	$146\frac{1}{3}$.	$39\frac{3}{4}$.	27. 10,9	variable, pluie.
4.	S. - S. O.	2,6.	$148\frac{1}{4}$.	$37\frac{1}{2}$.	27. 10,7	variable.
5.	S. E. - S. O.	3,0.	$147\frac{1}{4}$.	$38\frac{3}{4}$.	27. 10,3	couvert, pluie.
6.	N. E. - S. O.	2,8.	$147\frac{3}{4}$.	$38\frac{1}{8}$.	27. 10,7	*idem.*
7.	N. E. - S.	2,7.	$148\frac{1}{4}$.	$37\frac{1}{2}$.	27. 11,0	*idem*, neige.
8.	N. - S. O.	2,5.	$148\frac{1}{4}$.	$37\frac{1}{2}$.	27. 10,6	variable.
9.	N. - S.	2,0.	$149\frac{1}{8}$.	$36\frac{1}{2}$.	27. 10,6	couvert.
10.	S. - O.	3,0.	$147\frac{1}{4}$.	$38\frac{3}{4}$.	27. 9,7	*idem*, neige.
11.	S. - S. O.	3,2.	$146\frac{3}{4}$.	$39\frac{1}{4}$.	27. 9,10	couvert.
12.	S. - S. O.	3,8.	146.	$40\frac{3}{8}$.	27. 9,11	variable.
13.	S. - S. O.	4,0.	$145\frac{1}{3}$.	41.	27. 10,7	couvert, pluie.
14.	S. - S. O.	4,7.	144.	$42\frac{3}{4}$.	28. 0,0	*idem.*
15.	S. O. - S.	4,5.	$144\frac{1}{2}$.	$42\frac{1}{4}$.	27. 11,1	*idem.*
16.	S. - S. O.	4,7.	144.	$42\frac{3}{4}$.	27. 11,3	couvert.
17.	S. - S. E.	5,0.	$143\frac{1}{2}$.	$43\frac{1}{4}$.	27. 10,10	*idem*, pluie.
18.	S. - E.	4,7.	$144\frac{1}{4}$.	$42\frac{1}{2}$.	27. 10,10	*idem.*
19.	S. - O.	4,2.	$144\frac{7}{8}$.	$41\frac{5}{8}$.	27. 11,10	variable, pluie.
20.	S. - N. E.	4,3.	145.	$41\frac{3}{4}$.	28. 0,1	couvert.
21.	S. O. - O.	5,1.	$143\frac{1}{4}$.	$41\frac{1}{4}$.	28. 0,10	variable.
22.	S.	4,4.	$144\frac{1}{2}$.	$42\frac{1}{4}$.	27. 10,10	*idem.*
23.	S. - O.	5,4.	$142\frac{3}{4}$.	$44\frac{1}{4}$.	27. 10,7	couv. pluie, brouillard
24.	N. E.	3,8.	$145\frac{1}{8}$.	$40\frac{1}{2}$.	27. 11,9	couvert, brouillard.
25.	S. O.	4,8.	$143\frac{3}{4}$.	$42\frac{7}{8}$.	27. 11,1	couvert, grande pluie.
26.	N. E. - O.	4,8.	144.	$42\frac{3}{4}$.	27. 10,10	*idem.*
27.	S. - O.	5,9.	$141\frac{5}{8}$.	$45\frac{1}{4}$.	27. 9,11	*idem.*
28.	S. - O.	5,8.	$141\frac{3}{4}$.	$45\frac{1}{8}$.	27. 9,6	variable, pluie.
29.	S. - S. O.	5,4.	$142\frac{3}{4}$.	$44\frac{1}{4}$.	27. 9,4	couvert.

Suite de la I.^{ere} Table. *MARS.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*		
1.	O. & S. O.	4,8.	144.	43.	27. 9,10	ferein.
2.	O. - S.O.	6,1.	$141\frac{1}{4}$.	$45\frac{5}{8}$.	27. 9,6	couvert, pluie.
3.	O.	5,7.	$142\frac{1}{4}$.	45.	27. 10,1	*idem.*
4.	S. - S. E.	5,0.	$143\frac{1}{2}$.	$43\frac{1}{4}$.	27. 10,8	variable, pluie.
5.	N. O. - S.O.	4,7.	$144\frac{1}{2}$.	$42\frac{1}{4}$.	27. 11,3	*idem.*
6.	O. - N.O.	4,8.	144.	43.	27. 11,6	ferein.
7.	N. E. - O.	4,7.	$144\frac{1}{4}$.	$42\frac{3}{4}$.	27. 11,0	*idem.*
8.	E. - N. E.	4,0.	$145\frac{1}{3}$.	41.	27. 11,8	*idem.*
9.	N. E.	4,1.	$145\frac{1}{4}$.	$41\frac{1}{8}$.	27. 10,11	variable.
10.	E. - N. E.	4,6.	$144\frac{3}{8}$.	$42\frac{3}{8}$.	27. 9,6	ferein.
11.	N. E.	4,1.	$145\frac{1}{4}$.	$41\frac{1}{8}$.	27. 9,7	variable.
12.	S. - N. E.	5,0.	$143\frac{1}{2}$.	$43\frac{1}{4}$.	27. 9,10	*idem.*
13.	S. - N. E.	5,6.	$142\frac{1}{2}$.	$44\frac{3}{8}$.	27. 9,10	couvert, pluie.
14.	N. - N. E.	5,5.	$141\frac{1}{2}$.	$44\frac{3}{8}$.	27. 10,3	*idem.*
15.	N. E. - O.	5,5.	$142\frac{1}{2}$.	$44\frac{3}{8}$.	27. 11,3	ferein.
16.	S. - O.	4,9.	$143\frac{3}{4}$.	$43\frac{1}{8}$.	27. 11,3	variable, pluie.
17.	S. E. - S. O.	6,1.	$141\frac{1}{4}$.	$45\frac{3}{4}$.	27. 11,2	*idem.*
18.	O. - N. O.	5,5.	$142\frac{1}{2}$.	$44\frac{3}{8}$.	27. 11,2	variable.
19.	N. - S.O.	4,6.	$144\frac{3}{8}$.	$42\frac{3}{8}$.	27. 11,3	couvert.
20.	S. - O.	6,0.	$141\frac{1}{2}$.	$45\frac{1}{2}$.	27. 11,6	*idem*, pluie.
21.	N. E.	4,4.	$144\frac{3}{4}$.	$42\frac{1}{8}$.	28. 0,1	variable.
22.	N. E. - O.	4,4.	$144\frac{3}{4}$.	$42\frac{1}{8}$.	27. 11,5	couvert, pluie.
23.	N.E. - N.O.	4,2.	$144\frac{7}{8}$.	$41\frac{5}{8}$.	28. 0,8	*idem*, neige.
24.	N.E. - N.O.	4,2.	$144\frac{7}{8}$.	$42\frac{5}{8}$.	28. 0,6	ferein.
25.	S. O.	4,5.	$144\frac{1}{2}$.	$42\frac{1}{4}$.	27. 11,6	variable.
26.	S. - O.	5,6.	$142\frac{1}{2}$.	$44\frac{3}{8}$.	27. 11,0	*idem*, pluie, neige.
27.	N. - N. E.	4,3.	$144\frac{7}{8}$.	$41\frac{5}{8}$.	27. 11,0	variable.
28.	N.E. - S.O.	5,0.	$143\frac{1}{2}$.	$43\frac{1}{4}$.	28. 0,8	ferein.
29.	S.	6,1.	$141\frac{1}{4}$.	$45\frac{3}{4}$.	27. 11,0	*idem.*
30.	S. - E.	6,0.	$141\frac{1}{2}$.	$45\frac{1}{2}$.	27. 11,2	variable, pluie.
31.	N. E. - S.O.	6,8.	140.	$47\frac{1}{2}$.	27. 11,9	*idem.*

Suite de la I.^ere Table. *AVRIL.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	S. O.	7,4.	138.	$48\frac{1}{2}$.	27. 11,9	variable, pluie.
2.	N. & N. E.	7,4.	138.	$48\frac{1}{2}$.	27. 11,3	couvert.
3.	N. - N.E.	8,0.	$137\frac{1}{4}$.	50.	27. 10,10	variable, pluie.
4.	N.E. - N.	8,3.	137.	$50\frac{1}{4}$.	27. 10,9	*idem.*
5.	N. E.	8,3.	137.	$50\frac{1}{4}$.	27. 10,8	ſerein.
6.	N.E. - N.O.	8,0.	$137\frac{1}{4}$.	50.	27. 10,8	variable.
7.	N.E. - N.O.	8,4.	$136\frac{7}{8}$.	51.	27. 10,10	*idem,* pluie.
8.	N.E. - O.	7,1.	$139\frac{1}{2}$.	$47\frac{7}{8}$.	27. 9,9	*idem.*
9.	S.O. - N.	6,5.	$140\frac{1}{2}$.	$46\frac{5}{8}$.	27. 9,2	variable, grande pluie.
10.	N.	7,9.	138.	$49\frac{3}{4}$.	27. 9,9	*idem.*
11.	N. E.	7,7.	$138\frac{1}{2}$.	$49\frac{1}{2}$.	27. 10,10	*idem.*
12.	N.E. - N.O.	8,8.	138.	$51\frac{1}{2}$.	27. 11,5	ſerein.
13.	S. - S. E.	9,0.	$135\frac{7}{8}$.	$52\frac{1}{8}$.	27. 10,11	*idem.*
14.	N.E. - O.	9,1.	$135\frac{5}{8}$.	$52\frac{1}{2}$.	27. 10,7	variable, pluie.
15.	O.	8,9.	136.	$51\frac{7}{8}$.	27. 11,6	*idem.*
16.	S. - N. O.	8,4.	$136\frac{7}{8}$.	51.	27. 9,7	*idem.*
17.	N. - S.	6,8.	140.	$47\frac{1}{2}$.	27. 10,10	couvert, pluie.
18.	S.O. - O.	6,8.	140.	$47\frac{1}{2}$.	27. 11,5	*idem.*
19.	N. - N.O.	6,7.	$140\frac{1}{8}$.	47.	27. 11,2	variable, grande pluie.
20.	N. O.	7,0.	$139\frac{3}{8}$.	$47\frac{3}{4}$.	27. 11,8	variable, pluie.
21.	N. - N.O.	8,6.	$136\frac{1}{2}$.	$51\frac{3}{8}$.	27. 11,4	ſerein.
22.	N.	9,8.	$134\frac{1}{4}$.	54.	27. 10,7	*idem,* pluie.
23.	S. E. - S.	9,0.	$135\frac{7}{8}$.	$52\frac{1}{8}$.	27. 10,8	variable, grande pluie.
24.	S. - N.	9,3.	$135\frac{1}{4}$.	53.	27. 11,6	*idem,* pluie.
25.	N. - S.	9,5.	$134\frac{7}{8}$.	$53\frac{1}{4}$.	28. 0,3	*idem.*
26.	O.	9,6.	$134\frac{5}{8}$.	$53\frac{1}{2}$.	28. 0,3	variable.
27.	N.O. - S.O.	9,8.	$134\frac{1}{4}$.	54.	27. 11,5	*idem.*
28.	N.E. - S.O.	9,7.	$134\frac{5}{8}$.	$53\frac{5}{8}$.	27. 11,10	ſerein.
29.	N.E. - S.O.	11,5.	131.	$57\frac{7}{8}$.	27. 10,5	variable, pluie.
30.	N.E. - S.O.	11,1.	$132\frac{1}{4}$.	57.	27. 9,10	*idem.*

Suite de la I.^{ere} Table. *MAI.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	N. & S. O.	10,0.	133 $\frac{7}{8}$.	54 $\frac{3}{8}$.	27. 10,7	couvert, pluie.
2.	S.O. - N.O.	10,1.	133 $\frac{5}{8}$.	54 $\frac{5}{8}$.	28. 0,2	variable.
3.	N. - N. E.	10,3.	133 $\frac{1}{4}$.	55.	28. 0,1	*idem.*
4.	N. - S.O.	10,8.	132 $\frac{1}{2}$.	56 $\frac{1}{4}$.	27. 11,6	*idem,* pluie.
5.	N. E. - S.O.	11,8.	130 $\frac{1}{4}$.	58 $\frac{1}{4}$.	27. 11,10	*idem.*
6.	O. - S.	13,0.	128 $\frac{1}{8}$.	61 $\frac{1}{8}$.	28. 0,1	ſerein.
7.	S. E. - O.	14,2.	125 $\frac{7}{8}$.	64.	28. 0,0	*idem.*
8.	S. - S. O.	13,7.	126 $\frac{7}{8}$.	62 $\frac{3}{4}$.	27. 11,6	*idem.*
9.	S. O.	13,3.	127 $\frac{1}{2}$.	61 $\frac{1}{2}$.	27. 11,8	variable, pluie.
10.	S. - S.O.	12,3.	129 $\frac{1}{4}$.	59 $\frac{3}{4}$.	27. 11,4	ſerein.
11.	N.E. - S.	12,2.	129 $\frac{5}{8}$.	59 $\frac{1}{2}$.	27. 11,1	couvert.
12.	S. - S. O.	11,6.	131.	58.	27. 10,8	variable, pluie.
13.	S. - N. E.	12,4.	129.	59 $\frac{3}{4}$.	27. 11,2	*idem.*
14.	E.	12,7.	128.	60.	27. 11,3	variable.
15.	S. E.	13,2.	127 $\frac{3}{4}$.	61 $\frac{1}{2}$.	27. 11,8	*idem.*
16.	N. E.	13,9.	126 $\frac{1}{2}$.	63.	27. 11,11	ſerein.
17.	N.O. - O.	13,1.	128.	61 $\frac{1}{4}$.	27. 11,8	variable, pluie.
18.	N.	13,0.	128 $\frac{1}{8}$.	61 $\frac{1}{8}$.	27. 11,5	*idem.*
19.	N. - S.O.	12,2.	129 $\frac{5}{8}$.	59 $\frac{1}{2}$.	27. 11,6	ſerein.
20.	N. - S.O.	14,0.	126 $\frac{1}{4}$.	63 $\frac{3}{8}$.	27. 11,7	couvert, pluie.
21.	S. - S. E.	14,5.	125 $\frac{1}{4}$.	64 $\frac{1}{2}$.	28. 0,1	variable, pluie.
22.	N.E. - O.	14,7.	124 $\frac{7}{8}$.	65.	28. 0,6	ſerein.
23.	N. - O.	15,3.	123 $\frac{5}{8}$.	66 $\frac{5}{8}$.	28. 0,6	*idem.*
24.	N. - O.	15,3.	123 $\frac{5}{8}$.	66 $\frac{5}{8}$.	28. 0,4	variable, pluie, tonn.
25.	N. - S.O.	15,2.	123 $\frac{3}{4}$.	66 $\frac{1}{8}$.	28. 0,0	ſerein.
26.	O. - N.	14,8.	124 $\frac{5}{8}$.	65 $\frac{1}{4}$.	27. 11,11	variable, pluie.
27.	N. - S. O.	14,5.	125 $\frac{1}{4}$.	64 $\frac{1}{2}$.	27. 11,4	*idem,* tonnerre.
28.	N. - N. E.	12,4.	129.	59 $\frac{3}{4}$.	27. 11,3	variable, pluie.
29.	S. - N. E.	12,5.	129 $\frac{1}{8}$.	60.	27. 10,11	couvert, pluie.
30.	S.O. - N.E.	12,2.	129 $\frac{5}{8}$.	59 $\frac{1}{2}$.	27. 10,3	variable, grande pluie.
31.	S. O.	12,5.	129 $\frac{1}{8}$.	60.	27. 10,11	couvert, grande pluie.

Suite de la I.[ere] Table. *JUIN.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	O.	11,6.	$130\frac{3}{4}$.	58.	27. 10,8	couvert, pluie.
2.	O. & N.O.	13,3.	$129\frac{3}{8}$.	62.	28. 0,0	*idem.*
3.	S. - S. O.	14,3.	$125\frac{1}{2}$.	$64\frac{1}{4}$.	28. 0,6	variable, pluie.
4.	S.	14,8.	$124\frac{3}{4}$.	$65\frac{1}{4}$.	28. 0,4	variable.
5.	S. - S. O.	16,0.	$122\frac{3}{8}$.	$67\frac{7}{8}$.	27. 11,10	*idem*, pluie, tonnerre.
6.	S.	15,8.	$122\frac{3}{4}$.	$67\frac{1}{4}$.	28. 0,5	variable.
7.	N. - N.O.	15,7.	$122\frac{1}{2}$.	$66\frac{7}{8}$.	28. 0,5	*idem*, pluie.
8.	N.E. - O.	15,7.	$122\frac{1}{2}$.	$66\frac{7}{8}$.	28. 0,9	variable.
9.	N. - S.	16,6.	$121\frac{1}{4}$.	$69\frac{1}{4}$.	28. 0,11	ferein.
10.	O.	16,0.	$122\frac{3}{8}$.	$67\frac{7}{8}$.	28. 0,9	*idem.*
11.	O. - S.O.	15,7.	$122\frac{1}{2}$.	$66\frac{7}{8}$.	28. 0,0	variable, pluie.
12.	S. O.	15,1.	124.	$65\frac{3}{4}$.	28. 0,4	*idem.*
13.	O. - S.O.	15,0.	$124\frac{3}{8}$.	$65\frac{1}{2}$.	28. 0,7	variable.
14.	N.O. - O.	14,9.	$124\frac{1}{2}$.	$65\frac{3}{8}$.	28. 0,9	*idem.*
15.	O. - S. O.	15,7.	$122\frac{1}{2}$.	$66\frac{7}{8}$.	28. 0,0	*idem*, pluie.
16.	S.O. - N.O.	15,7.	$122\frac{1}{2}$.	$66\frac{7}{8}$.	27. 11,1	*idem.*
17.	N. O. - S.	15,2.	$123\frac{7}{8}$.	66.	27. 9,6	*idem.*
18.	N.O. - S.O.	14,8.	$124\frac{1}{4}$.	$65\frac{1}{4}$.	28. 0,0	*idem.*
19.	O.	14,9.	$124\frac{1}{2}$.	$65\frac{3}{8}$.	28. 0,5	couvert, pluie, tonn.
20.	O.	16,2.	122.	$69\frac{1}{8}$.	28. 0,5	variable, pluie, tonn.
21.	O. - N.E.	15,9.	$122\frac{3}{4}$.	$67\frac{1}{2}$.	28. 0,8	variable.
22.	O. - N.E.	16,3.	$121\frac{1}{2}$.	$69\frac{1}{2}$.	28. 0,9	ferein.
23.	N. E. - N.O.	16,3.	$121\frac{1}{2}$.	$69\frac{1}{2}$.	28. 0,2	*idem.*
24.	E. - O.	17,5.	$119\frac{1}{2}$.	$71\frac{1}{4}$.	28. 0,10	variable, pluie.
25.	O.	17,8.	119.	72.	28. 0,0	variable.
26.	O. - S.O.	18,6.	$117\frac{1}{4}$.	$73\frac{1}{4}$.	28. 0,1	*idem.*
27.	N. O. - S.	18,0.	$118\frac{1}{2}$.	$72\frac{3}{8}$.	27. 11,8	couvert, pluie, tonn.
28.	S. O. - O.	16,2.	121.	69.	27. 11,11	couvert, pluie.
29.	O.	15,4.	$123\frac{3}{4}$.	$66\frac{1}{2}$.	27. 11,8	*idem.*
30.	S. - O.	15,3.	$123\frac{7}{8}$.	$66\frac{1}{4}$.	28. 0,0	variable.

Suite de la I.ere Table. *JUILLET.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	Etat du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	N. & O.	15,2.	123 7/8.	66.	27. 11,10	variable.
2.	O. - N.	16,4.	121 5/8.	68 3/4.	28. 0,4	*idem*, pluie.
3.	N. E - O.	15,9.	122 3/4.	67 1/2.	28. 1,2	ferein.
4.	N.	17,2.	120 1/8.	70 1/4.	28. 1,2	*idem.*
5.	O. - N.	17,9.	118 3/4.	72 1/8.	28. 1,2	*idem.*
6.	S. O.	18,0.	118 1/2.	72 3/8.	28. 1,9	variable, pluie.
7.	S. O. - O.	17,3.	120.	70 3/4.	28. 0,8	*idem.*
8.	O.	17,2.	120 1/8.	70 1/4.	28. 0,4	ferein.
9.	S. O. - O.	17,3.	120.	70 3/4.	28. 0,4	variable, pluie.
10.	O. - N.	16,8.	121.	69 3/4.	28. 0,2	couvert, pluie.
11.	O.	15,7.	122 1/2.	66 7/8.	27. 11,6	variable, pluie, tonn.
12.	S.O. - O.	16,1.	122 1/8.	68.	27. 11,9	variable, pluie.
13.	O.	16,5.	121 1/2.	69.	28. 0,5	variable.
14.	S. O.	17,4.	119 3/4.	71.	28. 1,5	*idem*, pluie.
15.	N. E. - S.O.	17,5.	119 1/2.	71 1/4.	28. 1,1	ferein, pluie d'orage.
16.	E.	18,1.	118 1/4.	72 1/2.	28. 0,0	variable, pluie.
17.	O.	18,4.	117 1/4.	73 1/4.	27. 11,9	ferein.
18.	S.	17,8.	119.	72.	28. 0,3	variable, pluie.
19.	O. - S.O.	16,7.	121 1/4.	69 1/2.	27. 11,8	*idem*, tonnerre.
20.	O. - S.O.	17,2.	120 1/8.	70 1/4.	27. 11,9	variable.
21.	S. O.	17,8.	119.	72.	28. 0,6	ferein.
22.	N.O. - S.O.	17,0.	120 1/2.	70 1/8.	28. 0,6	variable, pluie.
23.	N.O. - S.O.	17,9.	118 3/4.	72 1/8.	28. 0,10	ferein, pluie d'orage.
24.	N.O. - S.O.	18,1.	118 1/4.	72 1/2.	28. 0,10	ferein.
25.	N.O. - S.O.	18,9.	116 3/4.	74 5/8.	28. 0,1	*idem.*
26.	S.	17,5.	119 1/2.	71 1/4.	27. 11,3	couvert, pluie, tonn.
27.	O.	17,0.	120 1/2.	70 1/8.	28. 0,1	couvert, pluie.
28.	S.O. - O.	18,1.	118 1/4.	72 1/2.	28. 1,0	ferein.
29.	S.O. - O.	17,6.	119 1/4.	71 1/2.	28. 0,10	*idem.*
30.	S.O. - O.	17,1.	120 1/4.	70 1/4.	28. 0,2	variable, pluie.
31.	O. - S.	17,4.	119 3/4.	70 3/4.	27. 11,9	*idem.*

Suite

Suite de la I.^{ere} Table. *AOUST.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	N. & S.O.	17,4.	$119\frac{3}{4}$.	71.	28. 0,3	couvert, pluie.
2.	N.O. - O.	17,9.	$118\frac{3}{4}$.	$72\frac{1}{8}$.	27. 11,10	ſerein.
3.	O.	16,8.	$120\frac{7}{8}$.	$69\frac{5}{8}$.	28. 0,6	variable, pluie, tonn.
4.	S. O.	17,9.	$118\frac{3}{4}$.	$72\frac{1}{8}$.	28. 1,1	ſerein.
5.	S. O.	18,9.	$117\frac{3}{4}$.	$74\frac{1}{2}$.	28. 0,9	*idem.*
6.	S.	19,4.	116.	$75\frac{1}{2}$.	28. 0,6	*idem,* tonnerre.
7.	S.O. - O.	18,5.	$117\frac{5}{8}$.	$73\frac{1}{2}$.	28. 0,6	ſerein.
8.	S. O.	17,8.	119.	72.	28. 0,3	variable, pluie.
9.	S. - S. O.	18,8.	117.	$74\frac{3}{8}$.	28. 0,3	ſerein.
10.	S. O.	17,9.	$118\frac{3}{4}$.	$72\frac{1}{8}$.	28. 0,6	variable, pluie.
11.	O. - N.	18,0.	$118\frac{1}{2}$.	$72\frac{3}{8}$.	28. 0,4	ſerein.
12.	N. - S.O.	16,6.	$121\frac{1}{4}$.	$69\frac{1}{4}$.	27. 11,5	variable, pluie, tonn.
13.	O. - S.O.	16,9.	$120\frac{3}{4}$.	$69\frac{7}{8}$.	28. 0,5	variable.
14.	O. - N.E.	17,0.	$120\frac{1}{2}$.	$70\frac{1}{8}$.	27. 10,5	*idem,* pluie.
15.	N. - S.O.	15,7.	$123\frac{1}{4}$.	$66\frac{7}{8}$.	27. 11,6	*idem.*
16.	S. O.	15,7.	$123\frac{1}{4}$.	$66\frac{7}{8}$.	27. 11,8	ſerein.
17.	O.	15,0.	$124\frac{3}{8}$.	$65\frac{1}{2}$.	28. 0,3	variable, pluie.
18.	S. O.	16,7.	$121\frac{1}{8}$.	$69\frac{3}{8}$.	28. 0,8	variable.
19.	O. - S.O.	17,3.	$119\frac{7}{8}$.	$70\frac{5}{8}$.	28. 0,2	*idem,* pluie.
20.	O. - N.O.	15,8.	$122\frac{3}{4}$.	$67\frac{1}{4}$.	27. 11,11	variable.
21.	S.O. - O.	16,3.	$121\frac{5}{8}$.	$68\frac{1}{2}$.	28. 0,11	*idem.*
22.	S.O. - O.	16,6.	$121\frac{1}{4}$.	$69\frac{1}{4}$.	28. 0,4	ſerein.
23.	S. - O.	17,0.	$120\frac{1}{2}$.	$70\frac{1}{8}$.	27. 11,10	variable, pluie.
24.	S.O. - O.	17,0.	$120\frac{1}{2}$.	$70\frac{1}{8}$.	28. 0,7	ſerein.
25.	O.	16,7.	$121\frac{1}{8}$.	$69\frac{3}{8}$.	28. 0,10	*idem.*
26.	O. - N.O.	17,2.	$120\frac{3}{8}$.	$70\frac{3}{8}$.	28. 1,8	*idem.*
27.	S.O. - N.O.	17,0.	$120\frac{1}{2}$.	$70\frac{1}{8}$.	28. 1,3	*idem.*
28.	E. - S.	17,2.	$120\frac{3}{8}$.	$70\frac{3}{8}$.	28. 0,6	*idem.*
29.	O. - N. E.	17,7.	$119\frac{1}{4}$.	$71\frac{5}{8}$.	28. 0,3	*idem.*
30.	S.O. - O.	17,5.	$119\frac{1}{2}$.	$71\frac{1}{4}$.	28. 0,6	variable, pluie.
31.	S.O. - N. E.	17,1.	$120\frac{1}{4}$.	$70\frac{1}{4}$.	28. 0,7	ſerein, aurore boréale.

Suite de la I.^re Table. *SEPTEMBRE.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	S.	17,3.	$119\frac{7}{8}$.	$70\frac{3}{4}$.	28. 0,1	ſerein, pluie d'orage.
2.	S. O.	16,9.	$120\frac{1}{4}$.	$69\frac{7}{8}$.	28. 0,0	ſerein.
3.	N. E. & S.	14,8.	$124\frac{1}{2}$.	$65\frac{1}{8}$.	27. 11,10	*idem,* tonnerre.
4.	S. - O.	17,4.	$119\frac{3}{4}$.	$70\frac{3}{4}$.	28. 0,3	ſerein.
5.	S. E. - S. O.	16,0.	$122\frac{3}{8}$.	$67\frac{7}{8}$.	28. 0,8	variable, pluie.
6.	S. O. - S.	16,0.	$122\frac{3}{8}$.	$67\frac{7}{8}$.	27. 11,6	variable.
7.	S. O.	15,6.	$123\frac{1}{8}$.	$66\frac{7}{8}$.	27. 11,0	couvert.
8.	O. - S. O.	14,5.	$125\frac{1}{4}$.	$64\frac{1}{2}$.	27. 11,6	variable.
9.	O. - S. O.	13,6.	$126\frac{7}{8}$.	$62\frac{1}{4}$.	28. 0,0	*idem,* pluie.
10.	S. O.	13,6.	$126\frac{7}{8}$.	$62\frac{1}{2}$.	27. 11,10	ſerein.
11.	S. O.	14,1.	126.	$63\frac{5}{8}$.	27. 10,7	variable, pluie.
12.	S.	14,9.	$124\frac{1}{2}$.	$65\frac{1}{4}$.	27. 10,7	*idem.*
13.	S. O.	14,5.	$125\frac{1}{4}$.	$64\frac{1}{2}$.	28. 0,3	*idem,* tonnerre.
14.	S. O. - S.	14,0.	$126\frac{1}{4}$.	$63\frac{3}{8}$.	28. 1,1	variable, pluie.
15.	S. O.	13,6.	$126\frac{7}{8}$.	$62\frac{1}{2}$.	28. 1,8	*idem.*
16.	S. - S. O.	13,3.	$127\frac{5}{8}$.	$61\frac{7}{8}$.	28. 0,6	ſerein.
17.	S. - O.	14,4.	$125\frac{1}{2}$.	$64\frac{1}{4}$.	28. 0,7	*idem,* aurore boréale.
18.	S. O.	14,9.	$124\frac{1}{2}$.	$65\frac{1}{4}$.	28. 0,10	ſerein.
19.	S. E. - S.	15,0.	$124\frac{3}{8}$.	$65\frac{1}{2}$.	28. 1,2	*idem.*
20.	S.	15,3.	$123\frac{5}{8}$.	$66\frac{1}{4}$.	28. 0,10	variable, pluie.
21.	S. - S. O.	14,4.	$125\frac{1}{2}$.	$64\frac{1}{4}$.	28. 0,5	*idem.*
22.	S. O.	13,7.	$126\frac{7}{8}$.	$62\frac{3}{4}$.	28. 0,5	variable.
23.	S. O.	13,1.	128.	$61\frac{1}{4}$.	28. 0,3	ſerein.
24.	N. - S. O.	12,5.	$129\frac{1}{8}$.	60.	28. 0,6	variable, pluie.
25.	N. E. - N. O.	13,0.	$128\frac{1}{8}$.	$61\frac{1}{8}$.	28. 1,2	ſerein.
26.	N. E.	12,3.	$129\frac{3}{8}$.	$59\frac{5}{8}$.	28. 1,2	*idem,* aurore boréale.
27.	E. - N. E.	12,6.	129.	$60\frac{1}{4}$.	27. 11,11	ſerein.
28.	S. E. - S.	11,9.	$130\frac{1}{4}$.	$58\frac{1}{2}$.	27. 11,11	*idem.*
29.	N. O. - S. E.	12,0.	$130\frac{1}{8}$.	$58\frac{7}{8}$.	27. 11,6	*idem.*
30.	S. O. - N. O.	11,7.	$130\frac{5}{8}$.	$58\frac{1}{8}$.	27. 11,7	*idem,* brouillard.

Suite de la I.ere Table. *OCTOBRE.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	O. & N. E.	12,1.	129 7/8.	59 1/8.	27. 11,6	couvert, pluie.
2.	N. E. - S. O.	12,3.	129 3/8.	59 1/4.	27. 11,6	variable, pluie.
3.	S. O.	11,8.	130 1/4.	58 1/2.	27. 9,8	*idem*, aurore boréale.
4.	S.	11,8.	130 1/4.	58 1/2.	27. 8,10	couvert, pluie.
5.	S. O. - S.	11,0.	132.	56 5/8.	27. 10,7	*idem.*
6.	S.	10,6.	132 7/8.	55 3/4.	27. 10,11	*idem.*
7.	S. - S. O.	11,3.	131 3/8.	57 1/4.	27. 11,5	variable.
8.	S. - S. O.	11,4.	131 1/4.	57 7/8.	27. 11,4	couvert, pluie.
9.	S. O.	11,3.	131 1/8.	57 3/4.	28. 0,3	variable, pluie.
10.	S. O. - S.	10,6.	132 7/8.	55 3/4.	27. 11,8	variable.
11.	S.O. - O.	9,5.	134 7/8.	53 1/4.	28. 0,9	couvert.
12.	S. O.	9,0.	135 7/8.	52 1/8.	28. 0,9	ſerein.
13.	S. - S.O.	9,0.	135 7/8.	52 1/8.	28. 0,2	variable, pluie.
14.	S.O. - O.	9,1.	135 5/8.	52 3/8.	28. 0,1	ſerein, pluie.
15.	N.O. - S.	8,5.	136 3/4.	51 1/8.	28. 1,1	ſerein.
16.	S.	9,1.	135 5/8.	52 3/8.	28. 0,6	*idem.*
17.	S. - S. O.	8,4.	137.	50 7/8.	28. 0,6	*idem.*
18.	S.	8,8.	136 1/8.	51 7/8.	28. 0,1	*idem.*
19.	S. O. - S.	8,9.	136.	52.	28. 0,8	*idem*, brouillard.
20.	S. - S. O.	9,5.	134 7/8.	53 1/4.	28. 0,3	*idem.*
21.	S. E. - S.	8,6.	136 1/2.	51 3/8.	28. 0,8	variable, brouillard.
22.	S. - S. E.	9,2.	135 1/2.	52 1/2.	27. 11,6	*idem.*
23.	S.	8,3.	137 1/8.	50 3/4.	27. 10,8	*idem*, pluie.
24.	S. - S. O.	8,2.	137 1/4.	50 1/2.	28. 0,1	*idem*, aurore boréale.
25.	S. O. - S.	8,7.	136 3/8.	51 3/8.	28. 0,2	variable, brouillard.
26.	S. - S. O.	8,4.	137.	50 7/8.	27. 11,9	variable, pluie.
27.	S.	8,3.	137 1/8.	50 3/4.	27. 10,10	ſerein, brouillard.
28.	S. - S. O.	8,0.	137 3/4.	50.	28. 0,6	ſerein.
29.	S. O. - S. E.	8,1.	137 1/2.	50 1/4.	27. 11,1	couvert, pluie.
30.	O. - S.O.	8,4.	137.	50 7/8.	27. 10,6.	variab. pluie, brouill.
31.	S.O. - O.	8,4.	137.	50 7/8.	27. 10,3	variable, pluie.

Suite de la I.[re] Table. *NOVEMBRE.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	Degrés de Chaleur. D.	Degrés de Chaleur. F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	S.O. & N.O.	7,0.	139 3/8.	47 3/4.	27. 11,3	serein.
2.	S. - O.	6,9,	139 1/8.	47 1/2.	27. 11,8	*idem*, brouillard.
3.	S. O.	7,8.	140 7/8.	49 5/8.	27. 10,11	couvert, pluie.
4.	S. - S. O.	8,9.	136.	51 7/8.	27. 11,4	*idem*, brouillard.
5.	S.O. - N.O.	8,5.	136 3/4.	51 1/8.	28. 0,3	variable, pluie.
6.	S. - O.	7,6.	138 3/8.	49.	27. 11,10	*idem.*
7.	S. O. - S.	7,1.	139 1/4.	47 7/8.	27. 10,0	couvert, pluie.
8.	S. O.	7,4.	138 5/8.	48 1/2.	27. 9,4	variable, pluie.
9.	S. - O.	7,7.	138 1/4.	49 1/8.	27. 10,9	couvert, pluie, brouil.
10.	S. O. - S.	7,4.	138 3/4.	48 1/2.	27. 11,1	variable, pluie.
11.	S. O.	6,9.	139 1/8.	47 1/2.	27. 11,10	serein.
12.	S. - S. O.	7,2.	139 7/8.	48.	27. 10,8	couvert, pluie.
13.	S. O. - S.	7,2.	139 7/8.	48.	27. 11,2	*idem.*
14.	S. O.	6,2.	141 1/4.	45 7/8.	27. 11,8	variable, pluie, brouil.
15.	N. E. - S.O.	5,9.	141 3/4.	45 1/4.	27. 11,11	variable.
16.	S. - N.E.	5,4.	142 3/4.	44 1/8.	28. 0,11	*idem.*
17.	S. O.	4,9.	143 3/4.	43.	27. 11,2	couvert, brouillard.
18.	S. - S. O.	4,1.	145.	41 1/4.	28. 0,4	var. pluie, brouillard.
19.	N. - N.E.	3,4.	146 3/4.	39 1/4.	28. 0,3	couvert.
20.	N.O. - N.	4,0.	145 1/3.	41.	28. 0,3	*idem*, pluie.
21.	N.O. - N.E.	3,7.	145 1/2.	40 1/8.	27. 11,8	variable, pluie.
22.	N. E.	2,2.	148 3/4.	37.	27. 10,2	variable.
23.	S. O. -N. E.	3,8.	145 1/2.	40 3/4.	27. 10,7	couvert, pluie.
24.	S.	3,1.	147.	39.	27. 11,1	*idem.*
25.	S. - S. O.	3,5.	146 2/3.	39 3/4.	27. 11,11	variable.
26.	S. - S. O.	4,6.	144 1/4.	42 1/2.	28. 0,1	couv. pluie, brouill.
27.	S.O. - N.O.	5,2.	143.	43 5/8.	28. 0,10	variable.
28.	S. - S. O.	4,6.	144 1/4.	42 1/2.	28. 1,10	serein.
29.	S. O. - S.	3,9.	145 1/2.	40 3/4.	28. 1,7	variable, brouillard.
30.	S. O. - S.	4,2.	144 7/8.	41 3/8.	27. 11,6	*idem*, pluie.

Suite de la I.[ere] Table. *DÉCEMBRE.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.		État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces*	*lignes*	
1.	N. & S.	4,0.	145 ⅓.	41.	28.	0,3	var. pluie, brouillard.
2.	S. O.	3,4.	146 ½.	39 ½.	28.	0,7	*idem.*
3.	S.O. - N. E.	3,1.	147.	39.	28.	0,2	variable.
4.	S.	2,6.	147 ⅞.	38.	28.	1,8	*idem,* brouillard.
5.	S. - S.O.	2,9.	147.	38 ½.	28.	0,2	variable, pluie.
6.	S. - S. E.	3,1.	147 ⅛.	39.	27.	10,5	variable, brouillard.
7.	S. - S. E.	3,3.	146 ¾.	39 ¼.	27.	10,2	couvert, pluie, brouil.
8.	S. - O.	4,2.	144 ⅞.	41 ⅜.	27.	11,6	variable, pluie, brouil.
9.	S.O. - S. E.	4,0.	145 ⅓.	41.	27.	11,3	variable, pluie.
10.	S. - S.O.	3,4.	146 ½.	39 ½.	27.	10,0	couvert, brouillard.
11.	S. - S.O.	3,8.	146 ⅛.	40 ½.	27.	10,9	variable, pluie.
12.	S.	4,4.	144 ¾.	42.	27.	9,8	*idem.*
13.	S.	4,2.	144 ⅞.	41 ⅜.	27.	10,10	couvert, brouillard.
14.	S.	3,6.	146.	40.	27.	10,7	variable, pluie.
15.	S.	4,4.	144 ¾.	42.	27.	9,5	couvert, pluie.
16.	O. - S.O.	5,4.	142 ¾.	44 ⅛.	27.	10,0	*idem.*
17.	S. - O.	4,4.	144 ¾.	42.	27.	10,8	*idem,* brouillard.
18.	S. - S.O.	4,1.	145.	41 ¼.	27.	11,0	couvert.
19.	S. - O.	4,1.	145.	41 ¼.	27.	10,0	variable.
20.	S.	3,8.	146 ¼.	40 ½.	27.	9,3	couvert, pluie.
21.	S. O. - S.	4,0.	145 ⅓.	41.	27.	8,10	variable, pluie.
22.	S.	2,9.	147 ½.	38 ¼.	27.	9,8	var. pluie, brouillard.
23.	S. O.	2,9.	147 ½.	38 ¼.	27.	9,11	couvert.
24.	S. - S. O.	2,5.	148 ½.	37 ½.	27.	11,1	variable.
25.	S. O. - S.	1,5.	150 ⅛.	35 ⅜.	27.	11,7	couv. pluie, brouillard
26.	N. E. - S.	1,4.	150 ¾.	35 ¼.	27.	11,9	couvert.
27.	S.O. - O.	2,6.	148 ¼.	37 ½.	27.	11,9	*idem,* pluie.
28.	S.O. - N.E.	0,6.	152 ¼.	33 ⅛.	28.	0,3	variable, brouillard.
29.	S.O. - N.E.	0,3.	152 ½.	32 ½.	28.	0,6	variable.
30.	S. O. - E.	1,4.	150 ¾.	35 ¼.	28.	0,2	*idem,* pluie.
31.	N. E. - S.	1,6.	150.	35.	28.	0,1	couv. pluie, brouillard

II.e TABLE.

JANVIER.

ANNÉES.	VENTS dominans.	THERMOMÈTRE.				BAROMÈTRE.				
		Plus gr.d degré de Chaleur.	Plus gr.d degré de Froid.	Degrés moy. de Ch.	Degrés moy. de Fr.	JOUR & HEURE.	Plus grande élévation.	JOUR & HEURE.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
		Degrés.	Degrés.	Deg.	Deg.		P. L.		P. L.	P. L.
1763	N.	8.	— 6½	6.	— 2¾	26. M.	28. 3½	30. M.	27. 4¾	28. 0.
1764	S.	10.	— 1.	5½	— 0.	11. M.	28. 4½	18. M.	27. 1½	27. 8¾
1765	S.	10.	0½	5¼	— 0.	28. S.	28. 3½	3. M.	27. 2¾	27. 9¼
1766	N. E.	4¼.	— 10.	2.	— 4¾	29. S.	28. 8.	3. M.	27. 2¾	28. 2¼
1767	S. & N. O.	8¾.	— 13.	2¼.	— 5.	1. M.	28. 3¾	13. S.	27. 2¾	27. 10.
1768	S.O.-N.O.	9¼.	— 14½	3¾	— 8.	27. M.	28. 2¾	20. M.	27. 5¼	27. 9¾
1769	S.	10.	— 4¾	4.	— 1¼	14. M.	28. 3½	19. S.	27. 7.	27. 11¼
1770	S. O.	9.	— 7¼	4.	— 2.	28. S.	28. 8¼	10. M.	27. 3¼	28. 2.
1771	N. E.	11.	— 7½	4.	— 2¼	24. M.	28. 3¼	19. M.	27. 4.	27. 9¼
1772	N.E.-S.O.	10.	— 4½	2½	— 1.	14. M.	28. 4.	16. S.	26. 10½	27. 8½

FÉVRIER.

ANNÉES.	VENTS dominans.	Plus gr.d degré de Chaleur.	Plus gr.d degré de Froid.	Degrés moy. de Ch.	Degrés moy. de Fr.	JOUR & HEURE.	Plus grande élévation.	JOUR & HEURE.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
1763	O.	11½.	— 0¼	6½	— 0.	14. S.	28. 1½	1. M.	27. 3¼	27. 8.
1764	S. & N. E.	10½.	— 2½	5½	— 1.	21. M.	28. 5¼	1. M.	27. 2¾	28. 0.
1765	N. - N. E.	6½.	— 6¼	1½	— 2.	24. M.	28. 2.	28. M.	26. 9¾	27. 10¼
1766	S. - N. E.	8½.	— 7.	3½	— 3.	20. M.	28. 7.	5. M.	27. 5½	27. 11¾
1767	S. - S. O.	13.	— 0½	7.	— 0.	24. M.	28. 3.	8. S.	27. 6.	27. 10¾
1768	S.	12½.	— 1½	6.	— 0.	6. M.	28. 5¼	1. M.	27. 10¼	28. 0.
1769	S. - S. O.	11½.	— 2¼	5¾	— 0.	20. M.	28. 3¼	8. M.	27. 3¼	27. 10.
1770	N. - S.O.	8½.	— 3¾	3¼	— 1½	13. M.	28. 7.	7. S.	27. 2.	28. 0.
1771	N. E. - O.	10.	— 11½	5.	— 4¾	18. S.	28. 5.	12. M.	27. 6¼	28. 2.
1772	S. - S. O.	14.	— 0.	5½	— 0.	8. M.	28. 4.	19. M.	27. 5.	27. 8.

Suite de la II.^e Table.

MARS.

Années.	Vents dominans.	Thermomètre. Plus gr.^d degré de Chaleur.	Plus gr.^d degré de Froid.	Degrés moy. de Ch.	Fr.	Baromètre. Jour & Heure.	Plus grande élévation.	Jour & Heure.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
		Degrés.	*Degrés.*	*Deg.*	*Deg.*		*P. L.*		*P. L.*	*P. L.*
1763	N. & O.	13.	— 4½	5¾	— 1¾	5. M.	28. 4.	2. M.	27. 6.	28. 0.
1764	N. E.	13½.	— 2¾	4¾	— 1⅕	15. M.	28. 5½	1. M.	27. 6.	28. 0.
1765	S.-S. O.	15½.	— 0¼	6¾	— 0.	23. M.	28. 1.	13. M.	27. 0.	27. 8.
1766	S.O.-S.E.	12.	— 1.	6.	— 0.	7. M.	28. 3½	26. S.	26. 9¾	27. 9½
1767	O.-S.O.	15½.	1.	6¼	— 0.	7. M.	28. 4¼	26. S.	27. 7¼	27. 11½
1768	N. E.	15.	— 5.	5½.	— 2.	19. M.	28. 6.	15. M.	27. 11¼	28. 2¾
1769	O.-N.E.	13½.	— 1½	5½.	— 0.	3. M.	28. 5½	12. M.	27. 3½	28. 0.
1770	O.-N.E.	12½.	— 5.	4½.	— 1½	2. S.	28. 3.	9. S.	27. 2¾	27. 9¼
1771	N.-O.	14½.	— 4.	4.	— 1¾	20. M.	28. 3.	6. M.	27. 4¼	27. 9¾
1772	N. E.	11.	1.	6¼	— 0.	6. S.	28. 1½	16. S.	27. 2¼	27. 8¾

AVRIL.

Années.	Vents dominans.	Plus gr.^d degré de Chaleur.	Plus gr.^d degré de Froid.	Degrés moy. de Ch.	Fr.	Jour & Heure.	Plus grande élévation.	Jour & Heure.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
1763	S. E.	18.	1½	9¾		5. M.	28. 4.	30. M.	27. 2.	28. 0.
1764	S.O.-N.O.	15.	1½	8.		2. M.	28. 3.	9. M.	27. 0½	27. 10½
1765	S.-S. O.	17½.	3½	9¼		12. M.	28. 4½	22. S.	27. 7.	27. 10¾
1766	S.-S. E.	18½.	4.	9¾		6. S.	28. 4.	23. M.	27. 4½	27. 9½
1767	N.-N.E.	16½.	— 1.	8.		30. M.	28. 6.	21. S.	27. 8¼	28. 1.
1768	S.E.-S.O.	18.	3½	10.		11. S.	28. 4¼	29. M.	27. 7½	27. 11½
1769	N.-N. E.	20¾.	— 1½	10½		30. M.	28. 3¾	8. M.	27. 2¼	27. 10¾
1770	N.-N.O.	14.	1¼	6¾		29. S.	28. 4.	6. M.	27. 1¾	27. 10.
1771	N. E.	16½.	— 1¾	6½		27. M.	28. 4¼	15. M.	27. 8.	28. 0.
1772	N.	12.	— 1½	6½		23. S.	28. 5¼	30. M.	27. 6¼	27. 11½

Suite de la II.e Table.

MAI.

ANNÉES.	VENTS dominans.	THERMOMÈTRE. Plus gr.d degré de Chaleur.	Moindre degre de Chaleur.	Degrés moy. de Chaleur.	BAROMÈTRE. JOUR & HEURE.	Plus grande élévation.	JOUR & HEURE.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*		*P. L.*		*P. L.*	*P. L.*
1763	N. & S. O.	17.	4.	11¾	16. M.	28. 2.	1. M.	27. 3½	27. 10.
1764	N.-S.O.	22.	8.	14.	24. M.	28. 4.	12. M.	27. 7¾	28. 0.
1765	N. E.	21.	3½	12¾	11. M.	28. 2½	24. M.	27. 7.	27. 11¼
1766	O.	23.	7.	13½	15. M.	28. 3¼	10. M.	27. 5½	27. 10.
1767	S.-O.	21.	3½	11¼	1. M.	28. 5¼	30. M.	27. 8.	28. 0.
1768	N.-N. E.	24¾.	4½	14.	9. S.	28. 3½	18. S.	27. 7.	28. 0.
1769	S.-N. E.	25.	6.	12¾	2. M.	28. 5½	7. M.	27. 7¾	27. 11½
1770	N.-N. E.	24.	1½	13.	25. M.	28. 1.	12. M.	27. 7¾	27. 10¼
1771	S. - S. E.	24.	6.	14½	23. M.	28. 3¾	7. M.	27. 8¾	28. 0.
1772	N. E.	16½.	5.	11.	4. M.	28. 4.	25. S.	27. 8¼	28. 0.
				JUIN.					
1763	N. & O.	24.	9.	17¼	9. M.	28. 2.	22. M.	27. 6½	27. 10¾
1764	N. - O.	30.	9.	17.	13. M.	28. 2¼	28. M.	27. 8¼	28. 0.
1765	O.	25.	11.	16½	27. S.	28. 2½	16. M.	27. 9½	28. 0.
1766	S. - O.	23½.	10¼	15½	23. M.	28. 3¼	6. M.	27. 8.	27. 11½
1767	N.	25¼.	7.	14¾	7. S.	28. 5¼	3. M.	27. 7.	28. 0¼
1768	S. - S. O.	25.	10½	15.	24. M.	28. 3.	9. M.	27. 7¼	28. 0.
1769	O.	21.	8.	14¼	7. S.	28. 4.	17. M.	27. 7¼	28. 0.
1770	S. O.	22.	9.	15.	14. M.	28. 4½	19. M.	27. 6.	28. 0.
1771	N. O.	28.	7½	14¾	3. M.	28. 5¾	16. S.	27. 4¼	28. 0½
1772	N. E.	30½.	9½	16½	8. M.	28. 5¼	1. M.	27. 10¾	28. 2½

Suite

Suite de la II.^e Table.

JUILLET.

ANNÉES.	VENTS dominans.	THERMOMÈTRE. Plus gr.^d degré de Chaleur.	Moindre degré de Chaleur.	Degrés moy. de Chaleur.	BAROMÈTRE. JOUR & HEURE.	Plus grande élévation.	JOUR & HEURE.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*		*P. L.*		*P. L.*	*P. L.*
1763	S.&S.O.	22.	13.	$17\frac{1}{4}$.	3. M.	28. 2.	15. M.	27. $8\frac{1}{2}$	27. $10\frac{3}{4}$
1764	S.-S.O.	26.	13.	18.	23. S.	28. 4.	31. S.	27. $8\frac{3}{4}$	28. 0.
1765	N.-N.E.	$23\frac{1}{2}$.	11.	$16\frac{1}{2}$.	3. S.	28. 3.	18. M.	27. $8\frac{3}{4}$	28. $0\frac{1}{2}$
1766	S.-S.O.	$30\frac{1}{4}$.	12.	$17\frac{1}{2}$.	4. M.	28. $1\frac{3}{4}$	12. M.	27. $7\frac{3}{4}$	27. $11\frac{1}{4}$
1767	O.-S.O.	27.	11.	$16\frac{1}{2}$.	16. M.	28. $2\frac{1}{2}$	3. S.	27. $8\frac{1}{4}$	28. $1\frac{1}{4}$
1768	O.-S.E.	$28\frac{1}{4}$.	12.	$17\frac{1}{2}$.	21. S.	28. $3\frac{1}{2}$	18. S.	27. $9\frac{3}{4}$	28. $0\frac{1}{2}$
1769	N.-N.E.	$28\frac{1}{2}$.	11.	18.	3. M.	28. 4.	28. S.	27. $10\frac{1}{4}$	28. $1\frac{1}{2}$
1770	O.-N.O.	23.	$11\frac{1}{2}$.	$16\frac{1}{4}$.	13. M.	28. $5\frac{1}{2}$	8. M.	27. $8\frac{1}{2}$	28. $0\frac{3}{4}$
1771	N. O.	26.	12.	$17\frac{1}{4}$.	14. M.	28. $4\frac{3}{4}$	19. M.	27. 10.	28. $1\frac{1}{2}$
1772	N.E.-S.O.	$25\frac{1}{2}$.	12.	$17\frac{1}{4}$.	13. S.	28. 4.	27. M.	27. $7\frac{1}{2}$	28. $2\frac{1}{2}$

AOUST.

ANNÉES.	VENTS dominans.	Plus gr.^d degré de Chaleur.	Moindre degré de Chaleur.	Degrés moy. de Chaleur.	JOUR & HEURE.	Plus grande élévation.	JOUR & HEURE.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
1763	S.&S.O.	$31\frac{3}{4}$.	$8\frac{1}{3}$.	$18\frac{1}{2}$.	20. M.	28. 2.	15. M.	27. $8\frac{3}{4}$	28. 0.
1764	N.-S.O.	22.	9.	$15\frac{1}{2}$.	31. M.	28. $2\frac{1}{4}$	8. S.	27. 7.	27. $11\frac{1}{4}$
1765	S.O.-N.E.	32.	$11\frac{1}{2}$.	19.	19. M.	28. $3\frac{1}{2}$	13. M.	27. $5\frac{1}{2}$	27. 11.
1766	N.-N.E.	$24\frac{1}{2}$.	12.	$17\frac{1}{4}$.	26. M.	28. $2\frac{3}{4}$	2. M.	27. $9\frac{3}{4}$	28. 2.
1767	N.-S.O.	$26\frac{1}{4}$.	$11\frac{1}{2}$.	17.	26. M.	28. $4\frac{1}{2}$	20. M.	27. 9.	28. 1.
1768	S.-O.	$21\frac{3}{4}$.	$12\frac{1}{2}$.	$16\frac{1}{2}$.	5. S.	28. $2\frac{3}{4}$	17. M.	27. $9\frac{3}{4}$	28. 0.
1769	O.	$29\frac{1}{2}$.	12.	$17\frac{1}{4}$.	7. S.	28. $2\frac{3}{4}$	22. S.	27. $7\frac{1}{4}$	28. 0.
1770	O.-N.E.	28.	11.	$18\frac{1}{2}$.	4. M.	28. $3\frac{1}{4}$	15. M.	27. $11\frac{1}{4}$	28. $1\frac{1}{4}$
1771	O.-S.O.	28.	$9\frac{1}{2}$.	$16\frac{1}{4}$.	22. S.	28. 6.	24. M.	27. 7.	28. $0\frac{1}{2}$
1773	O.-S.O.	$31\frac{1}{2}$.	$11\frac{1}{2}$.	$18\frac{1}{2}$.	22. S.	28. $4\frac{1}{4}$	19. M.	27. $5\frac{1}{2}$	28. $1\frac{1}{2}$

Suite de la II.e Table.

SEPTEMBRE.

ANNÉES.	VENTS dominans.	THERMOMÈTRE. Plus gr.d degré de Chaleur.	Moindre degré de Chaleur.	Degrés moy. de Chaleur.	BAROMÈTRE. JOUR & HEURE.	Plus grande élévation.	JOUR & HEURE.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
		Degrés.	*Degrés*	*Degrés.*		*P. L.*		*P. L.*	*P. L.*
1763	S.& S.O.	21.	4½.	13½.	23. S.	28. 3.	11. M.	27. 7½	28. 0.
1764	N.E.-O.	20½.	3½.	12½.	26. M.	28. 5¾	14. M.	27. 8¾	28. 1¼
1765	O.-N.E.	24.	8.	14½.	12. M.	28. 3½	30. S.	27. 8.	28. 1.
1766	S.-S. O.	22½.	5¼.	14¾.	17. S.	28. 4½	8. M.	27. 9.	28. 0¾
1767	S. - N.	27.	8½.	14½.	20. M.	28. 6½	29. S.	27. 9½	28. 1¾
1768	S.O.-S.E.	20.	8.	13½.	26. S.	28. 4¼	17. M.	27. 3.	27. 11¼
1769	S.-S. O.	21½.	8.	14¼.	29. S.	28. 5.	7. S.	27. 4¾	27. 10¾
1770	S.-S. O.	23½.	9.	16.	28. S.	28. 4.	12. M.	27. 6.	28. 0.
1771	N. E.	24½.	5.	14.	27. S.	28. 3¼	23. M.	27. 7½	28. 1.
1773	S. O.	21.	6½.	14½.	15. M.	28. 4½	8. M.	27. 7.	28. 2.

OCTOBRE.

ANNÉES.	VENTS dominans.	Plus gr.d degré de Chaleur.	Moindre degré de Chaleur.	Degrés moy. de Chaleur.	JOUR & HEURE.	Plus grande élévation.	JOUR & HEURE.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
1763	S.E.&N.E.	17½.	2.	9.	13. M.	28. 3¾	2. M.	27. 3.	28. 0.
1764	S.-S.O.	15½.	1.	8½.	15. M.	28. 3.	13. S.	27. 3.	27. 11½
1765	S.-S.O.	17½.	3.	10½.	16. S.	28. 3½	4. S.	27. 1½	27. 9¼
1766	S.-S.O.	19½.	3.	11.	17. M.	28. 6¼	8. M.	27. 3½	27. 11.
1767	S.-S. O.	18.	2½.	9.	27. S.	28. 5¼	4. M.	27. 5.	28. 0½
1768	S. O.	19.	4.	10½.	20. S.	28. 4.	4. M.	27. 6¼	27. 11½
1769	N. E.	13½.	— 2.	7.	13. M.	28. 4¾	30. S.	27. 6¾	28. 0¼
1770	S.-S.O.	15½.	2.	9¼.	7. M.	28. 4½	22. S.	27. 2.	27. 10¼
1771	S.-S.O.	17.	3½.	9½.	21. M.	28. 6¼	4. M.	27. 6¾	28. 1.
1773	S.-S.O.	19½.	3.	11¼.	15. M.	28. 5½	4. M.	27. 6½	28. 2.

Suite de la II.[e] Table.

NOVEMBRE.

ANNÉES.	VENTS dominans.	THERMOMÈTRE. Plus gr.d degré de Chaleur.	Plus gr.d degré de Froid.	Degrés moy. de Ch.	Fr.	BAROMÈTRE. JOUR & HEURE.	Plus grande élévation.	JOUR & HEURE.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
		Degrés	Degrés.	Deg.	Deg.		P. L.		P. L.	P. L.
1763	S.&N.E.	15.	— $5\frac{1}{2}$.	6.	— $2\frac{1}{2}$	14. M.	28. 5.	21. M.	27. $5\frac{1}{2}$	28. 0.
1764	N.E.-O.	$13\frac{1}{2}$.	— $0\frac{1}{2}$.	5.	— 0.	1. S.	28. $2\frac{1}{2}$	6. S.	27. 5.	27. 10.
1765	S.-S. O.	13.	— 5.	$5\frac{1}{2}$	— $1\frac{3}{4}$	17. S.	28. 3.	4. M.	27. 6.	27. $11\frac{1}{4}$
1766	S.	14.	— $1\frac{1}{2}$.	$6\frac{1}{4}$	— 0.	5. S.	28. $6\frac{1}{4}$	19. M.	27. $4\frac{1}{2}$	28. $1\frac{1}{4}$
1767	S. O.	$14\frac{1}{2}$.	$0\frac{1}{2}$.	7.	— 0.	20. M.	28. 6.	16. M.	27. 5.	28. $2\frac{1}{2}$
1768	S.-S. O.	12.	— 0.	$6\frac{1}{4}$	— 0.	6. M.	28. $5\frac{3}{4}$	22. M.	26. $8\frac{1}{2}$	27. $10\frac{1}{2}$
1769	S. O.	$16\frac{1}{2}$.	— $4\frac{3}{4}$.	$7\frac{1}{4}$	— $2\frac{1}{4}$	28. M.	28. 8.	14. M.	27. $5\frac{3}{4}$	27. $11\frac{1}{4}$
1770	S.-S. O.	13.	— 1.	$6\frac{1}{2}$	— 0.	21. S.	28. $2\frac{1}{4}$	2. M.	27. 1.	27. $8\frac{1}{2}$
1771	S. O.	10.	— $2\frac{1}{2}$.	$5\frac{1}{4}$	— 0.	18. S.	28. $6\frac{1}{2}$	7. M.	27. $10\frac{1}{4}$	28. $3\frac{1}{4}$
1773	S. O.	12.	— $1\frac{1}{2}$.	$6\frac{1}{4}$	— 0.	30. S.	28. 7.	12. M.	27. 0.	27. 8.

DÉCEMBRE.

ANNÉES.	VENTS dominans.	Plus gr.d degré de Chaleur.	Plus gr.d degré de Froid.	Ch.	Fr.	JOUR & HEURE.	Plus grande élévation.	JOUR & HEURE.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
1763	S.&S.O.	$13\frac{1}{2}$.	— $1\frac{3}{4}$.	5.	— 0.	3. M.	28. $4\frac{1}{2}$	13. S.	26. $7\frac{1}{4}$	27. $8\frac{1}{2}$
1764	S.-E.	$10\frac{1}{2}$.	— $4\frac{1}{2}$.	$3\frac{3}{4}$	— $1\frac{1}{2}$	4. M.	28. 2.	6. S.	27. $2\frac{1}{2}$	27. 8.
1765	S.-N.E.	10.	— $6\frac{1}{2}$.	$2\frac{1}{2}$	— $2\frac{3}{4}$	17. M.	28. $3\frac{3}{4}$	11. M.	27. $0\frac{3}{4}$	27. $11\frac{1}{4}$
1766	S.-N.E.	9.	— $4\frac{1}{2}$.	$2\frac{3}{4}$	— 1.	28. S.	28. $5\frac{1}{2}$	30. S.	27. 3.	28. $0\frac{1}{2}$
1767	S. E.	10.	— $9\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$	— $4\frac{1}{2}$	3. S.	28. $6\frac{3}{4}$	20. M.	27. 6.	28. 0.
1768	S.	8.	— $6\frac{3}{4}$.	$4\frac{1}{4}$	— 2.	12. M.	28. $5\frac{3}{4}$	1. M.	27. $5\frac{3}{4}$	28. $0\frac{3}{4}$
1769	S.	$10\frac{1}{2}$.	— $4\frac{1}{2}$.	$5\frac{1}{4}$	— $1\frac{1}{4}$	1. S.	28. $6\frac{1}{4}$	23. S.	26. 11.	28. $1\frac{1}{4}$
1770	S.-S.O.	$10\frac{1}{2}$.	— $1\frac{1}{2}$.	5.	— 0.	2. M.	28. $2\frac{3}{4}$	20. S.	27. $6\frac{1}{2}$	27. $11\frac{1}{4}$
1771	S. O.	$9\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$.	$5\frac{1}{2}$	— 0.	1. M.	28. $2\frac{1}{2}$	16. M.	27. $2\frac{3}{4}$	27. $9\frac{1}{2}$
1773	S.-S.O.	11.	— 2.	$4\frac{1}{2}$	— 0.	1. M.	28. $6\frac{1}{4}$	19. S.	27. $3\frac{1}{4}$	27. $9\frac{1}{2}$

III.e TABLE.

Mois.	Vents dominans.	Thermomètre. Plus gr. degré de Chal.	Thermomètre. Moindre degré de Chal.	Thermomètre. Degré moyen de Chal.	Thermomètre. Degré moyen de Froid.	Baromètre. Heure du Jour.	Baromètre. Plus grande élévation.	Baromètre. Heure du Jour.	Baromètre. Moindre élévation.	Baromètre. Élévation moyenne.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*		*P. L.*		*P. L.*	*P. L.*
Jan...	S.&S.O.	9,0.	— 6,9.	3,9.	— 2,7.	Mid.	28.3,9.	Mid.	27.2,9.	27.10,7.
Fév...	S.-S.O.	10,6.	— 3,5.	4,9.	— 1,2.	Mat..	28.3,7.	Mat.	27.3,6.	27.10,9.
Mars..	O.-N.E.	13,6.	— 2,4.	5,5.	— 0,8.	M.M.	28.3,1.	Soir.	27.3,5.	27.10,7.
Avril.	N.-N.E	16,5.	1,5.	8,5.	......	M.S.	28.3,7.	Mat..	27. 4.	27.11,2.
Mai..	N.-N.E.	21,8.	4,9.	12,8.	......	Mat..	28.2,11.	Mat..	27.5,11.	27.11,3.
Juin..	O. N.	25,4.	9,1.	15,6.	......	Mat..	28.3,0.	Mat..	27.6,3.	28. 0,1.
Juillet	O. S.O.	26,0.	11,8.	17,2.	......	Mid.	28.2,11.	Mat..	27.7,4.	28. 0,6.
Août.	S.O. O.	27,5.	10,9.	17,4.	......	Mat..	28.2,10.	Mat..	27.6,8.	28. 0,4.
Sept..	S.O.-S.	22,5.	6,5.	14,2.	......	Soir.	28.3,8.	Mid.	17.5,11.	28. 0,6.
Oct..	S.O.-S.	17,2.	2,4.	9,5.	......	Mat..	28.3,11.	Mat..	27.3,8.	27.11,8.
Nov..	S.O.-S.	13,3.	— 2,2.	6,1.	— 0,7.	Soir.	28.4,4.	Mat..	27.3,3.	27.11,5.
Dec...	S.-S.O.	10,2.	— 4,2.	4,2.	— 1,3.	Mat..	28.3,10.	Soir.	27.2,1.	27.10,8.

IV.e TABLE.

Mois.	Vents dominans.	Thermomètre. Deg. moy. de Chaleur.	Thermomètre. Deg. moy. de Froid.	Baromètre.		État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Pouces.*	*Lignes.*	
Janvier...	S. & S. O.	2,5.	— 1.	27.	11,9.	Chaud humide.
Février...	S. - S. O.	4,3.	— 0,3.	27.	10,2.	*Idem.*
Mars....	N. E. - O.	4,8.	— 0,1.	27.	11,0.	Variab. humide.
Avril....	N. E. - N.	8,6.	......	27.	11,2.	*Idem.*
Mai....	S. O. - N.	13,1.	......	28.	0,0.	*Idem.*
Juin.....	O. - S. O.	15,3.	......	28.	0,8.	*Idem.*
Juillet...	O. - S. O.	17,2.	......	28.	0,0.	*Idem.*
Août....	S. O. - O.	17,2.	......	28.	0,4.	Serein sec.
Septembre.	S. O. - S.	14,5.	......	28.	0,5.	*Idem.*
Octobre...	S. O. - S.	9,5.	......	27.	11,2.	Variab. humide.
Novembre.	S. O. - S.	5,8.	— 0,2.	27.	11,9.	*Idem.*
Décembre..	S. - S. O.	3,6.	— 0,5.	27.	10,4.	*Idem.*

V.

V.e TABLE.

ANNÉES.	VENTS dominans.	THERMOMÈTRE. Plus gr. degré de Ch.	Moindre degré de Chal.	Degré moy. de Ch.	Degré moy. de Froid.	BAROMÈTRE. Plus gr. élévation.	Moindre élévation.	Élévation moyenne.
		Deg.	Degrés.	Degrés.	Degrés.	P. L.	P. L.	P. L.
1763.	S. & S.O.	17,6	— 3,5	10,5	— 2,3	28. 3,1	27. 4,6	27. 11,0
1764.	N.E.-S.O.	17,5	— 2,5	9,8	// //	28. 3,8	27. 5,2	27. 11,1
1765.	S.-N.E.	18.	— 4,7	10,0	— 2,0	28. 3,0	27. 4,6	27. 10,10
1766.	S.	17,5	— 4,8	10,0	— 3,0	28. 4,8	27. 5,1	27. 11,9
1767.	S.-S.O.	18,5	— 6,0	9,7	— 4,7	28. 4,11	27. 6,10	28. 0,5
1768.	S.-S.O.	17,7	— 7,0	10,2	— 4,0	28. 4,2	27. 6,8	28. 0,9
1769.	S.-N.E.	18,2	— 3,0	10,2	— 1,6	28. 4,8	27. 5,1	27. 11,9
1770.	S.-S.O.	17,0	— 3,6	9,8	— 0,5	28. 4,2	27. 4,11	27. 11,4
1771.	N.E.-S.O.	18,2	— 5,4	9,8	— 3,0	28. 4,5	27. 6,8	28. 0,2
1772.	N.E.-S.O.	17,8	— 2,0	10,0	— 1,0	28. 4,8	27. 6,0	27. 11,5

VI.e TABLE.

TABLES.	VENTS dominans.	THERMOMÈTRE. Plus gr. deg. de Chaleur.	Moindre degré de Chaleur.	Degré moy. de Chaleur.	Degré moyen de Froid.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	Degrés.
III.e Table.	S.O.&S.	17,8	— 3,8	9,9	— 1,2
IV.e Table.	S.O.&S.	....	....	9,4	— 0,5
V.e Table.	S.&S.O.	17,8	— 4,2	10,0	— 2,2
RÉSULTAT général. . . .	S.&S.O.	17,8	— 4,0	9,9	— 1,3

TABLES.	VENTS dominans.	BAROMÈTRE. Jour & heure	Plus gr.de élévation	Jour & heure	Moindre élévation	Élévation moyenne.	État du Ciel.
			P. L.		P. L.	P. L.	
III.e Table.	S.O.&S.	Matin.	28. 3,7	Matin.	27. 4,7	27. 11,5	Variable humide
IV.e Table.	S.&S.O.	....	.....	....	.....	27. 11,7	
V.e Table.	S.O.&S.	....	28. 3,5	....	27. 4,7	27. 11,5	
RESULTAT général. . . .	S.&S.O.	Matin.	28. 3,6	Matin.	27. 4,7	27. 11,[illegible]	

VII.^e TABLE.

MOIS.	MATIN.								SOIR.							
	Nord	N. E.	N.O.	Sud.	S. E.	S. O.	Est.	Ouest.	Nord	N E.	N.O.	Sud.	S. E.	S. O.	Est.	Ouest
Janvier...	34.	56.	18.	80.	24.	52.	21.	27.	44.	45.	17.	69.	27.	50.	21.	38.
Février...	33.	43.	14.	79.	19.	55.	9.	30.	29.	42.	16.	65.	20.	46.	10.	54.
Mars......	38.	65.	27.	51.	23.	40.	20.	46.	40.	52.	33.	39.	27.	47.	26.	46.
Avril....	58.	46.	36.	39.	26.	43.	14.	38.	44.	53.	39.	43.	26.	41.	19.	34
Mai.....	44.	57.	26.	44.	26.	55.	15.	43.	45.	45.	32.	53.	21.	52.	25.	37.
Juin....	42.	38.	45.	44.	13.	45.	8.	62.	30.	34.	47.	37.	15.	55.	15.	67.
Juillet....	32.	34.	43.	47.	15.	67.	12.	61.	31.	24.	38.	45.	6.	64.	23.	79.
Août....	37.	39.	27.	45.	15.	65.	17.	65.	42.	33.	29.	38.	14.	65.	20.	69.
Septemb.	24.	32.	28.	69.	28.	65.	8.	46.	29.	33.	27.	66.	22.	72.	8.	43.
Octobre..	16.	37.	26.	94.	30.	69.	8.	30.	25.	33.	23.	62.	33.	82.	15.	37.
Novemb.	17.	37.	28.	81.	11.	88.	8.	31.	23.	34.	25.	65.	15.	83.	14.	41.
Décemb.	26.	38.	9.	85.	30.	73.	19.	30.	24.	31.	12.	78.	33.	73.	26.	32.
TOTAL des 10 années.	402.	522.	327.	758.	260.	717.	159.	509.	406.	459.	339.	660.	259.	730.	222.	577.

VIII.^e TABLE.

MOIS.	NORD.	N. E.	N. O.	SUD.	S. E.	S. O.	EST.	OUEST
Janvier...	7.	9.	1.	22.	2.	12.	//.	3.
Février...	3.	6.	//.	21.	2.	13.	1.	9.
Mars....	3.	16.	5.	8.	2.	8.	3.	11.
Avril....	11.	13.	8.	6.	2.	7.	//.	5.
Mai.....	12.	9.	2.	8.	3.	14.	1.	7.
Juin.....	2.	3.	8.	8.	1.	10.	1.	18.
Juillet...	5.	2.	4.	4.	//.	15.	1.	19.
Août....	4.	3.	5.	4.	//.	18.	1.	17.
Septembre.	1.	4.	3.	12.	4.	18.	1.	4.
Octobre...	//.	2.	1.	20.	3.	21.	//.	5.
Novembre.	2.	6.	5.	16.	//.	21.	//.	3.
Décembre..	1.	5.	//.	22.	3.	16.	1.	5.
Résultats pour l'année.	51.	78.	42.	151.	22.	173.	10.	106.

IX.^e TABLE.

Mois.	Jour.		Nuit.		Nombre des Jours				
	Pluie.	Neige.	Pluie.	Neige.	Couvert.	Serein.	Brouill.	Tonner.	Aur. bor.
Janv..	77.	21.	51.	21.	234.	76.	43.	//.	//.
Févr..	88.	12.	71.	7.	230.	53.	27.	//.	1.
Mars..	89.	19.	52.	7.	189.	121.	9.	3.	1.
Avril.	123.	8.	65.	.....	180.	119.	2.	3.	4.
Mai...	116.	.....	48.	.....	176.	134.	3.	14.	//.
Juin..	137.	.....	62.	.....	188.	112.	//.	23.	1.
Juillet	130.	.....	55.	.....	174.	136.	//.	24.	//.
Août.	100.	.....	45.	.....	146.	164.	2.	20.	5.
Sept..	111.	.....	51.	.....	150.	150.	10.	10.	3.
Octob	114.	.....	77.	.....	175.	135.	34.	2.	4.
Nov..	116.	4.	91.	2.	214.	86.	70.	//.	//.
Déc...	123.	3.	72.	4.	226.	84.	57.	//.	2.
Total des 10 années	1324.	67.	740.	41.	2282.	1370.	257.	99.	21.

X.^e TABLE.

Mois.	Nombre des Jours						
	Pluie.	Neige.	Couvert.	Serein.	Brouill.	Tonner.	Aur. bor.
Janvier...	11.	4.	23.	8.	4.	//.	//.
Février...	12.	2.	23.	5.	3.	//.	//.
Mars....	12.	2.	19.	12.	1.	//.	//.
Avril....	16.	1.	18.	12.	//.	//.	1.
Mai.....	15.	.....	18.	13.	//.	2.	//.
Juin.....	19.	.....	19.	11.	//.	2.	//.
Juillet....	18.	.....	17.	14.	//.	3.	//.
Août....	14.	.....	15.	16.	//.	2.	1.
Septembre.	15.	.....	15.	15.	1.	1.	1.
Octobre....	17.	.....	18.	13.	4.	//.	1.
Novembre.	17.	1.	21.	9.	7.	//.	//.
Décembre..	17.	1.	23.	8.	6.	//.	1.
Résultats pour l'année moyenne.	183.	11.	229.	136.	26.	10.	5.

XI.^e TABLE.

MOIS.	NOMBRE DES JOURS							
	Pluie.	Neige.	Couvert.	Serein.	Variable.	Brouill.	Tonn.	Aur. bor.
Janvier......	11.	4.	19.	1.	11.	3.	//.	//.
Février......	17.	2.	20.	//.	9.	2.	//.	//.
Mars........	13.	2.	8.	9.	14.	//.	//.	//.
Avril........	21.	1.	3.	6.	21.	//.	//.	//.
Mai.........	17.	.....	5.	9.	17.	//.	2.	//.
Juin........	17.	.....	6.	4.	20.	.	4.	//.
Juillet.......	18.	.....	2.	12.	17.	//.	3.	//.
Aout........	11.	.....	1.	16.	14.	//.	3.	//.
Septembre....	11.	.....	1.	16.	13.	1.	2.	2.
Octobre......	16.	.....	7.	10.	14.	9.	//.	2.
Novembre....	18.	.....	12.	4.	14.	9.	//.	.
Décembre....	19.	.....	13.	//.	18.	13.	//.	//.
Résultats pour l'année moyenne........	189.	9.	97.	87.	182.	37.	14.	4.

XII.^e TABLE.

RÉSULTATS des Tables.	NOMBRE DES JOURS.							
	Pluie.	Neige.	Couvert.	Serein.	Variable.	Brouill.	Tonn.	Aur. bor.
Résultats de la X.^e Table.	183.	11.	229.	136.	.....	26.	10.	5.
Résultats de la XI.^e Table.	189.	9.	97.	87.	182.	37.	14.	4.
Résultats moyens...	186.	10.	97.	87.	182.	31.	12.	5.

Suite

XIII.e TABLE.

ANNÉE.	JOUR du Mois.	DEGRÉS EXTRÊMES DE FROID, à PARIS.	à Montmorenc	à S.t-Germain-en-Laye.	à Ratisbonne.	à Péterſbourg.	à Rome.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
1766.	11 Janvier	— 10.	— 10.	— 12 $\frac{1}{2}$.	— 17.	— 27. le 19 Janvier.	— 3.

ANNÉE.	JOUR du Mois.	DEGRÉS EXTRÊMES DE FROID. À PARIS. *M. Meſſier.*	*Obſerv. Royal.*	*hors des murs.*	à Vincennes. *M. Adanſon.*	à Montmorency.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
1767.	7 Janvier.	— 13.	— 10 $\frac{1}{2}$.	— 14.	— 11 $\frac{1}{4}$.	— 10 $\frac{1}{4}$.

ANNÉE.	JOUR du Mois.	à Dantzik.	à Cologne.	à Hall en Suiſſe.	à Bitche dans la Lorraine Allemande.	à Stockolm.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
1767.	7 Janvier.	— 14.	— 13 $\frac{1}{2}$.	— 15.	— 19.	— 17 $\frac{1}{2}$.

ANNÉE.	JOUR du Mois.	DEGRÉS EXTRÊMES DE CHALEUR, À PARIS. *M. Meſſier.*	*Obſerv. Royal.*	*M. de Fouchy.*	*M. Briſſon.*	à Montmorency.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
1772.	26 Juin.	31 $\frac{1}{2}$.	32.	31 $\frac{1}{2}$.	28.	25.

ANNÉE.	JOUR du Mois.	DEGRÉS EXTRÊMES DE CHALEUR, À PARIS. *M. Meſſier.*	*M. de Gouvernet.*	*M. Briſſon.*	*M. Lavoiſier.*	*M. Nicolet, au Louvre.*	*Aux Chartreux.*	à Montmor.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
1773.	14 Août.	31 $\frac{1}{2}$.	28 $\frac{1}{2}$.	28 $\frac{3}{4}$.	30 $\frac{1}{2}$.	30.	30 $\frac{1}{2}$.	27 $\frac{3}{4}$.

Suite de la XIII.^e Table.

ANNÉES.	JOURS du MOIS.	ÉLÉVATION extrême du Mercure, à Paris.	ANNÉES.	JOURS du MOIS.	Abaissement extrême du Mercure, à Paris.
		Pouces. Lign.			*Pouces. Lign.*
1766...	29 Janvier, à 8^h du soir....	28. 8,0.	1763...	12 Décembre, à 5^h du soir...	26. 7,3.
1769...	28 Novembre, à 9^h du soir....	28. 8,0.	1768...	28 Novembre, à midi.......	26. 8,5.
1770...	28 Janvier, à 10^h du soir....	28. 8,3.			
1774..	24 Décembre, à 10^h du matin...	28. 9,1.			

XIV.^e TABLE.

MOIS.	Élévation moyenne du Baromètre. À PARIS.	À Montmorency.	Degrés moyen de chal. À PARIS.	À Montmor.	Degrés moyen de froid. À PARIS.	À Montmor.
	Pouces. Lignes.	*Pouces. Lignes.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
Janvier...	27. 10,7.	27. 8,0.	2,9.	2,1.	— 1,4.	— 1,6.
Février...	27. 10,9.	27. 9,4.	4,1.	3,3.	— 1,0.	— 0,6.
Mars...	27. 10,7.	27. 9,5.	4,6.	4,4.	— 0,0.	— 0,0.
Avril...	27. 11,2.	27. 9,3.	7,9.	7,2.		
Mai....	27. 11,3.	27. 9,5.	12,9.	11,9.		
Juin....	28. 0,1.	27. 10,2.	15,2.	14,0.		
Juillet...	28. 0,6.	27. 10,4.	17,2.	15,2.		
Août...	28. 0,4.	27. 10,4.	17,4.	15,6.		
Septemb.	28. 0,6.	27. 9,8.	14,7.	13,5.		
Octobre.	27. 11,8.	27. 10,3.	9,5.	9,0.		
Novemb.	27. 11,5.	27. 9,0.	5,5.	5,6.	— 0,5.	— 0,4.
Décemb.	27. 10,8.	27. 9,6.	4,5.	5,6.	— 1,8.	— 1,4.
Résultats pour l'année moyenne.	27. 11,5.	27. 9,6.	9,7.	8,9.	— 1,1.	— 1,0.

XV.e TABLE.

Jours du Mois.	Températures à Paris.	Températures éloignées.
	Année 1764.	
	Novembre.	
6.	Couvert, très-grand vent; barom. descendit de $7^l \frac{1}{4}$, de $28^p\ 4^l$ à $27^p\ 5^l$.	Tremblement de terre à *Oxford.*
	Année 1765.	
	Janvier.	
6.	Couvert, pluie; baromètre $27^p\ 5^l$.	Tremblement de terre à *Comorre* & à *Raab.*
13.	Couvert, baromètre $27^p\ 10^l$.	Tremblement de terre au bourg de *Pranden* en Autriche.
18.	Couvert, baromètre $27^p\ 10^l \frac{3}{4}$.	Tremblement de terre à *Sala* dans le duché de Parme.
	Février.	
9.	Couvert, neige; barom. $28^p\ 1^l$.	Tremblement de terre à *Irtisch* en Sibérie.
14.	Couvert, baromètre $27^p\ 9^l \frac{3}{4}$.	Tremblement de terre à *Abbeville.*
	Mars.	
21.	Serein; baromètre $28^p\ 0^l$.	Tremblement de terre à *Carlstadt* en Wermérandie.
	Avril.	
8.	Couvert; le baromètre descendit de 28^p à $27^p\ 10^l \frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Limoges.*
12.	Serein; thermom. à $4^d \frac{1}{2}$ de dilatat. n'est pas descendu au-dessous de 0 pendant ce mois.	Neige à *Naples* & grand froid en *Italie.*
20.	Couvert; le baromètre descendit de $27^p\ 8^l \frac{1}{2}$ à $27^p\ 7^l \frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Florence.*
22.	Serein; le baromètre descendit de $27^p\ 9^l \frac{1}{2}$ à $27^p\ 8^l \frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Gènes.*

Suite de la XV.^{e} Table.

Jours du Mois.	TEMPÉRATURES à PARIS.	TEMPÉRATURES éloignées.
	ANNÉE 1765.	
	Suite d'Avril.	
29.	Pluie, tonnerre; le baromètre marquoit $27^p\ 8^l\frac{1}{4}$.	Météore semblable à une fusée à *Naples.*
	Mai.	
19.	Serein; le baromètre $27^p\ 10^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre dans le pays de *Foix.*
	Juin.	
3.	Couvert; le baromètre $28^p\ 0^l$.	Ouragan à *Châteaudun.*
20.	Serein; le baromètre $28^p\ 0^l$.	Ouragan dans le *Lyonnois.*
22.	couvert, peu de pluie; baromètre $27^p\ 11^l\frac{1}{2}$.	Inondation à *Chietti,* capitale de l'Abbruzze.
	Juillet.	
14.	Couvert; le baromètre $27^p\ 9^l\frac{3}{4}$.	Tremblement de terre à *Pitea,* en Bothnie.
26.	Couvert, pluie; le baromètre marquoit $27^p\ 11^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre à *Laknau.*
	Août.	
26.	Très-chaud; le thermomètre $30^d\frac{3}{4}$.	Chaleur excessive à *Londres.*
	Octobre.	
2.	Pluie, grand vent; le baromètre $27^p\ 2^l\frac{1}{2}$.	Pluie abondante & globe de feu sorti de terre, qui a fait de grands ravages en *Limosin.*
4.	Vent violent, pluie; le baromètre $27^p\ 1^l\frac{1}{4}$.	Ouragan considérable en *Normandie* & dans une grande partie de la France.
20.	Serein; baromètre $28^p\ 0^l$.	Globe de feu à *Moulins.*
	Décembre.	
13.	Couvert, le baromètre $27^p\ 11^l$.	Tremblement de terre à *Lisbonne.*

Suite de la XV.^e Table.

Jours du Mois.	Températures à Paris.	Températures éloignées.
	Année 1765. *Suite de Décembre.*	
25.	Serein; therm. 6^d de condensation.	Thermomètre à $3^d\frac{1}{2}$ de condensation à *Lisbonne.*
	Année 1766. *Janvier.*	
10.	Serein; baromètre $28^p\ 1^l$.	Tremblement de terre à *Naples.*
	Mars.	
9.	Serein; baromètre $28^p\ 1^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre dans l'Isle d'*Antigoa* en Amérique.
	Avril.	
17.	Couvert, pluie; le baromètre marquoit $27^p\ 7^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre dans l'Isle de *la Grenade.*
	Mai.	
22.	Couvert, grand vent; baromètre $28^p\ 0^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre à *Constantinople.*
24.	Grande pluie; le barom. marquoit $27^p\ 10^l$.	Orage considérable à *Jonzac* en Saintonge.
	Juin.	
9.	Couvert; baromètre $28^p\ 0^l$.	Violent orage à *Aschaff-en-Bourg* en Franconie.
11.	Serein; baromètre $27^p\ 11^l\frac{1}{2}$.	Trembl. de terre dans la *Jamaïque.*
	Juillet.	
8.	Serein; baromètre $28^p\ 0^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre à *Briançon.*
	Août.	
8.	Serein; le baromètre $28^p\ 2^l$.	Tremblement de terre à *Vienne* en Autriche.

Suite de la XV.ᵉ Table.

Jours du Mois.	Températures à Paris.	Températures éloignées.
	Année 1766.	
	Suite d'Août.	
13.	Couvert; baromètre $28^p\ 2^l$.	Ouragan furieux & tremblement de terre à *la Martinique.*
16.	Grande pluie; le baromètre marquoit $27^p\ 11^l$.	Météore appelé *Dragon*, ou *ignis lambens*, à *Coppenhague.*
	Octobre.	
6.	Couvert; baromètre $27^p\ 6^l$.	Ouragan & tremblement de terre à l'île *Saint-Eustache* en Amérique.
	Année 1767.	
	Janvier.	
21.	Couvert, neige; le baromètre marquoit $28^p\ 2^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre à *Parme*, à *Bielefeld* & à *Pise.*
	Février.	
7.	Couvert, brouillard, pluie; barom. $27^p\ 9^l\frac{3}{4}$.	Tremblement de terre à *Gênes* & à *Turin.*
9.	Pluie, vent; baromètre $27^p\ 7^l$.	Tremblement de terre à *Grasse.*
	Mars.	
17.	Pluie; baromètre $27^p\ 8^l\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Comorre* en Hongrie.
	Avril.	
7.	Couvert; baromètre $28^p\ 0^l$.	Tremblement de terre à *Nantes.*
12.	Serein; baromètre $28^p\ 1^l\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Gotha*, à *Cassel*, &c.
	Juin.	
4.	Serein; baromètre $28^p\ 1^l\frac{3}{4}$.	Tremblement de terre à *Rome.*
13.	Couvert, grand vent; le baromètre marquoit $27^p\ 11^l\frac{1}{2}$.	Ouragan furieux près de *Verdun.*
22.	Couvert; baromètre $28^p\ 1^l$.	Tremblement de terre à *Cologne.*

Suite de la XV.e Table.

Jours du Mois.	Températures à Paris.	Températures éloignées.
	Année 1767.	
	Juillet.	
17.	Pluie, tonnerre considérable; le baromètre marquoit 28^p 0^l.	Orage & tonnerre considérable près de *Saumur.*
20.	Couvert; baromètre 27^p 11^l.	Ouragan à *Condé* en Haynault.
	Août.	
6.	Grande pluie, tonnerre considérable; le baromètre marquoit 28^p 0^l.	Ouragan à *Nantes* & à *Boulogne.*
	Octobre.	
4.	Pluie, grand vent; le baromètre marquoit 27^p 5^l.	Ouragan violent à *Montmorillon* près de Poitiers.
	Année 1768.	
	Mars.	
9.	Serein; baromètre 28^p $3^l\frac{3}{4}$.	Globe de feu à *Villefranche* en Rouergue, & en *Languedoc.*
23.	Serein, très-grand vent; baromètre 28^p 5^l.	Ouragan furieux à *Dantzick.*
	Avril.	
13.	Serein; baromètre 28^p $2^l\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Pau.*
25.	Couvert; baromètre 28^p $0^l\frac{3}{4}$.	Tremblement de terre à l'*Orient.*
30.	Couvert; baromètre 27^p 8^l.	Tremblement de terre à *Naples* & en *Italie.*
	Mai.	
4.	Couvert; baromètre 28^p 0^l	Tremblement de terre à *Parme.*
15.	Couvert; baromètre 28^p 2^l.	Tremblement de terre dans le Comté d'*Iork.*
19.	Serein; baromètre 27^p $11^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre à *Gènes.*

Suite de la XV.^e Table.

Jours du Mois.	TEMPÉRATURES à PARIS.	TEMPÉRATURES éloignées.
	ANNÉE 1768.	
	Juin.	
9.	Couvert, pluie; barom. $27^p\ 7^l\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Lisbonne.*
	Août.	
20.	Chaleur médiocre; le thermomètre marquoit $21^d\frac{3}{4}$.	Chaleur excessive à *Rome*, à *Naples* & en *Italie.*
	Octobre.	
20.	Serein; baromètre $28^p\ 3^l\frac{3}{4}$.	Tremblement de terre à *Florence.*
28.	Aurore boréale.	Aurore boréale à *Rome* & à *Vienne* en Autriche.
	Novembre.	
4.	Doux; le thermomètre marquoit 10^d de dilatation.	Froid à *Drontheim*; thermomètre 11^d de condensation.
	Décembre.	
5.	Aurore boréale.	Aurore boréale à *Berlin*, à *Vienne* en Autriche, &c.
	ANNÉE 1769.	
	Janvier.	
	Température très-douce pendant tout le mois.	Même température à *Stockolm.*
	Mai.	
1.	Serein; le baromètre marquoit $28^p\ 4^l\frac{1}{4}$.	Ouragan & tremblement de terre à *Bagdad.*
	Juillet.	
16.	Très-chaud; le thermomètre marquoit $27^d\frac{1}{2}$.	Grande chaleur à *Vienne* en Autriche; thermomètre $23^d\frac{1}{4}$.
	Août.	
4.	Serein; baromètre $28^p\ 1^l\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Ausbourg.*

Suite

Suite de la XV.^{e} Table.

Jours du Mois.	TEMPÉRATURES à PARIS.	TEMPÉRATURES éloignées.
	ANNÉE 1769.	
	Novembre.	
28.	Serein; baromètre $28^p\ 8^l$.	Globe de feu & autres météores ignés à *Bitche*, dans la Lorraine Allemande.
	Décembre.	
1.	Serein; baromètre $28^p\ 6^l\frac{1}{2}$. Tremblement de terre.	Tremblement de terre à *Rouen*, à *Montmorenci*, &c.
17.	Pluie, vent violent; barom. $28^p\ 5^l$.	Orage furieux à *Vienne* en Autriche.
	ANNÉE 1770.	
	Janvier.	
18.	Pluie & neige; le baromètre marquoit $28^p\ 2^l$.	Aurore boréale à *Rome*, à *Cadix*, à *Gênes*, à *Tyrnaw*.
	Février.	
27.	Vent violent; baromètre $27^p\ 4^l$.	Ouragan furieux à *Livourne*.
	Mai.	
26.	Couvert; baromètre $27^p\ 9^l\frac{3}{4}$.	Ouragan furieux à *Aumale* en Normandie.
	Juin.	
3.	Couvert; le baromètre marquoit $28^p\ 0^l\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre très-considérable à *Saint-Domingue*.
25.	Couvert; baromètre $28^p\ 1^l\frac{1}{4}$.	Ouragan considérable à *Stockolm*.
	Juillet.	
29.	Couvert; baromètre $28^p\ 2^l$.	Tremblement de terre à *Belley*.
	Août.	
28.	Serein; baromètre $28^p\ 1^l$; aurore boréale à 2^h du matin.	Aurore boréale très-considérable à *Honfleur*.

Suite de la XV.^e Table.

Jours du Mois.	Températures à Paris.	Températures éloignées.
	Année 1770.	
	Septembre.	
17.	Aurore boréale.	Aurore boréale à *Vienne* en Autriche & à *Pékin.*
	Décembre.	
27.	Pluie; baromètre $27^p\ 9^l\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Sienne.*
	Année 1771.	
	Janvier.	
7.	Neige; baromètre $27^p\ 10^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre à *Livourne.*
12.	Couvert; le baromètre marquoit $27^p\ 7^l\frac{3}{4}$.	Tremblement de terre à *Bellonese,* dans la République de Venise, & à *Livourne.*
	Mars.	
20.	Couvert; baromètre $28^p\ 2^l$.	Tremblement de terre à *Florence.*
25.	Froid, neige; baromètre $27^p\ 10^l$.	Neige à *Rome.*
	Juillet.	
17.	Globe de feu très-confidérable; baromètre $28^p\ 1^l\frac{1}{4}$, Grande chal. thermomètre 26^d.	Globe de feu obfervé dans une grande partie de la *France.*
	Août.	
7.	Serein; baromètre $27^p\ 11^l\frac{1}{2}$. Très-chaud; thermomètre 28^d.	Tremblement de terre à *Livourne.*

XVI.^e TABLE.

DEGRÉS au-dessous de la congélation.			DEGRÉS au-dessous de la congélation.		
De l'Isle.	Réaumur.	Fahrenheit.	De l'Isle.	Réaumur.	Fahrenheit.
Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
153.	O.	32.	167¼.	½	15¼.
153½.	¼	31½.	167¾.	¾	14⅔.
154.	½	31.	168¼.	VIII.	14.
154½.	¾	30⅓.	168¾.	¼	13½.
155.	I.	29¾.	169¼.	½	13.
155⅓.	¼	29⅓.	169¾.	¾	12⅓.
156.	½	28¾.	170¼.	IX.	11¾.
156⅓.	¾	28½.	170½.	¼	11½.
156¾.	II.	27½.	171.	½	10¾.
154¼.	¼	27.	171½.	¾	10.
158.	½	26½.	172.	X.	9⅔.
158⅓.	¾	26.	172½.	¼	9.
158⅔.	III.	25⅓.	173.	½	8½.
159.	¼	24¾.	173½.	¾	8.
159¾.	½	24¼.	174.	XI.	7½.
160¼.	¾	23⅔.	174½.	¼	7.
160½.	IV.	23¼.	175.	½	6⅜.
161.	¼	22¾.	175⅜.	¾	5⅞.
161½.	½	22.	175⅞.	XII.	5⅜.
162.	¾	21¼.	176½.	¼	4¾.
162¼.	V.	20¾.	177.	½	4⅜.
163.	¼	20¼.	177⅜.	¾	3⅝.
163½.	½	19⅔.	177⅞.	XIII.	3.
164.	¾	19.	178½.	¼	3½.
164½.	VI.	18⅔.	179.	½	2⅓.
165.	¼	18¼.	179⅜.	¾	1.
165⅓.	½	17½.	179¾.	XIV.	− 0¾.
165¾.	¾	17.	180¼.	¼	− 0¼.
166⅓.	VII.	16⅓.	180¾.	½	− 0⅜.
166¾.	¼	16.	181¼.	¾	− 0.
			181¾.	XV.	+ 0.

Suite de la XVI.^e Table.

DEGRÉS au-deſſus de la congélation.			DEGRÉS au-deſſus de la congélation.		
De l'Iſle.	Réaumur.	Fahrenheit.	De l'Iſle.	Réaumur.	Fahrenheit.
Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
153.	O.	32.	$138\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$	$48\frac{3}{4}$.
$152\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{4}$	$32\frac{1}{2}$.	$138\frac{1}{4}$.	$\frac{3}{4}$	$49\frac{3}{8}$.
$152\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{2}$	$33\frac{1}{8}$.	$137\frac{3}{4}$.	VIII.	50.
152.	$\frac{3}{4}$	33.	$137\frac{1}{8}$.	$\frac{1}{4}$	$50\frac{1}{2}$.
151.	I.	$34\frac{1}{4}$.	$136\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{2}$	$51\frac{1}{8}$.
$150\frac{2}{3}$.	$\frac{1}{4}$	$34\frac{3}{4}$.	$136\frac{1}{4}$.	$\frac{3}{4}$	$51\frac{5}{8}$.
$150\frac{1}{8}$.	$\frac{1}{2}$	$35\frac{3}{8}$.	$135\frac{7}{8}$.	IX.	$52\frac{1}{8}$.
$149\frac{3}{4}$.	$\frac{3}{4}$	36.	$135\frac{3}{8}$.	$\frac{1}{4}$	$52\frac{3}{4}$.
$149\frac{1}{8}$.	II.	$36\frac{1}{2}$.	$134\frac{7}{8}$.	$\frac{1}{2}$	$53\frac{1}{4}$.
$148\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{4}$	37.	$134\frac{1}{2}$.	$\frac{3}{4}$	$54\frac{7}{8}$.
$148\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{2}$.	$133\frac{7}{8}$.	X.	$54\frac{3}{8}$.
$147\frac{3}{4}$.	$\frac{3}{4}$	$38\frac{1}{8}$.	$133\frac{3}{8}$.	$\frac{1}{4}$	55.
$147\frac{1}{4}$.	III.	$38\frac{3}{4}$.	133.	$\frac{1}{2}$	$55\frac{1}{2}$.
$146\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{4}$	$39\frac{1}{4}$.	$132\frac{3}{4}$.	$\frac{3}{4}$	56.
$146\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{2}$	$39\frac{3}{4}$.	132.	XI.	$56\frac{5}{8}$.
$146\frac{7}{8}$.	$\frac{3}{4}$	$40\frac{3}{8}$.	$131\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{4}$	$57\frac{3}{4}$.
$145\frac{1}{3}$.	IV.	41.	131.	$\frac{1}{2}$	$58\frac{7}{8}$.
$144\frac{7}{8}$.	$\frac{1}{4}$.	$41\frac{5}{8}$.	$130\frac{1}{2}$.	$\frac{3}{4}$	$58\frac{1}{4}$.
$144\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$	$42\frac{1}{4}$.	$130\frac{1}{8}$.	XII.	$59\frac{7}{8}$.
144.	$\frac{3}{4}$	$42\frac{3}{4}$.	$129\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{4}$	$59\frac{1}{2}$.
$143\frac{1}{2}$.	V.	$43\frac{1}{4}$.	$129\frac{1}{8}$.	$\frac{1}{2}$	60.
143.	$\frac{1}{4}$	$43\frac{7}{8}$.	$128\frac{1}{2}$.	$\frac{3}{4}$	$60\frac{1}{2}$.
$142\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$	$44\frac{3}{8}$.	$128\frac{1}{8}$.	XIII.	$61\frac{1}{8}$.
142.	$\frac{3}{4}$	45.	$127\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{4}$	$61\frac{3}{4}$.
$141\frac{1}{2}$.	VI.	$45\frac{1}{2}$.	$127\frac{1}{8}$.	$\frac{1}{2}$	$62\frac{1}{4}$.
141.	$\frac{1}{4}$	46.	$126\frac{3}{4}$.	$\frac{3}{4}$	$62\frac{7}{8}$.
$140\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$	$46\frac{5}{8}$.	$126\frac{1}{4}$.	XIV.	$63\frac{3}{8}$.
$140\frac{1}{8}$.	$\frac{3}{4}$	$47\frac{1}{8}$.	$125\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{4}$	64.
$139\frac{3}{8}$.	VII.	$47\frac{3}{4}$.	$125\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{2}$	$64\frac{1}{2}$.
$139\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{4}$	48.	$124\frac{7}{8}$.	$\frac{3}{4}$	65.

Suite de la XVI.e Table.

DEGRÉS au-dessus de la congélation.			DEGRÉS au-dessus de la congélation.		
De l'Isle.	Réaumur.	Fahrenheit.	De l'Isle.	Réaumur.	Fahrenheit.
Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
$124\frac{3}{8}$.	XV.	$65\frac{1}{2}$.	$110\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{2}$	$82\frac{1}{2}$.
$123\frac{7}{8}$.	$\frac{1}{4}$	$66\frac{1}{8}$.	$109\frac{5}{8}$.	$\frac{3}{4}$	$83\frac{1}{4}$.
$123\frac{3}{8}$.	$\frac{1}{2}$	$66\frac{3}{4}$.	$109\frac{1}{4}$.	XXIII.	$83\frac{3}{4}$.
123.	$\frac{3}{4}$	67.	$108\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{4}$	$84\frac{3}{8}$.
$122\frac{3}{8}$.	XVI.	$67\frac{7}{8}$.	$108\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{2}$	85.
$121\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{4}$	$68\frac{1}{4}$.	$107\frac{3}{4}$.	$\frac{3}{4}$	$85\frac{1}{2}$.
$121\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$	69.	$107\frac{1}{4}$.	XXIV.	86.
121.	$\frac{3}{4}$	$69\frac{1}{2}$.	$106\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{4}$	$86\frac{1}{2}$.
$120\frac{1}{2}$.	XVII.	$70\frac{1}{8}$.	$106\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{2}$	87.
120.	$\frac{1}{4}$	$70\frac{1}{2}$.	$105\frac{7}{8}$.	$\frac{3}{4}$	$87\frac{1}{2}$.
$119\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$	$71\frac{1}{4}$.	$105\frac{1}{3}$.	XXV.	$88\frac{1}{4}$.
$119\frac{1}{8}$.	$\frac{3}{4}$	$71\frac{7}{8}$.	$104\frac{7}{8}$.	$\frac{1}{4}$	$88\frac{5}{8}$.
$118\frac{1}{2}$.	XVIII.	$72\frac{3}{8}$.	$104\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$	$89\frac{1}{8}$.
$118\frac{1}{8}$.	$\frac{1}{4}$	73.	104.	$\frac{3}{4}$	$89\frac{3}{4}$.
$117\frac{5}{8}$.	$\frac{1}{2}$	$73\frac{1}{2}$.	$103\frac{1}{2}$.	XXVI.	$90\frac{1}{2}$.
$117\frac{1}{8}$.	$\frac{3}{4}$	$74\frac{1}{8}$.	103.	$\frac{1}{4}$	$90\frac{3}{4}$.
$116\frac{5}{8}$.	XIX.	$74\frac{3}{4}$.	$102\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$	$91\frac{1}{2}$.
$116\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4}$	$75\frac{3}{8}$.	102.	$\frac{3}{4}$	92.
$115\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{2}$	$75\frac{7}{8}$.	$101\frac{1}{2}$.	XXVII.	$92\frac{5}{8}$.
$115\frac{1}{4}$.	$\frac{3}{4}$	$76\frac{3}{8}$.	101.	$\frac{1}{4}$	$92\frac{2}{3}$.
$114\frac{3}{}$.	XX.	77.	$100\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$	$93\frac{1}{2}$.
$114\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4}$	$77\frac{1}{2}$.	100.	$\frac{3}{4}$	$94\frac{1}{4}$.
$113\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{2}$	78.	$99\frac{1}{2}$.	XXVIII.	95.
$113\frac{3}{8}$.	$\frac{3}{4}$	$78\frac{3}{4}$.	99.	$\frac{1}{4}$	$95\frac{1}{2}$.
113.	XXI.	$79\frac{1}{4}$.	$98\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$	96.
$112\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{4}$	$79\frac{7}{8}$.	98.	$\frac{3}{4}$	$96\frac{1}{2}$.
112.	$\frac{1}{2}$	$80\frac{1}{2}$.	$97\frac{1}{2}$.	XXIX.	97.
$111\frac{1}{2}$.	$\frac{3}{4}$	81.	$97\frac{1}{8}$.	$\frac{1}{4}$	$97\frac{2}{3}$.
111.	XXII.	$81\frac{1}{2}$.	$96\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{2}$	$98\frac{1}{4}$.
$110\frac{5}{8}$.	$\frac{1}{4}$	$82\frac{3}{8}$.	$96\frac{1}{4}$.	$\frac{3}{4}$	$98\frac{3}{4}$.

Suite de la XVI.^e Table.

DEGRÉS au-dessus de la congélation.			DEGRÉS au-dessus de la congélation.		
De l'Isle.	Réaumur.	Fahrenheit.	De l'Isle.	Réaumur.	Farhenheit.
Degrés.	Degrés.	Degrés.	Degrés.	Degrés.	Degrés.
$95\frac{3}{4}$.	XXX.	$99\frac{1}{4}$.	$92\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{2}$	$102\frac{1}{4}$.
$95\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4}$	$99\frac{3}{4}$.	$92\frac{1}{2}$.	$\frac{3}{4}$	$102\frac{1}{2}$.
$94\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{2}$	$100\frac{1}{4}$.	92.	XXXII.	103.
$94\frac{1}{4}$.	$\frac{3}{4}$	$100\frac{3}{4}$.	$91\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{4}$	$103\frac{1}{2}$.
94.	XXXI.	$101\frac{1}{4}$.	91.	$\frac{1}{2}$	104.
$93\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4}$	$101\frac{3}{4}$.	$90\frac{1}{2}$.	$\frac{3}{4}$	$104\frac{1}{2}$.

TROISIÈME PARTIE.

Résultats de mes Tables de Réduction.

LES Tables précédentes ont exigé beaucoup de travail, & cependant elles ne présentent qu'un petit nombre de résultats, parce que je ne donnerai ici que les plus certains & les mieux fondés ; persuadé que je travaillerois plutôt à retarder les progrès de la Science météorologique qu'à les avancer, si je voulois hasarder ici toutes les conjectures que j'ai pu former en étudiant & en analysant les Tables de M. Messier. Ces conjectures peuvent m'être utiles en particulier, parce que m'étant dévoué à l'étude de la Météorologie, je serai à portée de juger par la suite si elles sont fondées ou non, & en supposant qu'elles le soient, j'aurai toujours assez le temps pour les faire connoître ; mais en attendant que j'aie acquis à ce sujet des degrés de certitude qui me manquent à présent, je crois devoir être très-discret & très-réservé dans l'exposé des résultats.

I.^ere Table. La *I.^ere Table* est trop générale pour qu'elle puisse présenter des résultats satisfaisans ; comme les objets qu'elle renferme sont plus resserrés dans les Tables suivantes, les

résultats qu'elles nous offriront en seront aussi & plus certains & plus faciles à tirer. Je remarquerai seulement qu'ayant comparé les degrés de chaleur & de froid de ce Calendrier météorologique avec ceux d'un pareil Calendrier météorologique que j'ai inséré dans mon *Traité de Météorologie* *, j'ai trouvé que la somme des degrés de chaleur étoit plus grande & celle des degrés de froid plus petite, dans ce nouveau Calendrier que dans le premier. Il faut faire attention que le premier Calendrier a été dressé sur les observations de M. du Hamel, qui ont été faites à la campagne, & l'on sait qu'en général les chaleurs sont moins grandes & que le froid est plus vif dans les campagnes que dans les villes. Ainsi le premier Calendrier indiquera les degrés de chaleur & de froid pour les campagnes, & celui-ci marquera la même chose pour les villes.

* Page 141.

II.e & III.e Tables.

Il paroît par les *II.e & III.e Tables*, 1.° que les vents dominans des mois d'hiver, d'été & d'automne, sont ou le Sud ou le Sud-ouest; & qu'au printemps, ce sont ceux du Nord ou de Nord-est qui dominent, 2.° que le plus grand degré de chaleur, *année commune*, est de 27 degrés $\frac{1}{2}$ dans le mois d'Août, & le plus grand degré de froid, aussi *année commune*, de 6 degrés $\frac{3}{4}$ dans le mois de Janvier, ce qui fait une différence de 34 degrés $\frac{1}{4}$ entre ces deux termes extrêmes; 3.° que la somme des plus grands degrés de chaleur de chaque mois, divisée par le nombre des mois, est de 17 degrés $\frac{1}{4}$, & la somme des plus grands degrés de froid en hiver, divisée par le nombre des mois d'hiver, est de 2 degrés $\frac{3}{4}$, ce qui établit une différence de 20 degrés; 4.° que la plus grande élévation du mercure à Paris, *année commune*, est de $28^p\ 4^l,4$ dans le mois de Novembre, & la plus petite élévation de $27^p\ 2^l,1$ au mois de Décembre, d'où résulte une différence de $1^p\ 2^l,3$: l'élévation moyenne est de $27^p\ 11^l,5$; elle a lieu assez ordinairement dans le mois de Novembre. Le mercure est en général plus élevé dans les mois d'été que dans les mois d'hiver, quoique les plus grandes élévations aient lieu en hiver. Le mercure

éprouve de plus grandes variations dans les mois d'hiver; il eſt plus fixe & plus conſtamment élevé dans ceux d'été.

IV.e Table. J'ai donné dans la *IV.e Table* le réſultat du Calendrier météorologique, qui ne renferme lui-même que les réſultats moyens des Tables de M. Meſſier. Selon cette Table, les vents dominans ſont le Sud & le Sud-oueſt; le degré moyen de chaleur de l'année eſt de 9 degrés $\frac{1}{2}$, le froid moyen d'un demi-degré; l'élévation moyenne du mercure de $27^p\ 11^l,7$, & l'état moyen du ciel, humide & variable.

V.e Table. La *V.e Table* eſt le réſultat de chaque année d'obſervations; elle nous montre, 1.° que les vents les plus dominans ſont le Sud & le Sud-oueſt; 2.° que la plus chaude de ces dix années paroît avoir été l'année 1767, où la ſomme des plus grands degrés de chaleur de chaque mois, diviſée par le nombre des mois, donne 18 degrés $\frac{1}{2}$ de chaleur pour l'année commune; mais comme on ne doit pas juger de la température d'une année par les degrés extrêmes de chaleur & de froid qu'on a éprouvé, que cela dépend plutôt de la continuité de la chaleur qui eſt aſſez exactement indiquée par le degré moyen de chaleur & de froid qui réſulte de toutes les obſervations faites pendant l'année, j'en conclus qu'il faut regarder l'année 1763 comme la plus chaude des dix années, puiſque la ſomme de tous les degrés de chaleur moyenne diviſée par le nombre des obſervations, donne 10 degrés $\frac{1}{2}$ pour la chaleur moyenne de l'année entière: 3.° que l'année 1768, ſemble pareillement avoir été la plus froide des dix années, puiſque la ſomme des plus grands degrés de froid, diviſée par le nombre des obſervations, donne 7 degrés de condenſation, & que cependant par le fait, l'année 1767 a été la plus froide, puiſque le degré de froid moyen a été de 4 degrés $\frac{3}{4}$, tandis qu'il n'a été que de 4 degrés en 1768; ſans doute que le froid a duré plus long-temps en 1767 qu'en 1768, & c'eſt cette continuité de chaleur ou de froid qui influe ſur la température d'une année & qui la caractériſe: 4.° que la plus grande élévation moyenne du mercure a été en 1767 de

28^p

28^p 4^l,11, & la plus petite élévation moyenne de ces dix années est de 27^p 5^l,11, qui a eu lieu en 1772.

VI.e Table. La *VI.e Table* nous offre un résultat plus exact encore, puisqu'elle contient le résultat de tous les résultats précédens; or, par cette Table, nous voyons que dans l'*année commune*, 1.° les vents dominans sont le Sud & le Sud-ouest; 2.° la somme des plus grands degrés de chaleur de chaque mois, divisée par le nombre des mois, donne 17,8 degrés; 3.° la somme des plus grands degrés de froid, divisée également par le nombre des mois d'hiver ou par cinq, donne 4,0 degrés de condensation; 4.° la somme des degrés de chaleur moyenne de chaque mois, divisée par le nombre des mois, donne 9,9 degrés pour la chaleur moyenne de l'année; 5.° la somme des degrés moyens de froid, &c. donne 1,3 degrés de condensation pour le froid moyen de l'année; 6.° la somme des plus grandes élévations du mercure, divisée, &c. donne 28^p 3^l,6, & cette élévation a plus souvent lieu le matin que le soir; 7.° la somme des plus petites élévations du mercure, divisée, &c. donne 27^p 4^l,7, & elle a lieu aussi le matin; 8.° enfin la somme des élévations moyennes de chaque mois, divisée, &c. donne 27^p 11^l,5 pour l'élévation moyenne de l'année. Voilà, ce me semble, le résultat le plus exact qu'on puisse obtenir, passons aux autres Tables.

VII.e Table. La *VII.e Table* indique les vents qui ont soufflé matin & soir pendant dix ans : voici l'ordre dans lequel les huit vents principaux ont régné :

Matin.

S. — S. O. — N. E. — O. — N. — N. O. — S. E. — E.

Soir.

S. O. — S. — O. — N. E. — N. — N. O. — S. E. — E.

VIII.e Table. La *VIII.e Table* est le résultat de la Table précédente par rapport à l'*année commune :* suivant cette Table, voici l'ordre des vents qui doivent souffler plus ou moins fréquemment :

S. O. — S. — O. — N. E. — N. — N. O. — S. E. — E.

En général le vent d'Eſt ſouffle très-rarement dans le climat de Paris. On verra auſſi dans cette même Table, que le vent dominant en Janvier, Février & Décembre eſt le Sud; en Mars & Avril, le Nord-eſt; en Mai, Septembre, Octobre & Novembre, le Sud-oueſt; en Juin & Juillet l'Oueſt, & en Août le Sud-oueſt & l'Oueſt.

IX.e Table. Il paroît par la *IX.e Table,* 1.° que la pluie & la neige tombent bien plus fréquemment pendant le jour que pendant la nuit; il y a une différence de près de moitié entre les quantités qui expriment les nombres de jours ou de nuits où il eſt tombé de l'eau; à l'égard de la grêle, je ne crois pas qu'on en ait jamais vu tomber la nuit: 2.° le nombre des jours couverts a ſurpaſſé de près de moitié celui des jours ſereins, &c. les deux Tables ſuivantes vont nous fournir des réſultats plus exacts.

X.e & XI.e Tables. Les *X.e & XI.e Tables* préſentent des réſultats différens à l'égard des jours ſereins & couverts, parce que dans la *X.e Table* j'ai déſigné ſous le nom de *jours couverts* ceux où le Soleil ne s'eſt point montré, & ſous le nom de *jours ſereins,* ceux où le Soleil a paru pendant quelques heures de la journée; au lieu que dans la *XI.e Table,* j'ai cru devoir adopter une troiſième diviſion pour y placer les jours où la température a été inconſtante, je les déſigne ſous le nom de *variables.* Il paroît par cette Table, 1.° que le mois d'Avril eſt le plus pluvieux, & les mois d'Août & de Septembre ſont les moins pluvieux; cependant ces deux mois & celui d'Août ſur-tout, paſſent avec raiſon pour ceux où les quantités de pluie ſont les plus grandes, quoique le nombre des jours de pluie y ſoit moindre que dans les autres mois. De tous les jours de l'année, il n'y en a qu'un ſeul où il ne ſoit point tombé d'eau pendant dix ans; ſavoir, le 18 Octobre: 2.° que le nombre des jours couverts eſt le plus grand en Février & le moindre en Août & Septembre, *& vice verſâ* pour les jours ſereins: 3.° que le nombre des jours variables eſt le plus grand en Avril & le

moindre en Février : 4.° que les brouillards ſont plus fréquens en Décembre qu'en tout autre mois de l'année.

La *XII.e Table* contient le réſultat des deux précédentes; elle fixe pour l'*année commune* le nombre des XII.e Table.

Jours de	neige......	à	10.
	pluie.......	à	186.
	couverts....	à	97.
	ſereins.....	à	87.
	variables....	à	182.
	brouillards...	à	31.
	tonnerre....	à	12.
	aurore boréale	à	4.

Voici une Table qui indique tous les réſultats que j'ai donnés juſqu'à préſent pour l'année moyenne; on ſe ſouviendra que ce ſont des réſultats moyens.

	THERMOMÈTRE.				BAROMÈTRE.		
	Plus grand degré de Chaleur.	Plus grand degré de Froid.	Degré moyen de Chaleur.	Degré moyen de Froid.	Plus grande élévation.	Moindre élévation.	Élévation moyenne.
	Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes.*	*pouces lignes.*	*pouces lignes.*
ANNÉE MOYENNE.	27. 8.	— 4. 0.	9. 9.	— 1. 3.	28. 3,6.	27. 4,7.	27. 11,5.

	NOMBRE DES JOURS DE								VENTS domin.	
	Neige.	Pluie.	Couvert.	Serein.	Variable.	Brouill.	Tonn.	Aur.bor.		
ANNÉE MOYENNE.	10.	186.	97.	87.	182.	31.	12.	4.	Sud & S. O.	Variable & humide.

On voit dans la *XIII.e Table* que le plus grand degré de froid obſervé à Paris pendant dix ans, a été de 14 deg. ½ de condenſation le 5 Janvier 1768; ce froid a été général XIII.e Table.

dans toute l'Europe, aussi-bien que ceux des 11 Janvier 1766 & 7 Janvier 1767.

Le plus grand degré de chaleur observé aussi à Paris pendant le même espace de dix années, a été de 31 degrés $\frac{1}{2}$ de dilatation le 26 Juin 1772; la différence entre les deux extrêmes de froid & de chaud, a été de 46 degrés.

La plus grande élévation du mercure a été observée de $28^p\ 8^l,3$ le 28 & le 29 Janvier 1770 *, & la plus petite élévation a été de $26^p\ 7^l,3$ le 12 Décembre 1763; la différence entre ces deux termes a donc été de $2^p\ 1^l$.

XIV.e Table. De la comparaison que j'ai faite des observations de M. Messier avec les miennes dans la *XIV.e Table*, on peut conclure, 1.° que le mercure se soutient à Montmorenci 1 $\frac{11}{12}$.mes de ligne plus bas qu'au Collége Royal; & comme il se soutient au Collége Royal 1,3 lignes plus bas qu'au bord de la Seine, il s'ensuit qu'à Montmorenci le mercure y est moins élevé qu'à Paris de 3 lignes, ce qui donne environ 39 toises pour l'élévation de Montmorenci au-dessus du niveau de la Seine; 2.° que la chaleur moyenne est plus petite d'environ 1 degré à Montmorenci qu'à Paris, & que le froid y est à peu-près égal. Cependant le froid est plus vif à Montmorenci, comme je m'en suis assuré depuis que je fais usage d'un thermomètre beaucoup plus sensible que celui qui me servoit dans mes premières années d'observations.

XV.e Table. On trouvera en jetant les yeux sur la *XV.e Table*, que les températures éloignées n'ont pas toujours un rapport bien marqué entre elles; cependant on peut dire en général que les extrêmes, soit de chaleur, soit de froid sont assez universels, & que les tremblemens de terre sont assez ordinairement accompagnés d'abaissemens & de variations considérables dans le baromètre, qui se font apercevoir à de très-grandes distances des pays où les tremblemens de terre se sont fait sentir. Les grands vents, les ouragans, les orages, les aurores

* Le 24 Décembre 1774, le mercure s'est élevé à $28^p\ 9^l,1$; on ne l'avoit pas encore vu si haut à Paris.

boréales, &c. sont de même communs à de très-grandes étendues de pays. En général les états violens de l'air influent sur une très-grande partie de l'atmosphère.

La *XVI.e & derniere Table,* nous apprend 1.° que, $1\frac{7}{8}$ degré du thermomètre de M. de l'Isle, répondent à un degré de celui de M. de Reaumur, & que 2 degrés $\frac{1}{4}$ du thermomètre de Fahrenheit répondent à un degré de celui de M. de Reaumur. 2.° Que le zéro ou le terme de la congélation dans le thermomètre de M. de Reaumur, répond à 32 degrés du thermomètre de Fahrenheit, & à 153 degrés de celui de M. de l'Isle. XVI.e Table

Je termine cette troisième partie par plusieurs remarques & observations particulières que j'ai trouvées éparses dans le Journal de M. Messier. Je suivrai l'ordre qu'elles y occupent. Observations détachées.

I. Le 1.er Avril 1764, jour de la fameuse Éclipse de Soleil, qui fut presque annulaire à Paris, M. Messier observa fréquemment le baromètre & le thermomètre pendant toute la matinée de ce jour; il fit le lendemain matin des observations correspondantes qu'il compara avec celles du jour précédent. Son dessein étoit de s'assurer si la grandeur de cette Éclipse pourroit occasionner une diminution de chaleur qui fût sensible. M. de l'Isle avoit déjà fait des observations relatives au même objet pendant l'Éclipse totale du 22 Mai 1724 *. Je trouve trente-deux observations du baromètre & du thermomètre, faites le 1.er Avril par M. Messier, depuis 9 heures $\frac{1}{2}$ du matin, jusqu'à 12 heures $\frac{1}{2}$. Il résulte de ces observations, que pendant l'Éclipse, le baromètre a monté d'un quart de ligne, & qu'il est descendu ensuite de la même quantité; & que la liqueur du thermomètre a descendu de 1 degré $\frac{1}{2}$. Le vent a soufflé du sud-ouest pendant tout le temps que les observations ont duré, & le ciel a toujours été couvert. Le 2 Avril, M. Messier fit dix-neuf observations, depuis $10^h\ 47'$, jusqu'à $12^h\ 15'$ du matin; le baromètre ne varia pas, & la liqueur du thermomètre monta

* Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, *année 1724, page 318.*

toujours pendant ce temps, comme elle a coutume de faire. Le ciel fut aussi couvert pendant cette matinée, & le vent étoit nord-nord-ouest. Je m'abstiens de tirer aucune conséquence de tout ceci, & j'imiterai en cela la retenue de M. de l'Isle, qui avoit fait à peu-près les mêmes observations en 1724, comme je l'ai dit, & qui n'osoit en rien conclure.

II. Au mois d'Octobre 1770, M. Messier compara les observations du baromètre & du thermomètre, qu'il faisoit à Paris au Collége royal de France, avec de pareilles observations faites à Corbeil, situé à sept lieues de Paris. Il résulte de cette comparaison, que la liqueur du thermomètre se tient à 2 degrés $\frac{1}{2}$ plus bas à Corbeil qu'à Paris, & que le mercure est plus élevé à Corbeil qu'à Paris de 1 ligne $\frac{1}{2}$, n'ayant égard qu'à la position respective des baromètres.

Le baromètre de Corbeil se soutient 1 ligne plus haut que celui de M. Messier; il est élevé à Corbeil au-dessus de l'eau de la Seine de 33 pieds, la rivière étant à 4 pieds au Pont-royal. La pente de la rivière, depuis Corbeil jusqu'à Paris, est de 18 pieds, suivant le nivellement de M. Picard; & au Collége royal, le baromètre se soutient 1 ligne $\frac{3}{12}$ de ligne plus bas qu'au bord de la Seine. D'après ces données, le baromètre de Corbeil se soutiendroit $\frac{1}{12}$ de ligne plus bas qu'à Paris, à compter du niveau de la Seine.

III. M. Messier fit, au mois d'Août 1768, une pareille comparaison des observations de son baromètre, avec les observations correspondantes que M. Baudouin, Maître des Requêtes, avoit faites à Compiegne. Il a trouvé que la différence entre ces deux villes étoit de $1^l, 4$, dont le mercure est plus élevé à Compiegne qu'à Paris.

IV. Enfin, au mois de Mars 1773, M. de Luc, de Genève, Auteur des excellentes *Recherches sur les Modifications de l'Atmosphère*, vint à Paris & y apporta le baromètre portatif, dont il a fait usage pendant plus de dix ans pour faire toutes les expériences curieuses qui ont servi de fondement à la belle Théorie qu'il a établie dans son Ouvrage. Il le compara avec les baromètres de M.rs

Meſſier & Lavoiſier ; il réſulte de cette comparaiſon, que le baromètre de M. de Luc ſe ſoutient 1 ligne $\frac{2}{16}$ plus haut que celui de M. Meſſier, & une ligne ſeulement plus haut que celui de M. Lavoiſier.

V. M. Meſſier rapporte, au mois de Juin 1772, des expériences qu'il fit à Corbeil, dans la Seine, avec des thermomètres, pour connoître la température de l'eau, ſoit le matin, ſoit le ſoir. Il obſerva à différentes heures de la journée, & il a trouvé qu'en général l'eau eſt plus chaude le matin que le ſoir. Cela vient, je penſe, de ce que l'eau reçoit plus difficilement l'impreſſion de la chaleur que l'air ; mais auſſi, lorſqu'elle l'a reçue, elle la perd plus difficilement, & la conſerve plus long-temps.

VI. On trouve encore, dans le Journal de M. Meſſier, pluſieurs deſcriptions d'Aurores boréales, d'Arcs-en-ciel ſolaires & lunaires, & d'autres météores dont je ne parle pas ici, parce que ces deſcriptions ſe trouvent en partie dans les volumes des *Savans étrangers*, & en partie dans les Papiers publics. Toutes les obſervations que cet Aſtronome laborieux a faites des différentes Comètes qu'il a découvertes, y ſont auſſi exactement marquées, auſſi-bien que la deſcription du météore connu ſous le nom de *globe de feu*, qui parut le 17 Juillet 1771. Le Mémoire que M. le Roi a lû ſur ce ſujet, à la rentrée ſuivante de l'Académie, & qui ſe trouve dans le volume de 1771 *, me diſpenſera d'en parler ici.

On peut juger maintenant des ſoins & des attentions que M. Meſſier apporte aux obſervations météorologiques ; je ſouhaite que ſon exemple contribue à multiplier le nombre des obſervateurs. Et ſi les Savans, au jugement deſquels je ſoumets mon travail, penſent qu'il répande du jour ſur la Science Météorologique, ce ſera un nouveau motif pour engager les Phyſiciens à la cultiver.

---

* Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, *année 1771, page 668.*

QUATRIÈME PARTIE.

Méthode pour rédiger à la fin de chaque mois & de chaque année les Observations Météorologiques.

J'ai donné, dans mon *Traité de Météorologie* *, la manière de rédiger les obſervations météorologiques à la fin de chaque année, & j'ai tracé dans une ſuite de Tables qui ont rapport à l'année 1771, la méthode que je me ſuis faite pour cela. Mais ce travail devient très-pénible, ſi l'on n'a pas eu ſoin à la fin de chaque mois de rédiger les obſervations journalières, afin de parvenir à des réſultats. Quand on a eu cette précaution, il ne s'agit plus, à la fin de l'année, que de rédiger tous ces réſultats, ce qui eſt bien plus aiſé.

* *Livre V, p. 557 & ſuiv.*

Je vais donc développer les différens calculs qu'exige la réduction des obſervations de chaque mois. Comme j'ai un peu changé la forme de mes Tables météorologiques, j'en donnerai ici un modèle. Je choiſis les dix derniers jours du mois de Janvier 1775. Les opérations que je ferai ſur les obſervations faites pendant ces dix jours, feront comprendre de quelle manière on doit rédiger celles du mois entier. J'obſerve trois fois par jour chacun de mes inſtrumens; ainſi le diviſeur ſera ici le nombre 30; il ſeroit 93 pour tout le mois de Janvier, & 90 pour les mois qui n'ont que 30 jours.

Mes Tables ſont diviſées en ſept colonnes. J'en ai omis une ici, c'eſt celle du thermomètre que j'appelle *intérieur*, parce qu'il eſt appliqué ſur la planche de mon baromètre. J'omets encore d'autres colonnes où je marque les jours d'élévation ou d'abaiſſement extrême du mercure; les jours de pluie, de neige, de tonnerre, d'aurores boréales, de lumières zodiacales; les quantités d'eau fournies par la pluie, la neige, la grêle; les quantités d'évaporation, &c. L'inſpection de la Table ſuivante donnera une idée de celle de mon Journal. Je laiſſe en blanc le *verſo* de chaque Table, pour faire différentes notes ſur l'état des productions de la Terre, ſur l'Électricité de l'air, les Aurores boréales, l'Agriculture, la Phyſique, l'Hiſtoire naturelle, &c. &c.

EXTRAIT

EXTRAIT de mon Journal d'Obſervations Météorologiques.
JANVIER 1775.

du Mois.	Heures du jour.	THERM.	BAROM.		Aiguille aimantée.		VENT.	ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	*Pouc.*	*Lign.*	*Deg.*	*Min.*		
22	$7\frac{1}{4}$ mat.	$4\frac{3}{8}$	27	7	20	0	S.	Ciel en partie couvert, la nuit auſſi.
	$1\frac{1}{2}$ ſoir.	$8\frac{3}{4}$	27	7	20	0	S. O.	Ciel couvert humide, le mat. auſſi.
	$8\frac{1}{4}$ ſoir.	$5\frac{5}{8}$	27	$6\frac{1}{2}$	19	55	S.	Ciel en part. couv. l'après-midi br.
23	$7\frac{1}{4}$ mat.	$4\frac{1}{4}$	27	5	20	0	N. E.	Ciel couvert, la nuit auſſi.
	$1\frac{1}{2}$ ſoir.	$8\frac{1}{8}$	27	$5\frac{1}{4}$	20	0	N. E.	*Idem.*
	$8\frac{1}{4}$ ſoir.	$6\frac{1}{2}$	27	7	20	0	N. E.	*Idem.*
24	$7\frac{1}{4}$ mat.	$3\frac{1}{2}$	27	10	20	0	N. E.	*Idem*, pluie fine, la nuit auſſi.
	$1\frac{1}{2}$ ſoir.	$2\frac{5}{8}$	27	$11\frac{1}{4}$	20	0	N. E.	*Idem*, brouillard, le matin auſſi.
	$8\frac{1}{4}$ ſoir.	$-1\frac{1}{4}$	28	1	20	0	N. E.	*Idem.*
25	$7\frac{1}{4}$ mat.	$-8\frac{1}{2}$	28	2	20	0	N. E.	Ciel ſerein, vent froid, la nuit auſſi.
	$1\frac{1}{2}$ ſoir.	$-4\frac{1}{2}$	28	$1\frac{1}{2}$	20	0	N. E.	*Idem*, quelques nuages.
	$8\frac{1}{4}$ ſoir.	$-5\frac{1}{4}$	28	$0\frac{1}{4}$	19	55	N. E.	C. couv. en part. ſerein l'apr.-mid.
26	$7\frac{1}{4}$ mat.	$-5\frac{1}{4}$	27	10	20	0	S.	*Idem*, neige.
	$1\frac{1}{2}$ ſoir.	$1\frac{1}{2}$	27	$9\frac{1}{4}$	20	0	S. O.	*Idem*, dégel, verglas le matin.
	$8\frac{1}{4}$ ſoir.	$0\frac{1}{2}$	27	$10\frac{3}{4}$	19	55	S. O.	Ciel ſerein, l'après-midi auſſi.
27	$7\frac{1}{4}$ mat.	$-0\frac{1}{8}$	27	11	19	55	S.	Ciel en partie ſerein, la nuit auſſi.
	$1\frac{1}{2}$ ſoir.	5	27	$10\frac{1}{4}$	19	55	S.	Ciel ſerein le matin, brouill. giv.
	$8\frac{1}{4}$ ſoir.	3	27	9	19	55	S.	C. couv. en part. couv. l'après-midi
28	$7\frac{1}{4}$ mat.	3	27	8	19	55	S. O.	Ciel en part. couv. la nuit auſſi.
	$1\frac{1}{2}$ ſoir.	7	27	$8\frac{3}{4}$	19	55	O.	Ciel en partie couv. le matin auſſi.
	$8\frac{1}{4}$ ſoir.	$3\frac{5}{8}$	27	$9\frac{1}{4}$	19	50	S. O.	*Idem*, pet. aur. bor. à 6 heures $\frac{1}{2}$.
29	$7\frac{1}{4}$ mat.	$7\frac{1}{8}$	27	8	19	50	S. O.	*Idem*, grand vent, pluie la nuit.
	$1\frac{1}{2}$ ſoir.	10	27	$8\frac{1}{4}$	19	55	S. O.	*Id.* tr. hum. quelq. ray. de ☉ le mat.
	$8\frac{1}{4}$ mat.	$8\frac{3}{4}$	27	$8\frac{1}{2}$	19	50	S. O.	*Idem*, l'après-midi auſſi.
30	$7\frac{1}{4}$ mat.	$7\frac{3}{4}$	27	8	19	55	S. O.	*Idem*, grand vent humide.
	$1\frac{1}{2}$ ſoir.	$8\frac{1}{2}$	27	$8\frac{3}{4}$	20	0	S. O.	Ciel ſer. pluie, ouragan le matin.
	$8\frac{1}{4}$ ſoir.	$8\frac{1}{8}$	27	9	19	50	S. O.	Ciel couv. en part. ſer. l'apr.-mid.
31	$7\frac{1}{4}$ mat.	$5\frac{5}{8}$	27	$7\frac{3}{4}$	19	55	S.	C. couv. en part. aur. bor. le matin.
	$1\frac{1}{2}$ ſoir.	$7\frac{7}{8}$	27	$6\frac{3}{4}$	19	55	S. O.	Ciel couv. gr. vent, le matin auſſi.
	$8\frac{1}{4}$ ſoir.	8	27	7	20	0	S. O.	*Idem*, pluie l'après-midi.

Je suivrai l'ordre des colonnes qui renferment les observations.

1.° Je marque le plus grand degré de chaleur & le plus grand degré de froid observé pendant le mois. Le degré extreme de chaleur pendant ces dix jours a été 10 degrés. Le 29, à 1 heure $\frac{1}{2}$ du soir, le vent étant sud-ouest & le ciel couvert, le plus grand degré de froid a été $8^d \frac{1}{2}$ de condensation; le 25 à 7 heures $\frac{1}{4}$ du matin, le vent étant nord-est & le ciel serein. La différence entre ces deux degrés extrêmes de chaleur & de froid a été 18 degrés $\frac{1}{2}$.

2.° Pour avoir le degré moyen de chaleur de chaque jour, je fais deux sommes; l'une de tous les degrés de chaleur, & l'autre de tous les degrés de froid observés pendant ces dix jours; je retranche la plus petite somme de la plus grande, & je divise le reste par le nombre des observations. Exemple: je trouve que pendant ces dix jours la somme des degrés de chaleur a été de 137 degrés; celle des degrés de froid a été de 25 degrés; je fais ce calcul:

$$137^d - 25^d = \frac{112}{30} = 3 \text{ degrés } \frac{7}{10}.^e$$ *Chaleur moyenne.*

3.° Je passe aux observations du baromètre. La plus grande élévation du mercure a été de 28 pouces 2 lignes le 25 à 7 heures $\frac{1}{4}$ du matin, le vent étant nord-est & le ciel serein. La moindre élévation a été de 27 pouces 5 lignes le 23 à 7 heures $\frac{1}{4}$ du matin, le vent étant nord-est, & le ciel couvert; la différence entre ces deux extrèmes a été de 9 lignes.

4.° Je détermine l'élévation moyenne du mercure au matin, à midi & au soir, en additionnant séparément les élévations observées à ces différentes heures de la journée, & en divisant chaque somme par le nombre des observations. Exemple: Je trouve dans la Table précédente, que la somme des élévations du mercure a été, au matin & à midi, 277 pouces 5 lignes; & au soir, 277 pouces 8 lignes. Je fais le calcul suivant:

$$\left.\begin{matrix}\text{matin}\\ \text{midi}\end{matrix}\right\} \frac{277^{\text{pouc.}}\ 5^{\text{lign.}}}{10} = 27^{\text{pouc.}}\ 8^{\text{lignes}}\ \frac{9}{10}.^e$$ *Élévation moyenne.*

soit $\frac{277^{\text{pouc.}}\ 8^{\text{lign.}}}{10} = 27^{\text{pouc.}}\ 9^{\text{lignes}}\ \frac{2}{10}$.e *Élévation moyenne.*

Ainsi, l'élévation moyenne de chaque jour est de 27 pouces $9^{\text{lignes}}\ \frac{0}{10}$.e

5.° J'ai soin de noter dans mon regiſtre les jours où j'observe de grandes variations dans les baromètres, & j'en rends compte ensuite dans le détail de mes observations. Ainsi en Janvier 1775, le mercure monta beaucoup les 2, 6, 23 & 24; & il descendit beaucoup les 11, 26 & 31. En général, il a été fort élevé, & il a beaucoup varié vers la fin du mois.

6.° Comme les déclinaisons diurnes de l'aiguille aimantée sont fort importantes, je les donne depuis quelque temps en entier & telles qu'elles se trouvent dans mon regiſtre. Cela ne m'empêche pas de faire un article particulier où je marque la déclinaison moyenne du mois & les variations extraordinaires que j'ai observées, soit dans les circonstances d'une aurore boréale, du tonnerre, &c. soit dans d'autres circonstances. Je détermine la déclinaison moyenne par le même calcul qui me sert à fixer le degré moyen de chaleur & l'élévation moyenne du mercure. Ainsi la Table précédente me fournit le calcul suivant :

$\frac{598^{d}\ 20'}{30} = 19^{\text{deg.}}\ 56^{\text{minutes}}\ \frac{6}{10}$.e *Déclinaison moyenne.* *

7.° Je cherche quel a été le vent dominant, & pour cela je dresse la Table suivante, dans laquelle je marque le nombre de fois que chaque vent a règné. Le vent dominant pendant les dix derniers jours de Janvier a donc été le sud-ouest, & ensuite le nord-est & le sud. Je marque aussi les jours où il a été violent. Ainsi, en Janvier 1775, le vent souffla avec force les 29, 30 & 31.

* Depuis le 1.er Septembre 1774, jusqu'au 1.er Sept. 1775, la déclinaison moyenne de l'aiguille aimantée a été, le *matin*, de 19d 46′ 12″; à *midi*, de 19d 48′ 16″, & le *soir*, de 19d 45′ 47″.

VENTS.	NOMBRE de Jours où ils ont régné.
Nord..........	0.
Nord-eſt........	9.
Nord-oueſt.....	0.
Sud............	7.
Sud-eſt........	0.
Sud-oueſt.......	13.
Eſt............	0.
Oueſt..........	1.

8.° Paſſons à la température qui regarde le froid ou le chaud, la ſéchereſſe ou l'humidité qu'on a éprouvé. Je commence ordinairement le détail de mes obſervations, en rendant compte de l'influence de la température du mois ſur les productions de la terre ; je parle des progrès de la végétation, du temps où les feuilles, les fleurs & les fruits ſe développent ; de l'arrivée & du départ des oiſeaux de paſſage ; du dégât que peuvent faire les chenilles, les hannetons & autres inſectes. On peut auſſi faire mention du nombre des jours ſereins, couverts, &c.

9.° Je marque les jours où j'ai obſervé quelqu'aurore boréale ou quelque lumière zodiacale ; j'en fais connoître l'eſpèce autant qu'il eſt poſſible. En été, je tiens compte auſſi des tonnerres, des pluies d'orage, & de leur influence ſur le conducteur d'électricité naturelle & ſur l'aiguille aimantée.

10.° Je note les jours de pluie, de neige ou de grêle, & la quantité d'eau qu'elles ont fourni, auſſi-bien que celle qui ſe perd par l'évaporation. Ainſi, en Janvier 1775, il eſt tombé de la pluie les 1, 4, 6, 9, 12, 24, 29, 30 & 31 ; & de la neige, les 2, 3 & 26. La pluie a fourni 14 lignes $\frac{3}{4}$ d'eau, & la neige 1 ligne $\frac{3}{4}$. Total, 16 lignes $\frac{1}{2}$ d'eau. L'évaporation a été de 9 lignes.

11.° Lorsqu'il a régné quelques maladies, j'en rends compte, & je tâche d'en faire connoître les différens symptômes. Je parle aussi du nombre des naissances & des sépultures de ma paroisse; & pour être en état dans la suite de tirer quelque utilité des Tables des naissances & des sépultures, que j'ai insérées dans mon *Traité de Météorologie* *; je me propose de faire un dénombrement exact de tous mes paroissiens, distingués par sexe, par âge, & par l'état du mariage & du célibat.

* *Pages 243 & suiv.*

Tel est le détail météorologique dans lequel j'entre, & la manière dont je rédige les observations diurnes que je fais chaque mois. J'ai par ce moyen une Table semblable à la suivante, qui répétée chaque mois, me facilite beaucoup le travail que je fais à la fin de l'année pour rendre mes observations dignes de l'attention de l'Académie & de celle du Public.

JANVIER 1775.

THERMOMÈTRE.			BAROMÈTRE.		
Plus grand degré de Chaleur.	Plus grand degré de Froid.	Deg. moy. de Chaleur.	Plus grande élévation.	Moindre élévation.	Élévation moyenne.
Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*P. L.*	*P. L.*	*P. L.*
10.	— 8 ½.	2,9.	28. 2,0.	27. 5,0.	27. 10,2.

VENT dominant.	QUANTITÉ de pluie.	QUANTITÉ d'évaporat.	Déclin. moy. de l'aiguille aimantée.	TEMPÉRATURE.
	Lignes.	*Lignes.*	*Deg. Min.*	
S. O.	16 ½.	9.	19. 57,0.	Assez douce; humide.

Je fais tous les trois mois une récapitulation de toutes les observations dans la forme suivante:

Résultats des trois mois d'hiver 1775.

VENTS dominans.	Degré moyen de Chal.	Élévation moyenne du Mercure.	Nombre de Jours de pluie & de Neige.	Quantité de Pluie.	Quantité d'évapor.	Déclinaison moyenne de l'Aig. aiman.	TEMPÉRATURE.
	Degrés.	*P. L.*		*P. L.*	*P. L*	*Deg. Min.*	
S. O.	4,6.	27. 9,11.	48.	4. 7 ½.	6. 7.	19. 58,5.	Douce, humide.

Il est inutile que j'entre ici dans quelque détail sur la manière de rédiger les observations à la fin de l'année; 1.° parce qu'on y doit suivre précisément la même méthode que celle que je viens de décrire en parlant de la réduction des observations de chaque mois; la seule différence est, que pour fixer les termes moyens de chaleur, d'élévation du mercure, &c. le diviseur est toujours 12 ou le nombre des mois; 2.° parce que je me suis fort étendu sur cet article dans mon *Traité de Météorologie* *; on voudra bien le consulter & y lire aussi la description que je fais des instrumens dont je me sers.

* *Liv. V, page 557.*

Si les Physiciens qui s'occupent d'observations météorologiques, veulent se donner la peine de les analyser de la manière que je viens de décrire, ils tireront de leur travail des résultats satisfaisans; & je me chargerai avec plaisir, ainsi que je m'y suis engagé, de les comparer ensemble, & de les présenter sous un même point de vue à l'Académie & au Public.

MÉMOIRE
SUR
L'INCLINAISON MOYENNE DES ORBITES DES COMÈTES;
Sur la figure de la Terre, & sur les Fonctions.

Par M. DE LA PLACE.

I.

Un des phénomènes les plus extraordinaires que nous offre le système du monde, est le mouvement des Planètes & de leurs satellites dans le même sens & à peu-près dans le même plan; si l'on se représente en effet tous ces astres décrivant d'Occident en Orient des orbites presque circulaires & fort peu inclinées à l'écliptique, tandis que les Comètes paroissent se mouvoir indifféremment dans tous les sens & avec toutes les inclinaisons possibles dans des ellipses fort excentriques, on aperçoit une séparation bien marquée entre les Planètes & les Comètes, en sorte que dans le mouvement de ces grands corps, la Nature ne suit point cette gradation par nuances insensibles, qu'elle observe toujours lorsque sa marche n'est point interrompue par des causes particulières.

Nous comptons en tout six Planètes & dix Satellites; or, si l'on suppose qu'ils aient été lancés au hasard, il est aisé de voir que la probabilité qu'ils tourneront tous dans le même sens est $\frac{1}{2^{15}} = \frac{1}{32768}$, en sorte qu'il y a 32767 à parier contre l'unité, que cela n'arrivera pas. Si l'on multiplie la fraction $\frac{1}{32768}$, par celle qui exprime la probabilité que les orbites seront comprises dans une aussi petite zone que celle qui les renferme, on verra que la disposition actuelle de notre système planétaire seroit infiniment peu probable si elle étoit dûe au hasard, & qu'elle annonce par conséquent avec une

certitude équivalente ou même supérieure à celle d'un grand nombre d'évènemens dont il nous paroîtroit absurde de douter, l'existence d'une cause régulière qui a déterminé les planètes & leurs satellites à se mouvoir dans le même sens & presque dans le même plan; je supprime cette analyse que M. Daniel Bernoulli a donnée depuis long-temps, & qui d'ailleurs est fort simple.

Quelle est présentement la cause qui peut avoir ainsi déterminé le mouvement des Planètes & des satellites? a-t-elle été particulière à ces astres, ou bien a-t-elle influé sur le mouvement de tous ceux qui tournent autour du Soleil? la première de ces questions me semble fort difficile à résoudre; & j'avoue qu'après y avoir long-temps réfléchi, & après avoir examiné avec attention toutes les hypothèses imaginées jusqu'ici pour expliquer ce phénomène, je n'ai rien trouvé de satisfaisant. Quant à la seconde question, on peut aisément y répondre; il suffit pour cela, 1.° de calculer l'inclinaison moyenne des orbites de toutes les Comètes observées, & de voir de combien elle s'éloigne de 45 degrés; car en supposant les Comètes lancées au hasard, il y a autant à parier qu'elle sera au-dessus qu'au-dessous de 45 degrés. 2.° De connoître le rapport du nombre des Comètes directes à celui des rétrogrades, & de voir de combien il s'éloigne de l'unité; car il est aussi probable qu'il sera plus grand que moindre. Ces calculs ont été faits par M. du Séjour dans son excellent Ouvrage sur les Comètes; ce savant Auteur a trouvé que l'inclinaison moyenne des soixante-trois Comètes observées jusqu'à présent étoit de $46^d\ 16'$, ce qui s'éloigne peu de 45 degrés, & que le rapport des Comètes directes aux rétrogrades étoit $\frac{5}{4}$, ce qui s'écarte peu de l'unité. De-là, il conclud, avec raison qu'il n'existe pour les Comètes aucune cause qui les détermine à se mouvoir dans un sens plutôt que dans un autre, & à peu-près dans le même plan, & qu'ainsi celle qui détermine le mouvement des planètes est entièrement indépendante du système général de l'Univers.

Cette observation intéressante de M. du Séjour m'a fait naître

naître l'idée de soumettre à l'analyse, les probabilités que l'inclinaison moyenne des Comètes & le rapport du nombre des directes à celui des rétrogrades, seront comprises entre des limites données, en supposant qu'elles aient été projetées au hasard ; ce calcul est même nécessaire pour donner plus de certitude à cette observation ; car si, par exemple, l'inclinaison moyenne des orbites étoit $45^d + \alpha$, & qu'il y eût un très-grand nombre, comme un million à parier contre l'unité, qu'elle doit être au-dessous, on pourroit en conclure avec beaucoup de vraisemblance qu'il existe une cause qui détermine les Comètes à se mouvoir dans un plan plutôt que dans un autre; il est donc essentiel de connoître les probabilités que l'inclinaison moyenne sera au-dessus ou au-dessous de $45^d + \alpha$; le même raisonnement peut s'appliquer au rapport du nombre des Comètes directes à celui des rétrogrades. Il est facile de calculer la probabilité que ce rapport sera entre deux limites données; il suffit pour cela d'élever le binome $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$, à la puissance indiquée par le nombre des Comètes; soit n ce nombre, en développant $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^n$, le terme $\frac{n.(n-1).....(n-\mu+1)}{1.2.3.....\mu} . (\frac{1}{2})^{n-\mu} . (\frac{1}{2})^{\mu}$, exprimera la probabilité qu'il y aura $n - \mu$ Comètes directes, & μ Comètes rétrogrades ; donc, si l'on veut déterminer la probabilité que le rapport des directes aux rétrogrades sera compris entre les deux limites $\frac{n-\mu}{\mu}$ & $\frac{n-\mu'}{\mu'}$, il faut prendre la somme des termes du binome $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ élevé à la puissance n, compris entre le terme

$$\frac{n.(n-1).....(n-\mu+1)}{1.2.3.....\mu} . (\tfrac{1}{2})^{n-\mu} . (\tfrac{1}{2})^{\mu},$$

& le terme $\frac{n.(n-1).....(n-\mu'+1)}{1.2.3.....\mu'} . (\frac{1}{2})^{n-\mu'} . (\frac{1}{2})^{\mu'}$;

cette somme exprimera la probabilité demandée; mais il est bien plus difficile de déterminer la probabilité que l'inclinaison moyenne des orbites sera comprise entre deux limites données; ce Problème me paroît être un des plus compliqués de

toute l'analyse des hasards, sur-tout lorsqu'on se propose, ainsi que je l'ai fait, de trouver une formule générale pour un nombre quelconque de Comètes. J'avoue qu'il m'auroit été impossible d'y parvenir sans le secours d'une méthode que j'ai donnée ailleurs *, pour trouver directement l'expression générale des quantités assujetties à une loi qui sert à les former. J'espère que l'application de cette méthode au Problème dont il s'agit, ne sera pas inutile pour en faire connoître la nature & les avantages.

* Voy. p. 64 de ce Volume.

II.

Je suppose un nombre indéfini de corps lancés au hasard dans l'espace & circulans autour du Soleil; il s'agit de trouver la probabilité que l'inclinaison moyenne de leurs orbites sur un plan donné tel que l'Écliptique, sera comprise entre deux limites données, comme 40^d & 50^d.

Par *inclinaison moyenne*, j'entends la somme de toutes les inclinaisons, divisée par le nombre des orbites.

Pour résoudre ce Problème, je ne considère d'abord que deux corps, M & N, & je suppose que la droite AB *(fig. 1)*, représente 90 degrés ou la plus grande inclinaison moyenne des deux orbites; je commence par tracer une ligne $AZMB$, dont chaque ordonnée soit proportionnelle à la probabilité que l'inclinaison moyenne sera égale à l'abscisse correspondante AY; je nommerai cette ligne, *courbe des probabilités*; or, si l'on fait $AY = x$ & $YZ = y$, y sera proportionnel à $2x$, depuis A jusqu'au milieu P de la droite AB; car si l'inclinaison moyenne des deux orbites est x, x étant moindre que $\frac{1}{2}a$, il est visible que cela peut arriver d'autant de manières qu'il y a de points dans la droite $2x$; en effet, l'inclinaison de l'orbite de M, peut, dans ce cas, être également ou 0, ou ∂x, ou $2\partial x$, ou $3\partial x$, ou &c. jusqu'à $2x$, en représentant par ∂x, l'accroissement infiniment petit de l'inclinaison de cette orbite. On peut donc faire $YZ = 2AY$; & partant, AZM sera une ligne droite, & APM un triangle rectangle tel que $PM = 2AP = a$.

Présentement, la ligne BM doit être entièrement égale

à la droite AM, parce qu'à égale distance des points A & B, les ordonnées doivent être égales, vu qu'il est aussi probable que l'inclinaison moyenne approche de la limite A, comme de la limite B; la ligne AMB sera donc composée de deux droites égales AM & BM, telles que $PM = a$.

Si l'on veut avoir maintenant la probabilité que l'inclinaison moyenne sera comprise entre les deux limites Y & y, il faudra diviser l'aire $YZMzy$ par l'aire entière AMB, & le quotient représentera cette probabilité.

III.

Supposons qu'il y ait trois corps M, N & P; soit divisée (*fig. 2*) la droite $AB = a$, en trois parties égales, Aa, ab, bB; & cherchons la probabilité que l'inclinaison moyenne sera égale à l'abscisse quelconque AY, ou, ce qui revient au même, traçons la courbe $AmMnB$ des probabilités; soit $AY = x$, x étant supposé d'abord moindre que Aa ou $\frac{1}{3}a$; je suppose que l'un quelconque des trois corps, M par exemple, ait une inclinaison que je désigne par f; il faut conséquemment que l'inclinaison moyenne des deux autres soit $\frac{3x - f}{2}$, puisque par hypothèse, l'inclinaison moyenne des trois corps est x; or, $\frac{3x - f}{2}$, étant moindre que $\frac{a}{2}$, il est aisé de voir, par l'article précédent, que le nombre des cas dans lesquels cela peut arriver est $3x - f$; il faut multiplier présentement cette quantité par ∂f, & en prendre l'intégrale depuis $f = 0$ jusqu'à $f = 3x$, pour avoir le nombre total des cas dans lesquels l'inclinaison moyenne des trois corps peut être x, & l'on trouvera $\frac{9}{2}xx$, pour ce nombre; on peut donc, depuis A jusqu'en a, supposer l'ordonnée YZ égale à $\frac{9}{2} \cdot \frac{xx}{a}$; ce qui donne $a.y = \frac{9}{2}xx$, pour l'équation de la courbe AZM, & partant aussi pour celle de la courbe Bn, en y faisant commencer les x au point B.

Déterminons maintenant la nature de la courbe mMn; j'obſerve d'abord qu'elle doit être compoſée de deux parties entièrement égales, mM & Mn, P étant le milieu de la droite AB; ſoit $ay = z$ (*fig. 2*), ou $Ay = \frac{1}{3}a + z$, & ſoit f l'inclinaiſon de l'orbite du corps M; les deux autres corps N & P auront donc enſemble l'inclinaiſon $a + 3z - f$; or, ſoit $3z - f = u$, en ſorte que l'inclinaiſon de ces deux corps ſoit $a + u$, & partant leur inclinaiſon moyenne $\frac{a}{2} + \frac{u}{2}$; le nombre des cas dans leſquels cela peut arriver, eſt par l'*article précédent*, $a - u$, ou $a + f - 3z$; il faut donc multiplier cette quantité par ∂f, & l'intégrer depuis $f = 0$, juſqu'à $f = 3z$, pour avoir le nombre des cas qui ont lieu dans cet intervalle; on aura ainſi $3az - \frac{9}{2}zz$, pour le nombre de ces cas; il faut maintenant déterminer le nombre des cas qui ont lieu depuis $f = 3z$, juſqu'à $f = a$, & pour cela je fais $f = 3z + s$; l'inclinaiſon totale des deux corps N & P ſera donc $a - s$, & partant, leur inclinaiſon moyenne $= \frac{a}{2} - \frac{s}{2}$; or, le nombre des cas dans leſquels cela peut arriver, eſt par l'*article précédent*, $a - s$; multipliant donc cette quantité par ∂s, & l'intégrant depuis $s = 0$ juſqu'à $s = a - 3z$, on aura $\frac{1}{2}a^2 - \frac{9}{2}zz$, pour le nombre des cas qui ont lieu depuis $f = 3z$, juſqu'à $f = a$. Raſſemblant donc tous ces cas, on aura $\frac{1}{2}a^2 + 3az - 9zz$, pour le nombre de ceux qui donnent l'inclinaiſon moyenne des trois corps égale à $\frac{1}{3}a + z$. Ainſi, on peut ſuppoſer l'ordonnée yz égale à $\frac{\frac{1}{2}a^2 + 3az - 9zz}{a}$, & l'équation de la courbe mMn, ſera $a.y = \frac{1}{2}a^2 + 3az - 9zz$.

Si l'on veut préſentement avoir la probabilité que l'inclinaiſon moyenne des trois orbites ſera compriſe entre deux

limites données, on cherchera l'aire comprise entre ces limites, & on la divisera par l'aire entière de la courbe *AMB*, le quotient exprimera la probabilité demandée.

IV.

Supposons maintenant quatre corps M, N, P, Q, & divisons la droite AB (*figure 3*) en quatre parties égales Aa, aP, Pb & bB; la courbe $AmMnB$, sera composée de quatre parties Am, mM, Mn & nB, telles cependant que l'on ait Am égal à Bn, & mM égal à nM.

Déterminons la nature de ces courbes, & pour cela, soit comme ci-dessus, $AY = x$, x étant moindre que $\frac{1}{4}a$, $YZ = y$; soit de plus f l'inclinaison de l'orbite du corps M; l'inclinaison des orbites des trois autres corps N, P & Q, sera $4x - f$, & partant leur inclinaison moyenne sera $\frac{4x - f}{3}$; or, par l'*article précédent*, le nombre des cas dans lesquels cela peut arriver est $\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{4x - f}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (4x - f)^2$. Si l'on multiplie cette quantité par ∂f, & qu'on l'intègre depuis $f = 0$ jusqu'à $f = 4x$, on aura $\frac{32}{3}x^3$, pour le nombre des cas dans lesquels l'inclinaison moyenne des quatre orbites peut être x; partant, on peut suppposer que depuis A jusqu'en a, l'équation de la courbe Am, est $a^2 y = \frac{32}{3}x^3$.

Pour avoir l'équation de la courbe mM, je suppose (*fig. 3*) $ay = z$; partant $Ay = \frac{1}{4}a + z$; soit f l'inclinaison du corps M, l'inclinaison des trois autres corps sera donc $a + 4z - f$; partant leur inclinaison moyenne sera $\frac{a + 4z - f}{3}$; or, tant que $4z - f$ est une quantité positive, le nombre des cas dans lesquels cette inclinaison est possible, est (*art. précéd.*) $\frac{1}{2}a^2 + 3a\left(\frac{4z - f}{3}\right) - 9 \cdot \left(\frac{4z - f}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2$

$+ a . (4z - f) - (4z - f)^2$; si l'on multiplie cette quantité par ∂f, & qu'on l'intègre depuis $f = 0$ jusqu'à $f = 4z$, on aura $2a^2z + 8az^2 - \frac{64}{3}z^3$, pour le nombre des cas qui ont lieu dans cet intervalle.

Pour avoir le nombre de ceux qui répondent à l'intervalle compris entre $f = 4z$, & $f = a$, je fais $f - 4z = s$; $\frac{a + 4z - f}{3}$ devient donc $\frac{a - s}{3}$; soit $a - s = u$, on aura $\frac{u}{3}$ pour l'inclinaison moyenne des trois orbites; or, le nombre des cas dans lesquels cela peut arriver est, par l'*article précédent*, $\frac{1}{2}uu$, ou $\frac{1}{2}(a - s)^2$; multipliant cette quantité par ∂s, & l'intégrant depuis $s = 0$, jusqu'à $s = a - 4z$, on aura $\frac{1}{6}a^3 - \frac{32}{3}.z^3$, pour le nombre de tous les cas possibles depuis $f = 4z$, jusqu'à $f = a$; donc le nombre de tous les cas dans lesquels l'inclinaison moyenne des quatre orbites peut être $\frac{1}{4}a + z$, est $\frac{1}{6}a^3 + 2a^2z + 8az^2 - 32z^3$; on peut ainsi supposer que depuis a jusqu'en P, l'équation de la courbe mM est $a^2y = \frac{1}{6}a^3 + 2a^2z + 8az^2 - 32z^3$.

V.

S'il y avoit cinq corps M, N, P, Q & R, en partageant la droite AB en cinq parties égales, on auroit les courbes correspondantes à chacune de ces parties, au moyen des courbes relatives à quatre corps, comme nous venons de conclure celles-ci, au moyen des courbes relatives à trois corps. De-là on peut inférer généralement que les courbes relatives à n corps peuvent toujours se déduire de celles qui sont relatives à $n - 1$ corps. Pour établir d'une manière générale la relation qui existe entre ces différentes courbes, supposons la droite AB (*figure 3*) divisée en n, parties égales,

& déterminons l'équation de la courbe relative à la partie $r.^{ième}$; soit $\frac{r-1}{n}a+z$, la distance d'une de ses ordonnées au point A, z étant moindre que $\frac{a}{n}$; soit encore $\frac{{}_{r}y_{(n)\,(z)}}{a^{n-1}}$ cette ordonnée, ou, ce qui revient au même, soit ${}_{r}y_{(n)\,(z)}$, le nombre des cas dans lesquels il peut arriver que l'inclinaison moyenne des n corps, soit $\frac{r-1}{n}\cdot a+z$. Cela posé, si l'on désigne par f l'inclinaison du corps M, l'inclinaison des $n-1$, autres corps, sera $(r-1)a+nz-f$; partant, leur inclinaison moyenne sera $\frac{(r-1)a+nz-f}{n-1}$; or, il peut arriver que $nz-f$ soit positif ou négatif; je le suppose d'abord positif; le nombre des cas dans lesquels il peut arriver que l'inclinaison moyenne des $n-1$ corps soit $\frac{(r-1)a+nz-f}{n-1}$ est ${}_{r}y_{(n-1)}\left(\frac{nz-f}{n-1}\right)$. En multipliant cette quantité par ∂f, & l'intégrant depuis $f=0$ jusqu'à $f=nz$, on aura $\int\partial f.\left\{{}_{r}y_{(n-1)}.\left(\frac{nz-f}{n-1}\right)\right\}_{f=nz}^{f=0}$, pour le nombre des cas qui répondent à cet intervalle; les équations $f=0$ & $f=nz$, mises l'une au haut & l'autre au bas de la parenthèse, désignent que l'intégrale doit commencer lorsque $f=0$, & finir lorsque $f=nz$.

Si $nz-f$ est une quantité négative, soit $nz-f=-s$, on aura $\frac{(r-1)a-s}{n-1}$, pour l'inclinaison moyenne des $n-1$ corps; or, $\frac{(r-1)a-s}{n-1}=\frac{r-2}{n-1}a+\frac{a-s}{n-1}$; & le nombre des cas dans lesquels cela est possible, est ${}_{r-1}y_{(n-1)}\left(\frac{a-s}{n-1}\right)$; donc on a $\int\partial s.\left\{{}_{r-1}y_{(n-1)}\left(\frac{a-s}{n-1}\right)\right\}_{s=a-nz}^{s=0}$ pour le nombre des cas depuis $s=0$ jusqu'à $s=a-nz$, ou,

ce qui revient au même, depuis $f = nz$ jusqu'à $f = a$; partant

$$\left. \begin{aligned} {}_r y_{(n)\,(z)} = & \int \partial f \,.\, \left\{ {}_r y_{(n-1)} \left(\tfrac{nz - f}{n-1} \right) \right\}_{f = nz}^{f = 0} \\ & + \int \partial s \,.\, \left\{ {}_{r-1} y_{(n-1)} \left(\tfrac{a - s}{n-1} \right) \right\}_{s = a - nz}^{s = 0} \end{aligned} \right\} (\sigma);$$

telle est l'équation générale au moyen de laquelle, lorsqu'on connoît les courbes relatives à $n - 1$ corps, on peut déterminer celles qui sont relatives à n corps.

V I.

Il faut présentement, au moyen de l'équation (σ), trouver l'expression générale de ${}_r y_{(n)\,(z)}$; pour cela, j'observe que ${}_r y_{(n)\,(z)}$ a une valeur de cette forme,

$$\left. \begin{aligned} {}_r y_{(n)\,(z)} = {}_r A_n \,.\, z^{n-1} + {}_r B_n \,.\, z^{n-2} + {}_r C_n \,.\, z^{n-3} \ldots \\ + {}_r G_n \,.\, z + {}_r H_n \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right\} (i)$$

où ${}_r A_n$, ${}_r B_n$, &c. sont des fonctions de r & n, qu'il s'agit de déterminer; pour y parvenir, je ferai usage d'une méthode que j'ai exposée ailleurs (*voyez la page 64 de ce Volume*); l'expression précédente de ${}_r y_{(n)\,(z)}$, donne

$${}_r y_{(n-1)} \,.\, \left(\tfrac{nz - f}{n-1} \right) = {}_r A_{n-1} \left(\tfrac{nz - f}{n-1} \right)^{n-2} + {}_r B_{n-1} \left(\tfrac{nz - f}{n-1} \right)^{n-3} \ldots$$

$$\ldots\ldots + {}_r G_{n-1} \left(\tfrac{nz - f}{n-1} \right)^{0};$$

donc on aura

$$\int \partial f \,.\, \left\{ {}_r y_{(n-1)} \left(\tfrac{nz - f}{n-1} \right) \right\}_{f = nz}^{f = 0} = {}_r A_{n-1} \,.\, \left(\tfrac{n}{n-1} \right)^{n-1} \,.\, z^{n-1}$$

$$+ {}_r B_{n-1} \,.\, \frac{n-1}{n-2} \,.\, \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-2} \,.\, z^{n-2}$$

$$+ {}_r C_{n-1} \,.\, \frac{n-1}{n-3} \,.\, \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-3} \,.\, z^{n-3} + \text{\&c.} \ldots + {}_r G_{n-1} \,.\, nz;$$

on aura pareillement

$${}_{r-1} y_{(n-1)} \left(\tfrac{a - s}{n-1} \right) = {}_{r-1} A_{n-1} \,.\, \left(\tfrac{a - s}{n-1} \right)^{n-2}$$

$$+ {}_{r-1} B_{n-1} \,.\, \left(\frac{a - s}{n-1} \right)^{n-3} + \text{\&c.} \ldots + {}_{r-1} G_{n-1}.$$

Donc,

Donc,

$$\int \partial s . \left\{ {}_r y_{(n-1)} \left(\frac{a-s}{n-1}\right) \right\}_{s=a-nz}^{s=0} =$$

$${}_{r-1}A_{n-1} \left[\left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-1} - \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} . z^{n-1} \right]$$

$$+ \frac{n-1}{n-2} . {}_{r-1}B_{n-1} . \left[\left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-2} - \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-2} z^{n-2} \right]$$

$$+ \text{\&c.}$$

$$+ {}_{r-1}G_{n-1} . (a - nz).$$

L'équation (σ) donnera donc

$${}_r y_{(n)(z)} = \left\{ \begin{array}{l} z^{n-1} . \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} . [{}_r A_{n-1} - {}_{r-1}A_{n-1}] \\ + z^{n-2} . \frac{n-1}{n-2} . \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-2} . [{}_r B_{n-1} - {}_{r-1}B_{n-1}] \\ + z^{n-3} . \frac{n-1}{n-3} . \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-3} . [{}_r C_{n-1} - {}_{r-1}C_{n-1}] \\ + \text{\&c.} \\ + {}_{r-1}A_{n-1} . \left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-1} + \frac{n-1}{n-2} . {}_{r-1}B_{n-1} . \left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-2} + \text{\&c.} \end{array} \right.$$

En comparant cette équation avec l'équation (i), on aura les ſuivantes,

$$\left. \begin{array}{l} {}_r A_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} . [{}_r A_{n-1} - {}_{r-1}A_{n-1}] \\ {}_r B_n = \frac{n-1}{n-2} . \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-2} . [{}_r B_{n-1} - {}_{r-1}B_{n-1}] \\ {}_r C_n = \frac{n-1}{n-3} . \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-3} . [{}_r C_{n-1} - {}_{r-1}C_{n-1}] \\ \text{\&c.} \\ {}_r G_n = n . [{}_r G_{n-1} - {}_{r-1}G_{n-1}] \\ {}_r H_n = {}_{r-1}A_{n-1} . \left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-1} + \frac{n-1}{n-2} . \left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-2} . {}_{r-1}B_{n-1} \\ \quad + \text{\&c.} \end{array} \right\} (\Psi);$$

Ces équations ſont aux différences finies partielles, excepté la dernière qui donne ſans aucune intégration la valeur de ${}_r H_n$ lorſqu'on connoît ${}_r A_n$, ${}_r B_n$, &c.

On peut déterminer encore ${}_rH_n$ par la considération suivante ; il eſt viſible que ${}_ry_{(n)(o)} = {}_{r-1}y_{(n)\left(\frac{a}{n}\right)}$; c'eſt-à-dire que l'ordonnée de la courbe des probabilités, qui répond à l'extrémité de la $(r-1)$.ième partie de la droite AB diviſée en n parties égales, eſt la même que l'ordonnée qui répond au commencement de la r.ième partie ; donc on a

$$ {}_rH_n = {}_{r-1}A_n \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^{n-1} + {}_{r-1}B_n \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^{n-2} + \&c. + {}_{r-1}H_n ; (\mathrm{T}) $$

ou ${}_rH_n - {}_{r-1}H_n = {}_{r-1}A_n \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^{n-1} + {}_{r-1}B_n \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^{n-2} + \&c.$

Partant, en intégrant par rapport à r ſeul, on a

$$ {}_rH_n = \Sigma \cdot \left[{}_{r-1}A_n \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^{n-1} + {}_{r-1}B_n \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^{n-2} + \&c. \right] $$

le caractériſtique Σ étant le ſigne d'intégration pour les différences finies. Déterminons préſentement ${}_rA_n$, ${}_rB_n$, &c.

La 1.ere des équations (Ψ) donne ${}_1A_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \cdot {}_1A_{n-1}$; & en intégrant, par la méthode de la *page 42* de ce Volume, on aura

$$ {}_1A_n = H \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots\cdots \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} ; $$

H étant une conſtante arbitraire ; or, poſant $n = 2$, ${}_1A_2 = 2$; donc $H = 1$; on a d'ailleurs $\left(\frac{2}{1}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$ $= \frac{n^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} = \frac{n^{n-1}}{\nabla (n-1)}$, en déſignant, comme je l'ai fait ailleurs (*voyez la page 42 de ce Volume*), le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots (n-1)$, par $\nabla \cdot (n-1)$; on aura donc, ${}_1A_n = \frac{n^{n-1}}{\nabla (n-1)}$; partant

$$ {}_2A_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left[{}_2A_{n-1} - \frac{(n-1)^{n-2}}{\nabla (n-2)} \right] ; $$

ſoit ${}_2A_n = \frac{n^{n-1}}{\nabla (n-1)} \cdot u_n$; on aura $u_n = u_{n-1} - 1$;

donc $u_n = -n + H$; partant $_2A_n = -\frac{n^{n-1}}{\nabla(n-1)}.[n-H]$; or posant, $n = 2$, $_2A_n = 2$, car on a, par l'*article 11*, $_2y_{(2)(z)} = -2z + a$; donc $H = 1$ & $_2A_n = -\frac{n^{n-1}}{\Delta(n-1)}[n-1]$; partant,

$$_3A_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}.\left[_3A_{n-1} + \frac{(n-1)^{n-2}}{\nabla(n-2)}.(n-2)\right];$$

soit $_3A_n = \frac{n^{n-1}}{\nabla(n-1)}.u_n$, & l'on aura $u_n = u_{n-1} + (n-2)$; d'où l'on tire $u_n = \frac{(n-1).(n-2)}{1.2} + H$; or, posant $n = 2$, $_3A_n = 0$; donc $H = 0$ & $_3A_n = \frac{n^{n-1}}{\nabla(n-1)}.\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$.
En continuant d'opérer ainsi, on trouvera

$$_rA_n = \pm\frac{n^{n-1}}{\nabla(n-1)}.\frac{(n-1).(n-2).....(n-r+1)}{1.2.3..............(r-1)};$$

ou $_rA_n = \pm\frac{n^{n-1}}{\nabla(r-1).\nabla(n-r)}$; le signe + ayant lieu si r est impair, & le signe − s'il est pair.

J'observerai ici, relativement au produit $\frac{1}{\nabla(n-1)}$, que l'on a $\frac{1}{\nabla(n-r)} = 1$, lorsque $n - r = 0$, & lorsque $n - r = 1$; en effet $\frac{1}{\nabla(n-r)} = \frac{n.(n-1)...(n-r+1)}{1.2.3..n}$. Or, cette dernière quantité est égale à 1, lorsque $n - r = 1$, & lorsque $n - r = 0$; si r est plus grand que n, ces deux nombres étant supposés positifs & entiers, on a $\frac{1}{\nabla(n-r)} = 0$, parce qu'alors on a évidemment $n.(n-1)...(n-r+1) = 0$. Déterminons maintenant $_rB_n$.

Il est facile de voir, par les *articles précédens*, que l'on a $_1B_n = 0$, $_1C_n = 0$, &c. ensuite la seconde des équations (Ψ) donne $_2B_n = \frac{n-1}{n-2}.\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-2}.{_2B_{n-1}}$;

d'où je tire en intégrant, ${}_{1}B_n = \frac{H . n^{n-2}}{\nabla (n-2)}$; H étant une constante arbitraire; pour la déterminer, j'obſerve que l'équation différentielle en ${}_{1}B_n$, ne commence à exiſter que lorſque $n = 3$, en ſorte que pour avoir H, il faut connoître ${}_{1}B_2$; or il eſt viſible que ${}_{1}B_2$ eſt le terme tout conſtant de l'expreſſion de ${}_{2}y_{(2)(x)}$, & partant, la dernière des équations (Ψ) donne ${}_{1}B_2 = {}_{1}A_1 . a = 2 a$; donc $H = a$ & ${}_{1}B_n = \frac{n^{n-2} . a}{\nabla (n-2)}$.

De-là on aura ${}_{3}B_n = - \frac{n^{n-2} . a}{\nabla (n-2)} . [n + H]$, H étant une conſtante arbitraire; or, poſant $n = 2$, ${}_{3}B_n = 0$; donc $H = -2$ & ${}_{3}B_n = - \frac{n^{n-2}}{\nabla (n-2)} . a . [n - 2]$.

On aura, de la même manière,

$${}_{4}B_n = \frac{n^{n-2} . a}{\nabla (n-2)} . [\frac{(n-2).(n-3)}{1.2} + H];$$

or poſant $n = 2$, ${}_{4}B_n = 0$; donc $H = 0$; en continuant d'opérer ainſi, on trouvera généralement,

$${}_{r}B_n = \mp \frac{n^{n-2} . a}{\nabla (n-2)} . \frac{(n-2).(n-3)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots\ldots(r-2)};$$

ou ${}_{r}B_n = \mp \frac{n^{n-2} . a}{\nabla (r-2) . \nabla (n-r)}$.

La troiſième des équations (Ψ) donne

${}_{2}C_n = \frac{n-1}{n-3} . (\frac{n}{n-1})^{n-3} . {}_{2}C_{n-1}$; d'où je tire en intégrant, ${}_{2}C_n = \frac{n^{n-3} . H}{\nabla (n-3)}$; pour déterminer H, j'obſerve que l'équation différentielle en ${}_{2}C_n$, ne commence à exiſter que lorſque $n = 4$; il faut donc, pour avoir H, connoître ${}_{2}C_3$; or il eſt viſible que ${}_{2}C_3$ eſt le terme tout conſtant de l'expreſſion de ${}_{2}y_{(3)(x)}$; partant, la dernière des équations (Ψ) donne ${}_{2}C_3 = {}_{1}A_2 . (\frac{a}{2})^2$; donc, ${}_{2}C_3 = \frac{a^2}{2}$, & $H = \frac{a^2}{1.2}$; ainſi ${}_{2}C_n = \frac{n^{n-3} . a^2}{1.2 . \nabla (n-3)}$.

De-là on tirera ${}_3C_n = - \frac{n^{n-3}.a^2}{1.2.\nabla(n-3)}.[n + H]$.
Pour déterminer H, il faut connoître ${}_3C_3$; or, cette quantité est le terme tout constant de l'expression de ${}_3y_{(3)(z)}$; ainsi la dernière des équations (Ψ) donne

$${}_3C_3 = {}_2A_2.(\frac{a}{2})^2 + 2.{}_2B_2.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}; \text{ partant,}$$

$$H = -4, \;\&\; {}_3C_n = - \frac{n^{n-3}.a^2}{1.2.\nabla(n-3)}.[\frac{n-3}{1} - 1].$$

De-là je tire

$${}_4C_n = \frac{n^{n-3}.a^2}{1.2.\nabla(n-3)}.[\frac{(n-3).(n-4)}{1.2} - \frac{n-3}{1} + H];$$

or on a ${}_4C_3 = 0$; donc $H = 0$; en continuant d'opérer ainsi, on trouvera généralement

$${}_rC_n = \mp \frac{n^{n-3}.a^2}{1.2.\nabla(n-3)}.[\frac{(n-3).(n-4)...(n-r)}{1.2.3...(r-2)} - \frac{(n-3)...(n-r+1)}{1.2...(r-3)}];$$

ou

$${}_rC_n = \mp \frac{n^{n-3}.a^2}{1.2}.[\frac{1}{\nabla(r-2).\nabla(n-r-1)} - \frac{1}{\nabla(r-3).\nabla(n-r)}],$$

le signe supérieur ayant lieu si r est impair, & l'inférieur s'il est pair. J'ai trouvé de la même manière,

$${}_rD_n = \mp \frac{n^{n-4}.a^3}{1.2.3}.[\frac{1}{\nabla(r-2).\nabla(n-r-2)} - \frac{4}{\nabla(r-3).\nabla(n-r-1)} + \frac{1}{\nabla(r-4).\nabla(n-r)}];$$

le signe supérieur ayant toujours lieu si r est impair, & l'inférieur s'il est pair.

VII.

On aura ainsi, par la méthode précédente, la loi de chaque terme, quels que soient r & n; mais cela ne suffit pas encore, il faut de plus avoir la loi de ces termes les uns par rapport aux autres, c'est-à-dire la loi du q.ième terme de la suite ${}_rA_n.z^{n-1} + {}_rB_n.z^{n-2} +$ &c. nommons ${}_r\overset{q}{T}_n.z^{n-q}$,

ce terme; ${}_rT_n$ ſera fonction de q, de r & de n; nous pouvons déjà connoître, par ce qui précède, de quelle manière il eſt fonction de r & de n; il faut préſentement déterminer de quelle manière il eſt fonction de q; pour cela je reprends les termes déjà trouvés,

$$ {}_rA_n = \pm \frac{n^{n-1}}{\nabla(r-1).\nabla(n-r)}, $$

$$ {}_rB_n = \mp \frac{n^{n-2}.a}{\nabla(r-2).\nabla(n-r)}, $$

$$ {}_rC_n = \mp \frac{n^{n-3}.a^2}{1.2}.\left[\frac{1}{\nabla(r-2).\nabla(n-r-1)} - \frac{1}{\nabla(r-3).\nabla(n-r)}\right]; $$

$$ {}_rD_n = \mp \frac{n^{n-4}.a^3}{1.2.3}\left[\frac{1}{\nabla(r-2).\nabla(n-r-2)} - \frac{4}{\nabla(r-3).\nabla(n-r-1)} + \frac{1}{\nabla(r-4).\nabla(n-r)}\right], $$

le ſigne ſupérieur ayant lieu ſi r eſt impair, & l'inférieur s'il eſt pair. De-là je conclus que l'on a généralement

$$ {}_r\overset{q}{T}_n = \mp \frac{n^{n-q}.a^{q-1}}{\nabla(q-1)}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\nabla(r-2).\nabla.(n-r-q+2)} + \dfrac{M_q}{\nabla(r-3).\nabla(n-r-q+3)} \\ + \dfrac{{}^1M_q}{\nabla(r-4).\nabla.(n-r-q+4)} + \&c.\ldots \\ + \dfrac{{}^{q-3}M_q}{\nabla(r-q).\nabla(n-r)}; \end{array}\right. $$

expreſſion dans laquelle il faut déterminer M_q, ${}^1M_q$, &c. Pour y parvenir, j'obſerve que cette valeur de ${}_r\overset{q}{T}_n$ ne peut commencer à exiſter que lorſque $n = q$; or, on a... ${}_3\overset{q}{T}_q = - \frac{a^{q-1}.M_q}{\nabla(q-1)}$; d'ailleurs l'équation (Γ) donne

$$ {}_3\overset{q}{T}_q = {}_2A_q.\left(\frac{a}{q}\right)^{q-1} + {}_2B_q.\left(\frac{a}{q}\right)^{q-2} + \&c.\ldots + {}_2\overset{q}{T}_q $$

$$ = a^{q-1}.\left[-\frac{1}{\nabla(q-2)} + \frac{1}{\nabla(q-2)}\right. $$

$$ \left. + \frac{1}{1.2.\nabla(q-3)} + \&c.\ldots\ldots + \frac{1}{\nabla(q-1)}\right] $$

$$ = \frac{a^{q-1}}{\nabla(q-1)}.\left[1 + \frac{(q-1)}{1} + \frac{(q-1).(q-2)}{1} + \&c.\ldots + 1 - q\right] $$

$$ = \frac{a^{q-1}}{\nabla(q-1)}.\left[2^{q-1} - q\right]; $$

en comparant cette expreſſion de ${}_3\overset{q}{T}_q$ avec la précédente, on aura $-M_q = 2^{q-1} - q$.

Pour trouver ${}'M_q$, j'obſerve que l'on a ${}_4\overset{q}{T}_q = \frac{{}'M_q . a^{q-1}}{\nabla(q-1)}$. D'ailleurs,

$${}_4\overset{q}{T}_q = {}_3A_q . (\tfrac{a}{q})^{q-1} + {}_3B_q . (\tfrac{a}{q})^{q-2} \ldots + {}_3T_q;$$

ce qui donne

$${}_4\overset{q}{T}_q = a^{q-1} \left\{ \begin{array}{ll} + \frac{1}{1.2.\nabla(q-3)} & \\ - \frac{1}{\nabla(q-3)} & \\ - \frac{1}{1.2.\nabla(q-4)} & + \frac{2^2-3}{1.2.\nabla(q-3)} \\ - \frac{1}{1.2.3.\nabla(q-5)} & + \frac{2^3-4}{1.2.3.\nabla(q-4)} \\ - \&c. & \\ - \frac{1}{\nabla(q-2)} & + \frac{2^{q-2}-(q-1)}{\nabla(q-2)} \\ + \frac{2^{q-1}-q}{\nabla(q-1)}. & \end{array} \right.$$

En ſommant cette quantité, on aura

$${}_4\overset{q}{T}_q = \frac{a^{q-1}}{\nabla(q-1)} . [3^{q-1} - 2^{q-1} . q + \frac{q.(q-1)}{1.2}], \&c.$$

En comparant cette valeur de ${}_4\overset{q}{T}_q$, avec la précédente, on trouvera

$${}'M_q = 3^{q-1} - 2^{q-1} . q + \frac{q.(q-1)}{1.2}.$$

J'ai trouvé de la même manière,

$$-{}''M_q = 4^{q-1} - 3^{q-1} . q + 2^{q-1} . \frac{q.(q-1)}{1.2} - \frac{q.(q-1).(q-2)}{1.2.3}.$$

Il eſt inutile de chercher de nouveaux termes, parce que leur loi eſt viſible, en ſorte que l'on a généralement

$$ {}^sM_q = \pm \left\{ \begin{array}{l} (s+2)^{q-1} - (s+1)^{q-1}.q + s^{q-1}.\frac{q.(q-1)}{1.2} \\ \qquad - (s-1)^{q-1}.\frac{q.(q-1).(q-2)}{1.2.3}, + \&c. \end{array} \right. $$

s ne pouvant excéder $q - 3$, & le ſigne ſupérieur ayant lieu ſi s eſt impair, & l'inférieur s'il eſt zéro ou pair; on aura donc

$$ {}_r^{q}T_n = \mp \frac{n^{n-q}.a^{q-1}}{\nabla(q-1)} . \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\nabla(r-2).\nabla(n-r-q+2)} \\ - \frac{[2^{q-1}-q]}{\nabla(r-3)\nabla(n-r-q+3)} \\ + \frac{[3^{q-1}-2^{q-1}.q+\frac{q.(q-1)}{1.2}]}{\nabla(r-4).\nabla(n-r-q+4)} - \&c... \\ \mp \frac{[(q-1)^{q-1}-(q-2)^{q-1}.q+\&c.]}{\nabla(r-q).\nabla(n-r)} \end{array} \right. ; $$

partant,

$$ {}_r y_{(n)(z)} = \pm \frac{(nz)^{n-1}}{\nabla(r-1).\nabla(n-r)} \mp \frac{a(nz)^{n-2}}{\nabla(r-2).\nabla(n-r)} $$

$$ \mp \frac{a^2(nz)^{n-3}}{1.2} . \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\nabla(r-2).\nabla(n-r-1)} \\ - \frac{1}{\nabla(r-3).\nabla(n-r)} \end{array} \right. $$

. . . .

$$ \mp \frac{a^{q-1}.(nz)^{n-q}}{\nabla(q-1)} . \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\nabla(r-2).\nabla(n-r-q+2)} \\ - \frac{[2^{q-1}-q]}{\nabla(r-3).\nabla(n-r-q+3)} \\ + \frac{[3^{q-1}-2^{q-1}.q+\frac{q.(q-1)}{1.2}]}{\nabla(r-4).\nabla.(n-r-q+4)} - \&c... \\ \mp \frac{[(q-1)^{q-1}-(q-2)^{q-1}.q+\&c.]}{\nabla(r-q).\nabla(n-r)} \end{array} \right. $$

$$ \mp \&c. $$

$$ + \frac{a^{n-1}}{\nabla(n-1)} . [(r-1)^{n-1} - \frac{n}{1}.(r-2)^{n-1} $$

$$ + \frac{n.(n-1)}{1.2}.(r-3)^{n-1} - \&c.] ; $$

le ſigne

le ſigne ſupérieur ayant lieu ſi r eſt impair, & l'inférieur s'il eſt pair, excepté pour le terme

$$\mp \frac{[(q-1)^{q-1} - (q-2)^{q-1} q + \&c.]}{\nabla(r-q) \cdot \nabla(n-r)}$$

pour lequel le ſigne ſupérieur a lieu lorſque q eſt impair, & l'inférieur lorſqu'il eſt pair.

VIII.

Si l'on fait, comme précédemment, $AB = a = 90^d$ (*figure 4*), & qu'on diviſe cette droite en n parties égales, on aura, pour l'équation de la courbe correſpondante à la r.^{ième} partie, $a^{n-2} . y = {}_r y_{(n)(v)}$. Si l'on veut enſuite déterminer la probabilité que l'inclinaiſon moyenne des n orbites eſt compriſe entre deux points quelconques P & Q, on déterminera l'aire $STPQ$, & le quotient de cette ſurface diviſée par l'aire entière $Amm'MSTB$ exprimera la probabilité demandée. On voit ainſi que la ſuperficie entière de la courbe eſt un élément eſſentiel à connoître; pour y parvenir, j'obſerve que l'aire compriſe entre les deux abſciſſes $\frac{r-1}{n} . a$ & $\frac{r}{n} a$ eſt $\frac{1}{a^{n-2}} . [\frac{{}_r A_n}{n} . (\frac{a}{n})^n + \frac{{}_r B_n}{n-1} . (\frac{a}{n})^{n-1} + \&c.]$; je déſigne par ${}_r K_n$ cette ſurface; or la dernière des équations (Υ) de l'*article VI*, donne

$${}_{r+1} H_{n+1} = n . [\frac{{}_r A_n}{n} . (\frac{a}{n})^n + \frac{{}_r B_n}{n-1} . (\frac{a}{n})^{n-1} + \&c.];$$

donc on aura ${}_r K_n = \frac{{}_{r+1} H_{n+1}}{n . a^{n-2}}$; partant,

$${}_r K_n = \frac{a^2}{n . \nabla(n)} . [r^n - \frac{n+1}{1} . (r-1)^n + \&c].$$

Préſentement, la ſuperficie entière de la courbe eſt égale à ${}_n K_n + {}_{n-1} K_n + \&c.$ nommant donc S cette ſuperficie, on aura

$$S = \frac{a^2}{n.\nabla(n)} . \begin{cases} n^n - \frac{n+1}{1} . (n-1)^n + \frac{(n+1).n}{1.2} . (n-2)^n - \&c. \\ + (n-1)^n - \frac{n+1}{1} . (n-2)^n + \&c. \\ + (n-2)^n - \&c. \\ + \&c. \end{cases}$$

$$= \frac{a^n}{n.\nabla(n)} . \begin{cases} n^n - n.(n-1)^n \\ + \frac{n.(n-1)}{1.2} . (n-2)^n - \&c. \end{cases}$$

Or, en désignant par la caractéristique Δ, la différence finie d'une quantité, on a, comme l'on sait, $n^n - n.(n-1)^n + \&c. = \Delta^n. o^n$; d'ailleurs, on a généralement $\Delta.x^n = \nabla.(n)$; partant $S = \frac{a^2}{n}$

REMARQUE.

L'aire comprise entre les deux abscisses $\frac{r-1}{n}.a$, & $\frac{r}{n}.a$, doit être égale à l'aire comprise entre les deux abscisses $\frac{n-r+1}{n}.a$, & $\frac{n-r}{n}a$; c'est-à-dire, que l'on doit avoir ${}_rK_n = {}_{n-r+1}K_n$, parce que ces deux surfaces sont également situées par rapport aux extrémités A & B; on doit donc avoir

$$r^n - \frac{(n+1)}{1}.(r-1)^n + \frac{(n+1).n}{1.2}.(r-2)^n - \&c.$$
$$= (n-r+1)^n - \frac{(n+1).}{1}(n-r)^n + \&c. \quad (\mu)$$

en continuant l'un & l'autre membre de cette équation, jusqu'à ce qu'on arrive à un terme qui soit nul; on peut s'assurer d'ailleurs de la vérité de cette équation, en observant que l'on a $r^n - (n+1).(r-1)^n + \&c. \mp (n+1).(r-n)^n \pm (r-n-1)^n = \Delta^{n+1}.(r-n-1)^n$, le signe $+$ ayant lieu si n est impair, & le signe $-$ s'il

est pair; or $\Delta^{n+1}.r^x = 0$, d'où il est facile de conclure l'équation (μ).

IX.

Pour appliquer la théorie précédente à la Nature, il faudroit supposer $n = 63$, parce qu'il existe présentement soixante-trois Comètes dont on a calculé les orbites; mais ce calcul seroit pénible à cause de sa longueur; ainsi l'abandonnant à ceux qui desireront de l'entreprendre, je me contenterai de supposer ici $n = 12$; j'imagine donc la droite AB, partagée en douze parties égales, dont chacune soit conséquemment de $7^d \frac{1}{2}$; on trouvera par l'article précédent, que la probabilité que l'inclinaison moyenne des douze orbites sera comprise entre $45^d - 7^d\frac{1}{2}$ & 45^d, ou entre $45^d + 7^d\frac{1}{2}$ & 45^d, est égale à

$$\frac{6^{12}}{\nabla(12)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 - 13 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{12} + \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{12} \\ - \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^{12} + \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{12} \\ - \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{12}. \end{array} \right.$$

Or, en faisant le calcul, je trouve cette quantité égale à 0,339; d'où il suit, 1.° qu'il y a 839 à parier contre 161, que l'inclinaison moyenne de douze orbites sera au-dessus de $37^d \frac{1}{2}$; 2.° qu'il y a autant à parier qu'elle sera au-dessous de $52^d \frac{1}{2}$; 3.° qu'il y a 678 à parier contre 322, qu'elle sera entre les deux limites $37^d \frac{1}{2}$, & $52^d \frac{1}{2}$.

Maintenant, si l'on ajoute ensemble les inclinaisons des douze dernières Comètes observées dont voici le Tableau:

Comètes des Années	*Inclinaison des Orbites.*		
1774	82^d	48′	0″
1773	61.	25.	21.
1772	18.	59.	40.
1771	11.	15.	29.
1771	31.	25.	55.
1770	1.	44.	30.
1769	40.	42.	30.
1766	8.	20.	0.
1766	40.	50.	20.
1764	53.	54.	19.
1763	73.	39.	29.
1762	85.	3.	2.

on trouvera que leur inclinaison moyenne est de 42^d 31′. Pour soupçonner dans ces Comètes une cause qui tende à les faire mouvoir dans le plan de l'écliptique, il faudroit qu'il y eût un très-grand nombre à parier contre l'unité, que si elles étoient lancées au hasard, leur inclinaison moyenne surpasseroit 42^d 30′; or, nous venons de trouver qu'il y a 839 contre 161, ce qui ne fait pas six contre un, à parier qu'elle sera au-dessus de 37^d $\frac{1}{2}$, & il y a considérablement moins à parier qu'elle sera au-dessus de 42^d 30′.

X.

Sur la figure de la Terre.

Lorsque Newton voulut déterminer la figure de la Terre, il considéra cette Planète comme une masse fluide homogène, & il supposa que la figure qu'elle a prise en vertu de son mouvement de rotation est celle d'un sphéroïde elliptique. Cette supposition étoit fort précaire; les Géomètres en ont ensuite démontré la possibilité; mais si la figure nécessaire pour l'équilibre, au lieu d'être elliptique, eût été d'un autre genre, on auroit été fort embarrassé pour la déterminer, parce qu'il est beaucoup plus facile de s'assurer si une figure donnée convient à l'équilibre, que de chercher immédiatement

celles qui peuvent y convenir. Ce dernier Problème eſt ſans contredit un des points les plus intéreſſans du Syſtème du Monde ; voici quelques recherches qui y ſont relatives.

PROBLÈME.

Si une maſſe fluide homogène dont toutes les parties s'attirent en raiſon réciproque du quarré des diſtances, tourne autour d'un de ſes axes quelconques, on propoſe de déterminer la figure qu'elle doit prendre.

Je ſuppoſerai ici deux choſes, 1.° que cette figure diffère infiniment peu de la ſphère, 2.° qu'elle eſt une ſurface de révolution. Cela poſé.

Soit AMB, la courbe qui par ſa révolution autour de Fig. 5.
l'axe AB, engendre la ſurface propoſée, & ATB un cercle décrit ſur AB, comme diamètre ; ſoit R un point quelconque du corps dont V ſoit la projection ſur le plan AMB, & que l'on mène par le point M, & dans le plan AMB, la tangente MN à la courbe AMB, la droite MQ, parallèle à AB, & la droite MP perpendiculaire ſur AB ; que l'on mène enſuite AQ & LV, parallèles à PM, & que l'on élève perpendiculairement au plan AMB, la droite MZ, qui ſera viſiblement tangente à la ſurface de révolution ; ſoit q l'angle VMN, ϖ l'angle NMQ, φ l'arc AT, $CB = CA = 1$; ſoit encore $RM = r$ & p l'angle RMZ, on trouvera facilement que la molécule R eſt égale à $r^2 . \text{ſin.} p . \partial p . \partial q . \partial r$; ainſi l'action de cette molécule ſur le point M eſt . . . $\text{ſin.} p . \partial p . \partial q . \partial r$; en la décompoſant en trois, la première parallèlement à MN & de M vers N ; la ſeconde, perpendiculairement à cette droite ; & la troiſième, parallèlement à MZ ; on aura, pour la première, $\text{ſin.} p^2 . \text{coſ.} q . \partial p . \partial q . \partial r$; d'où en intégrant ſucceſſivement, par rapport aux trois variables p, q & r, on aura l'action entière de la maſſe ſur le point M, parallèlement à MN, & de M vers N ; mais

en intégrant par rapport à r, on a $r\,\text{fin.}\,p^2.\text{cof.}\,q.\partial p.\partial q$; r étant la droite MR, prolongée jusqu'à ce qu'elle sorte du corps; donc $\int\int r\partial p\,\partial q.\text{fin.}\,p^2\,\text{cof.}\,q$, exprimera l'action de la masse suivant MN, en prenant les deux intégrales depuis $p = 0$ jusqu'à $p = 180^d$, & depuis $q = 0$ jusqu'à $q = 180^d$. Maintenant, si l'on nomme αh la force centrifuge d'un point placé à l'Équateur, α étant supposé infiniment petit, on aura, en négligeant les quantités de l'ordre α^2, $\alpha h.\text{fin.}\,\varphi$, pour cette force au point M, ce qui produira suivant la tangente MN, la force $\alpha h.\text{fin.}\,\varphi.\text{cof.}\,\varphi$, & comme elle agit de M vers S, elle doit, pour l'équilibre, balancer l'attraction du corps de M vers N; d'où résulte l'équation

$$\int\int r.\text{fin.}\,p^2.\text{cof.}\,q.\partial p.\partial q = \alpha h.\text{fin.}\,\varphi.\text{cof.}\,\varphi.$$

Il ne s'agit donc plus que de déterminer r; pour cela j'observe que TM doit rester le même, en changeant seulement de signe, lorsque φ devient négatif; soit donc $TM = \alpha.\text{fin.}\,\varphi.\Gamma.(\text{cof.}\,\varphi)$; $\Gamma.(\text{cof.}\,\varphi)$ exprimant une fonction quelconque de cof. φ qu'il s'agit de connoître; on aura $PM = \text{fin.}\,\varphi.[1 + \alpha.\Gamma.(\text{cof.}\,\varphi)]$, & cette équation peut généralement représenter toutes les courbes rentrantes composées de deux parties égales, & semblablement situées de part & d'autre de l'axe AB; on a $MV = r\,\text{fin.}\,p$; $RV = r\,\text{cof.}\,p$; $VL = PM - r.\text{fin.}\,p.\text{fin.}\,(q + \varpi)$;

$$CL = \text{cof.}\,\varphi + r\,\text{fin.}\,p.\text{cof.}\,(q + \varpi);$$

partant

$$(RV)^2 + (VL)^2 = r^2.\text{cof.}\,p^2 + \text{fin.}\,\varphi^2$$
$$+ 2\alpha.\text{fin.}\,\varphi^2.\Gamma.(\text{cof.}\,\varphi) - 2r.\text{fin.}\,\varphi.\text{fin.}\,p.\text{fin.}\,(q + \varpi)$$
$$- 2\alpha r.\text{fin.}\,\varphi.\text{fin.}\,p.\text{fin.}\,(q + \varpi).\Gamma.(\text{cof.}\,\varphi) + r^2.\text{fin.}\,p^2\,\text{fin.}\,(q + \varpi)^2;$$

mais le point R étant supposé à la surface du corps, on a, par la nature de la courbe génératrice,

$$(RV)^2 + (VL)^2 = [1 - (CL)^2].[1 + 2\alpha\Gamma.(CL)];$$

soit $\sin.\varphi^2.\Gamma(\cos.\varphi) = \Pi.(\cos.\varphi)$; on aura
$[1-(CL)^2].[1+2\alpha\Gamma.(CL)] = 1-(CL)^2+2\alpha\Pi.(CL)$;
donc, en comparant les deux expressions de $(RV)^2+(VL)^2$ & substituant au lieu de CL sa valeur, on aura l'équation

$$r^2 - 2r.\sin.\varphi.\sin.p.\sin.(q+\varpi) + 2r.\cos.\varphi.\sin.p.\cos.(q+\varpi)$$
$$= 2\alpha\Pi.[\cos.\varphi + r.\sin.p.\sin.(q+\varpi)] - 2\alpha\Pi.(\cos.\varphi)$$
$$+ \frac{2\alpha r}{\sin.\varphi}.\Pi.(\cos.\varphi)\sin.p.\sin.(q+\varpi);$$

d'où l'on tire

$$r = 2.\sin.\varphi.\sin.p.\sin.(q+\varpi) - 2\cos.\varphi.\sin.p.\cos.(q+\varpi)$$
$$+ \frac{2\alpha}{r}.\Pi.[\cos.\varphi + r.\sin.p.\cos.(q+\varpi)]$$
$$- \frac{2\alpha}{r}.\Pi.(\cos.\varphi) + \frac{2\alpha}{\sin.\varphi}.\Pi.(\cos.\varphi).\sin.p.\sin.(q+\varpi).$$

Or soit $TM = \alpha\mu$, on aura $\mu.\sin.\varphi = \Pi.(\cos.\varphi)$; ensuite

$$\sin.\varpi = \frac{\partial\varphi.\cos.\varphi + \alpha\partial\mu}{\sqrt{(\partial\varphi^2 + 2\alpha\partial\mu\partial\varphi.\cos.\varphi)}} = \cos.\varphi + \alpha\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}.\sin.\varphi^2,$$

$$\& \cos.\varpi = \frac{\partial\varphi.\sin.\varphi}{\sqrt{(\partial\varphi^2 + 2\alpha\partial\mu\partial\varphi.\cos.\varphi)}} = \sin.\varphi - \alpha\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}.\sin.\varphi.\cos.\varphi;$$

de-là on tirera

$$r = 2.\sin.p.\sin.q + 2\alpha\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}.\sin.\varphi.\sin.p.\cos.q$$
$$+ 2\alpha\mu.\sin.\varphi.\sin.p.\sin.q + 2\alpha\mu.\cos.\varphi.\sin.p.\cos.q$$
$$+ \frac{\alpha.\Pi.[\cos.\varphi + 2\sin.p^2\sin.q.(\cos.q.\sin.\varphi - \sin.q.\cos.\varphi)] - \alpha\Pi.(\cos.\varphi)}{\sin.p.\sin.q};$$

partant on aura

$$\iint.\sin.p^2\cos.q.\partial p.\partial q.$$
$$\times\left\{\begin{array}{l} 2.\sin.p.\sin.q + 2\alpha\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}.\sin.\varphi.\sin.p\cos.q \\ + 2\alpha\mu.\sin.\varphi.\sin.p.\sin.q + 2\alpha\mu.\cos.\varphi.\sin.p.\cos.q \\ + \frac{\alpha.\Pi.[\cos.\varphi + 2\sin.p^2.\sin.q.(\cos.q.\sin.\varphi - \sin.q.\cos.\varphi)] - \alpha\Pi.(\cos.\varphi)}{\sin.p.\sin.q} \end{array}\right\}$$
$$= \alpha h.\sin.\varphi.\cos.\varphi;$$

mais on a généralement $\int\int P\partial p\,\partial q\,.\,\text{cof.}\,q = 0$, en fuppofant que cof. q ne fe trouve point dans P, élevé à une puiffance impaire, & prenant les intégrales depuis $q = 0$ jufqu'à $q = 180^d$, & depuis $p = 0$ jufqu'à $p = 180^d$; car dans cette fuppofition il eft vifible que l'élément $P\partial q$ fera le même pour deux valeurs de q prifes à égales diftances de part & d'autre de 90 degrés; mais cof. q fera le même dans les deux cas, avec des fignes contraires; d'où l'on voit que la fomme des deux élémens $P\partial q\,.\,\text{cof.}\,q$ correfpondans, l'un à $q = 90^d - \alpha$, l'autre à $q = 90^d + \alpha$, fera nulle, & qu'ainfi $\int\int P\partial p\,\partial q\,.\,\text{cof.}\,q = 0$; l'équation précédente deviendra donc

$$+\int\int 2\,.\,\text{fin.}\,p^3\,.\,\text{cof.}\,q^2\,.\,\partial p\,\partial q\,.\left[\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\,.\,\text{fin.}\,\varphi + \mu\,.\,\text{cof.}\,\varphi\right]$$

$$+\int\int.\frac{\text{fin.}\,p\,.\,\text{cof.}\,q\,.\,\partial p\,.\,\partial q}{\text{fin.}\,q}\,.\left\{\begin{array}{l}\Pi\,.\left[\text{cof.}\,\varphi + 2\,.\,\text{fin.}\,p^2\,\text{fin.}\,q\,(\text{cof.}\,q\,.\,\text{fin.}\,\varphi - \text{fin.}\,q\,.\,\text{cof.}\,\varphi)\right]\\ -\,\Pi\,.\,(\text{cof.}\,\varphi)\end{array}\right\} = h\,.\,\text{fin.}\,\varphi\,\text{cof.}\,\varphi;$$

mais on a

$$\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\,.\,\text{fin.}\,\varphi + \mu\,.\,\text{cof.}\,\varphi = \frac{\partial.(\mu\,.\,\text{fin.}\,\varphi)}{\partial\varphi} = \frac{\partial.\Pi\,.\,(\text{cof.}\,\varphi)}{\partial\varphi};$$

foit donc cof. $\varphi = x$, & $\Pi\,.\,(\text{cof.}\,\varphi) = y$; partant

$$\frac{\partial.\Pi\,.\,(\text{cof.}\,\varphi)}{\partial\varphi} = -\frac{\partial y}{\partial x}\,.\,\text{fin.}\,\varphi;\ \&$$

$$\Pi\,.\left[\text{cof.}\,\varphi + 2\,.\,\text{fin.}\,p^2\,.\,\text{fin.}\,q\,.\,(\text{cof.}\,q\,.\,\text{fin.}\,\varphi - \text{fin.}\,q\,.\,\text{cof.}\,\varphi)\right]$$

$$= y + 2\,.\,\text{fin.}\,p^2\,.\,\text{fin.}\,q\,.\,(\text{cof.}\,q\,.\,\text{fin.}\,\varphi - \text{fin.}\,q\,.\,\text{cof.}\,\varphi)\,.\,\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$+ 4\,\text{fin.}\,p^4\,.\,\text{fin.}\,q^2\,.\,(\text{cof.}\,q\,.\,\text{fin.}\,\varphi - \text{fin.}\,q\,.\,\text{cof.}\,\varphi)^2\,.\,\frac{\partial\partial y}{1\,.\,2\,.\,\partial x^2} + \&c.$$

de plus, fi l'on nomme π le rapport de la demi-circonférence au rayon, on aura

$$\int\int 2\,\partial p\,.\,\partial q\,.\,\text{fin.}\,p^3\,.\,\text{cof.}\,q^2 = \frac{4}{3}\,\pi;$$

donc,

donc,

$$-\frac{4}{3}\pi.\frac{\partial y}{\partial x}+\iint\frac{\partial p.\partial q}{\text{fin.}\,\varphi}.\left\{\begin{array}{l}2.\,\text{fin.}\,p^3.\,\text{cof.}\,q.(\text{cof.}\,q.\text{fin.}\,\varphi-\text{fin.}\,q.\text{cof.}\,\varphi).\frac{\partial y}{\partial x}\\+4.\text{fin.}\,p^5.\text{fin.}\,q.\text{cof.}\,q.(\text{cof.}\,q.\text{fin.}\,\varphi-\text{fin.}\,q.\text{cof.}\,\varphi)^2\frac{\partial\partial y}{1.2.\partial x^2}\\+8.\text{fin.}\,p^7.\text{fin.}\,q^2.\text{cof.}\,q.(\text{cof.}\,q.\text{fin.}\,\varphi-\text{fin.}\,q.\text{cof.}\,\varphi)^3.\frac{\partial^3 y}{1.2.3.\partial x^3}\\+\&c.\end{array}\right\}=hx\quad(\Lambda).$$

Or, il eſt aiſé de voir, par ce qui précède, que l'on ne doit admettre dans le développement des puiſſances de $(\text{cof.}\,q.\text{fin.}\,\varphi - \text{fin.}\,q.\text{cof.}\,\varphi)$, que les termes dans leſquels $\text{cof.}\,q$ ſe trouve élevé à une puiſſance impaire, d'où l'on tire

$$hx = -\frac{4}{3}\pi.\frac{\partial y}{\partial x}+\iint\partial p.\partial q.\text{fin.}\,p^3.\text{cof.}\,q.$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}2\,\frac{\partial y}{\partial x}.\text{cof.}\,q\\+4.\frac{\partial\partial y}{1.2.\partial x^2}.\text{fin.}\,p^2.\text{fin.}\,q.(-2x.\text{fin.}\,q.\text{cof.}\,q)\\+8.\frac{\partial^3 y}{1.2.3.\partial x^3}\,\text{fin.}\,p^4.\text{fin.}\,q^2.[(1-xx)\,\text{cof.}\,q^3+3x^2.\text{cof.}\,q.\text{fin.}\,q^2];\\+\&c.\end{array}\right.$$

mais on a

$$\int\partial p.\text{fin.}\,p^{2i+1}=\frac{2.(2.4.6\ldots2i)}{1.3.5\ldots(2i+1)};\ \int\partial q.\text{cof.}\,q^{2i}=\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2i.1.2.3\ldots i}\pi;$$

$$\int\partial q.\text{fin.}\,q^{2n+2i}.\text{cof.}\,q^{2n-2i}=\frac{1.2.3.5\ldots(2n+2i-1)}{(2n-2i+1).(2n-2i+3)\ldots(4n-1)}.\int\partial q.\text{cof.}\,q^{4n};$$

$$\int\partial q.\text{fin.}\,q^{2n+2i-2}.\text{cof.}\,q^{2n-2i}=\frac{1.3.5\ldots(2n+2i-3)}{(2n-2i+1).(2n-2i+3)\ldots(4n-3)}.\int\partial q.\text{cof.}\,q^{4n-2};$$

on aura donc

$$0=\frac{h}{\pi}+2^2.\frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2}.\frac{4}{15}-2^3.\frac{\partial^3 y}{1.2.3.\partial x^3}.\frac{2}{35.x}.(1+2xx)+\&c.$$

$$+\frac{2^{2n+1}.\partial^{2n}y}{1.2.3\ldots2n.\partial x^{2n}}.\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{(2n+1).(2n+3)\ldots(4n+1)}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}2n(1-xx)^{n-1}+\frac{2n.(2n-1).(2n-2)}{1.2.3}.\frac{2n+1}{2n-1}.x^2(1-xx)^{n-2}\\+\frac{2n.(2n-1).(2n-2).(2n-3).(2n-4)}{1.2.3.4.5}.\frac{2n+1}{2n-1}.\frac{2n+3}{2n-3}.x^4(1-xx)^{n-3}+\&c.\end{array}\right.$$

$$- \frac{2^{2n+2} . \partial^{2n+1} y}{1.2.3 \ldots 2n . \partial x^{2n+1}} \cdot \frac{1.3.5 \ldots \ldots (2n-1)}{(2n+3).(2n+5) \ldots (4n+3).x}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} (1 - xx)^n + \frac{(2n+1).2n}{1.2} . x^2 (1 - xx)^{n-1}; \quad (Z) \\ + \frac{(2n+1).2n.(2n-1).(2n-2)}{1.2.3.4} \cdot \frac{2n+3}{2n-1} . x^4 (1 - xx)^{n-2} + \&c. \end{array} \right.$$

$+$ &c.

Voilà l'équation infinie qu'il faut résoudre pour avoir la valeur de y; il est évident que l'équation $\partial^3 y = 0$, en est une intégrale particulière, ce qui donne une ellipse pour la courbe du méridien; on aura dans ce cas, $y = cx^2 + bx + a$; or, il est visible, à l'inspection de la *figure 5*, que $y = 0$ lorsque $x = 1$, & lorsque $x = -1$, ce qui donne, $0 = c + b + a$, & $0 = c - b + a$; d'où l'on tire $b = 0$ & $a = -c$; partant $y = -c(1 - xx)$; or, l'équation (Z) donne, en y substituant au lieu de y cette valeur, $c = -\frac{15}{16} \cdot \frac{h}{\pi}$; partant

$$y = \frac{15}{16} \cdot \frac{h}{\pi} .(1 - xx) = \frac{15}{16} \cdot \frac{h}{\pi} . \text{sin.} \varphi^2 = \mu . \text{sin.} \varphi.$$

Donc, $\mu = \frac{15}{16} \cdot \frac{h}{\pi} . \text{sin.} \varphi$; d'où l'on tire . . . .

$PM = \text{sin.} \varphi \left(1 + \frac{15}{16} \cdot \frac{\alpha h}{\pi}\right)$; je suppose que la force centrifuge à l'équateur soit à la pesanteur, comme $\alpha m : 1$; on pourra, en regardant la masse comme sphérique, supposer la pesanteur égale à la masse divisée par le quarré du rayon CB, ce qui donne $\frac{4}{3} \pi$ pour l'expression de cette force; partant

$\alpha h = \alpha m . \frac{4}{3} \pi$; & $PM = \text{sin.} \varphi . (1 + \frac{5}{4} \alpha m)$; d'où il suit que le rayon de l'équateur, est $1 + \frac{5}{4} \alpha m$,

& par conséquent l'aplatissement de la masse est égal à $\frac{5}{4} \alpha m$; ce que l'on sait d'ailleurs.

Je suppose maintenant $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2c + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; on aura,

$$0 = \frac{h}{\pi} + \frac{16}{15} c + \frac{4}{15} \cdot 2^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{1.2.\partial x^2} + \&c.$$

& déterminant c de manière que $0 = \frac{h}{\pi} + \frac{16}{15} \cdot c$; on aura l'équation

$$0 = 2^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{1.2.\partial x^2} \cdot \frac{4}{15} - 2^3 \cdot \frac{\partial^3 z}{1.2.3.\partial x^3} \cdot \frac{2}{35.x} \cdot (1 + 2xx) + \&c.$$

Je suppose que l'intégrale de cette équation soit $z = \varphi(x)$, on aura $y = \varphi(x) + cx^2 + bx + a$; la supposition de $h = 0$, donne $y = z = \varphi(x)$; on voit donc que le mouvement de rotation du corps ne fait qu'ajouter à la valeur de y la quantité, $cx^2 + bx + a$; ainsi toutes les figures de révolution dans lesquelles l'équilibre a lieu lorsque la masse est immobile, ont également lieu lorsqu'elle tourne autour de son axe de révolution, pourvu qu'on ajoute à l'expression de y, $cx^2 + bx + a$. Mais lorsque $h = 0$, existe-t-il d'autre cas d'équilibre que la figure sphérique? il paroît difficile de prononcer sur cet objet; voici cependant une remarque fort générale qui exclut un grand nombre de figures.

Je suppose que dans le cas de $h = 0$ on ait,

$$y = H + ax^r + bx^s \ldots\ldots + qx^\mu. r, s, \mu, \&c.$$

étant des nombres quelconques, & x^μ étant la puissance de μ la plus haute; si l'on substitue cette valeur dans l'équation (Z), le terme qx^μ en donnera une de cette forme,

$$qx^{\mu-2} \cdot \left[\frac{\mu.(\mu-1)}{1.2} \cdot 2^2 \cdot \frac{4}{15} - 2^3 \cdot \frac{\mu.(\mu-1).(\mu-2)}{1.2.3} \cdot \frac{4}{35} + \&c.\right]$$

& comme il sera le plus élevé par rapport à x, il faut que

l'on ait

$$o = 2^2 \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{\mu.(\mu-1)}{1.2} - 2^3 \cdot \frac{\mu.(\mu-1).(\mu-2)}{1.2.3} \cdot \frac{4}{35} + \&c. \;(t).$$

Voyons donc quelles ſont les valeurs de μ qui peuvent ſatisfaire à cette équation ; en la conſidérant ſous cette forme, il ſeroit fort difficile de déterminer ces valeurs, mais on peut la mettre ſous une forme beaucoup plus ſimple de la manière ſuivante.

Je reprends pour cela l'équation (A), & j'obſerve qu'elle ſe réduit à celle-ci, en faiſant, $h = o$

$$o = \iint \frac{\partial p \partial q}{\text{ſin.}\varphi} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2^2 . \text{ſin.} p^5 . \text{ſin.} q . \text{coſ.} q . (\text{coſ.} q . \text{ſin.} \varphi - \text{ſin.} q . \text{coſ.} \varphi)^2 . \frac{\partial \partial y}{1.2.\partial x^2} \\ + 2^3 . \text{ſin.} p^7 . \text{ſin.} q^2 \text{coſ.} q . (\text{coſ.} q . \text{ſin.} \varphi - \text{ſin.} q . \text{coſ.} \varphi)^3 . \frac{\partial^3 y}{1.2.3.\partial x^3} \\ + \&c. \end{array} \right.$$

Si l'on ſuppoſe dans cette équation, $y = q x^\mu$, & $\text{ſin.}\varphi^2 = -x^2$, il eſt viſible qu'elle donnera l'équation (t); or, dans cette ſuppoſition, on a $\text{ſin.}\,\varphi = x\sqrt{(-1)}$; partant

$$(\text{coſ.}\, q \,.\, \text{ſin.}\, \varphi - \text{ſin.}\, q \,.\, \text{coſ.}\, \varphi)^i = x^i (\sqrt{-1})^i . \times$$
$$[\text{coſ.}\, q + \sqrt{(-1)}\, \text{ſin.}\, q]^i = x^i . (\sqrt{-1})^i . \times$$
$$[\text{coſ.}\, i q + \sqrt{(-1)} . \text{ſin.}\, i q].$$

Le terme $\iint \frac{\partial p \partial q}{\text{ſin.}\varphi} \cdot \frac{\partial^{2n} y}{1.2.3 \ldots\ldots 2n . \partial x^{2n}} . 2^{2n} . \text{ſin.} p^{4n+1} .$ $\text{ſin.}\, q^{2n-1} . \text{coſ.}\, q . (\text{coſ.}\, q . \text{ſin.}\, \varphi - \text{ſin.}\, q . \text{coſ.}\, \varphi)^{2n}$ deviendra donc $\frac{\mu.(\mu-1).(\mu-2)\ldots(\mu-2n+1)}{1.2.3.\ldots\ldots.2n} \iint \frac{\partial p \partial q}{\sqrt{(-1)}} . x^{2n-1} . (-1)^n$ $\text{ſin.} p^{4n+1} . 2^{2n} . \text{ſin.} q^{2n-1} . \text{coſ.} q . [\text{coſ.}\, 2nq + \sqrt{(-1)} . \text{ſin.}\, 2nq]$; or on a $2^{2n-2} . \text{ſin.} q^{2n-1} = \pm . [\text{ſin.}(2n-1)q - (2n-1)$ $\text{ſin.}(2n-3)q + \&c.]$, le ſigne $+$ ayant lieu ſi n eſt impair, & le ſigne $-$ s'il eſt pair ; de-là on aura, en intégrant depuis $q = o$ juſqu'à $q = 180^d$, $\int 2^{2n-1} . \text{ſin.} q^{2n-1} . \partial q . \text{coſ.} q .$ $\frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)}} . [\text{coſ.}\, 2nq + \sqrt{(-1)} . \text{ſin.}\, 2nq] = -\frac{1}{2}\pi;$

partant

$\iint \frac{\partial p . \partial q}{\text{fin.}\, \varphi} \cdot \frac{2^{2n} . \partial^{2n} y}{1.2.3 \ldots 2n . \partial x^{2n}} . \text{fin.}\, p^{4n+1}\, \text{fin.}\, q^{2n-1}\, \text{cof.}\, q .$
$(\text{cof.}\, q . \text{fin.}\, \varphi - \text{fin.}\, q . \text{cof.}\, \varphi)^{2n} = - \pi . \frac{\mu . (\mu - 1) \ldots (\mu - 2n + 1)}{1.2.3 \ldots 2n} .$
$x^{2n-1} . \int \partial p . \text{fin.}\, p^{4n+1}$; on trouvera de même . . . .
$\iint \frac{\partial q . \partial p}{\text{fin.}\, \varphi} \cdot \frac{2^{2n+1} . \partial^{2n+1} y}{1.2.3 \ldots (2n+1) . \partial x^{2n+1}} . \text{fin.}\, p^{4n+3} . \text{fin.}\, q^{2n} .$
$\text{cof.}\, q (\text{cof.}\, q . \text{fin.}\, \varphi - \text{fin.}\, q . \text{cof.}\, \varphi)^{2n+1} = \frac{\pi . \mu . (\mu - 1) \ldots (\mu - 2n)}{1.2.3 \ldots (2n+1)} .$
$x^{2n} . \int \partial p . \text{fin.}\, p^{4n+3}$; l'équation (Λ) devient ainsi,

$$0 = \int \partial p . \text{fin.}\, p \left[\frac{\mu . (\mu - 1)}{1.2} . \text{fin.}\, p^4 - \frac{\mu . (\mu - 1) . (\mu - 2)}{1.2.3} \text{fin.}\, p^6 + \&\text{c.} \right]$$

ce qui donne

$$0 = \int \partial p . \text{fin.}\, p . (1 - \text{fin.}\, p^2)^{\mu} - \int \partial p . \text{fin.}\, p . (1 - \mu . \text{fin.}\, p^2)$$
$$= \int \partial p . \text{fin.}\, p . \text{cof.}\, p^{2\mu} - (1 - \mu) \int . \partial p . \text{fin.}\, p - \mu \int \partial p . \text{fin.}\, p . \text{cof.}\, p^2 ;$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$0 = C - \frac{1}{2\mu + 1} . (\text{cof.}\, p)^{2\mu+1} + (1 - \mu) . \text{cof.}\, p + \tfrac{1}{3} \mu . \text{cof.}\, p^3 ; (y)$$

il faut déterminer la conftante arbitraire C de manière que l'intégrale foit nulle lorfque $\text{cof.}\, p = 1$, & faire enfuite dans l'équation (y), $\text{cof.}\, p = -1$; or il peut arriver deux cas; 1.° la valeur de μ peut être telle que $(-1)^{2\mu+1} = (1)^{2\mu+1}$, dans ce cas l'équation (y) donne. . . . $0 = 2(1 - \mu) + \frac{2}{3} \mu$, ou $\mu = \frac{3}{2}$, mais cette valeur doit être rejetée par la nature du Problème, puifque le terme $q x^{\mu}$ deviendroit imaginaire lorfque x feroit négatif; 2.° la valeur de μ peut être telle que $(-1)^{2\mu+1} = -(1)^{2\mu+1}$; dans ce cas l'équation (y) donne, $\frac{2}{2\mu+1} - 2(1 - \mu) - \frac{2}{3} \mu = 0$; d'où l'on tire, $\mu\mu - \mu = 0$; partant, $\mu = 0$ & $\mu = 1$; d'où il fuit que l'expreffion de y ne peut avoir que cette

forme $y = a + bx + cx^r + fx^s +$ &c. $r, s,$ &c. étant moindres que l'unité; or, en substituant cette valeur dans l'équation *(Z)*, il est visible que l'équation..... $y = cx^r + fx^s +$ &c. y satisfera séparément; d'où il suit par l'analyse précédente, que r étant supposé le plus grand des exposans $r, s,$ &c. ne peut être que 0 ou 1; donc, toutes les fois que la valeur de y peut être exprimée par un nombre fini de termes, elle ne peut avoir que cette forme $y = a + bx$; maintenant il est aisé de voir que dans ce cas, la figure du corps doit être sphérique; car on a *(figure 5)*, $y = 0$, lorsque $x = 1$ & lorsque $x = -1$; d'où l'on tire, $a + b = 0$ & $a - b = 0$, partant $y = 0$. Je dois observer ici que M. d'Alembert a déjà fait une remarque semblable pour le cas où les exposans de x sont des nombres entiers & positifs, *(voyez le tome V des Opuscules* de ce grand Géomètre).

Il seroit utile d'étendre ces recherches au cas où les couches de la masse fluide sont inégalement denses; c'est ce que je me propose de faire dans un autre Mémoire.

X I.

Sur les Fonctions.

M. de la Grange a donné dans le volume de l'Académie de Berlin, pour l'année 1772, un très-beau Mémoire sur l'analogie qui règne entre les puissances positives & les différences, aussi-bien qu'entre les puissances négatives & les intégrales; (voyez dans le volume cité, un Mémoire qui a pour titre *(sur une nouvelle espèce de calcul relatif à l'intégration & à la différentiation des quantités variables)*; en suivant cette analogie, il est parvenu à plusieurs théorèmes fort intéressans sur les fonctions; mais comme cette voie est indirecte, & que d'ailleurs ce grand Géomètre semble reparder comme difficile la démonstration directe de ces théorèmes; je vais ici les démontrer par une méthode assez simple, & qui

de plus a l'avantage de faire voir pourquoi l'analogie des puiſſances & des ſommes ou des différences a lieu.

Pour ſimplifier le calcul, je ne conſidérerai qu'une ſeule variable ; il eſt facile d'étendre les recherches ſuivantes à tant de variables que l'on voudra ; ſoit donc u une fonction quelconque de x, on peut chercher l'intégrale ou la différence finie n.ième de u, en fonction des intégrales & des différences infiniment petites de cette quantité ; on peut chercher l'intégrale ou la différence infiniment petite n.ième de u en fonction de ſes intégrales & de ſes différences finies ; or voici comme M. de la Grange réſout ces deux problèmes.

En déſignant par les caractériſtiques Δ & Σ les différences & les intégrales finies, & ſuppoſant x croître de α dans u, cet illuſtre Auteur trouve d'une manière directe & fort élégante, l'équation $\Delta . u = e^{\frac{\partial u}{\partial x} . \alpha} - 1$; (1), en obſervant dans le développement du ſecond membre d'appliquer les expoſans à la caractériſtique ∂ ; c'eſt-à-dire au lieu de $(\frac{\partial u}{\partial x})^2$, décrire $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, & ainſi de ſuite ; e eſt le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt l'unité. De l'équation (1) M. de la Grange conclut en vertu de l'analogie entre les puiſſances poſitives & les différences, $\Delta^n . u = [e^{\frac{\partial u}{\partial x} \alpha} - 1]^n$; (2), & ſuppoſant n négatif, & changeant $\Delta^{-n} . u$, en $\Sigma^n . u$, il conclut en vertu de l'analogie entre les puiſſances négatives & les intégrales, $\Sigma^n . u = \frac{1}{(e^{\frac{\partial u}{\partial x} \alpha} - 1)^n}$; (3), en obſervant toujours d'appliquer les expoſans à la caractériſtique ∂, & de changer les différences négatives en intégrales ; c'eſt-à-dire, au lieu de $\partial^{-1} . u . \partial x$, d'écrire $\int u \partial x$, & ainſi du reſte.

Au moyen des équations (2) & (3), on aura donc la différence finie n.ième, & l'intégrale finie n.ième de u, en fonction de ſes intégrales & de ſes différences infiniment petites.

Préſentement l'équation (1) donne $e^{\frac{\partial u}{\partial x}\alpha} = 1 + \Delta . u$; donc, en prenant les logarithmes, $\frac{\partial u}{\partial x} \alpha = l.(1 + \Delta . u)$; d'où, en vertu de l'analogie des puiſſances poſitives & des différences, on aura $\frac{\partial^n . u}{\partial x^n} . \alpha^n = [l.(1 + \Delta u)]^n$; (4), en obſervant dans le développement du ſecond membre de cette équation, d'appliquer à Δ les expoſans des puiſſances de u. Si l'on fait n négatif dans l'équation (4), & que l'on change $\partial^{-n} . u . \partial x^n$, en $\int^n . u \partial x^n$, on aura. . . . .
$\int^n . u \partial x^n = \frac{1}{[l(1 + \Delta u)]^n}$; (5), en obſervant dans le développement du ſecond membre de cette équation d'appliquer les expoſans des puiſſances de $\Delta . u$ à la caractériſtique Δ, & de changer en intégrales finies, les différences finies négatives.

X I I.

Voici maintenant une méthode directe pour trouver ces théorèmes.

Je repréſente par u' la quantité u, lorſqu'on y ſuppoſe x devenir $x + \alpha$; ſoit $u' = u + s$, on aura, en différentiant par rapport à α, $\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial \alpha}$; donc $s = \int \partial \alpha . \frac{\partial u'}{\partial x}$; & $u' = u + \int \partial \alpha . \frac{\partial u'}{\partial x}$; on aura pareillement,
$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \int \partial \alpha . \frac{\partial \partial u'}{\partial x^2}$; & ainſi de ſuite; d'où l'on tire,

$$u' = u + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + h . \alpha^2 . \frac{\partial \partial u}{\partial x^2} + h' . \alpha^3 . \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \&c.$$

$$\& \; \Delta . u = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + h . \alpha^2 . \frac{\partial \partial u}{\partial x^2} + h' . \alpha^3 . \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \&c. \; (\sigma);$$

h, h', &c. étant des coëfficiens conſtans & indépendans de α, on

on aura pareillement $\Delta u' - \Delta u = \Delta^2 . u = \alpha . [\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}]$ $+ h . \alpha^2 . [\frac{\partial\partial u'}{\partial x^2} - \frac{\partial\partial u}{\partial x^2}] +$ &c.; d'où je conclus, $\Delta^2 . u = \alpha^2 . \frac{\partial\partial u}{\partial x^2} + p . \alpha^3 . \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} +$ &c. en suivant ce procédé, on aura généralement $\Delta^n . u = \alpha^n . \frac{\partial^n . u}{\partial x^n}$ $+ q . \alpha^{n+1} . \frac{\partial^{n+1} . u}{\partial x^{n+1}} + q' . \alpha^{n+2} . \frac{\partial^{n+2} . u}{\partial x^{n+2}} +$ &c. *(a)*; l'équation *(σ)*, donne $u = \alpha . \Sigma . \frac{\partial u}{\partial x} + h . \alpha^2 . \Sigma . \frac{\partial\partial u}{\partial x^2} +$ &c. soit $\frac{\partial u}{\partial x} = z$, on aura $\Sigma . z = \frac{1}{\alpha} \int z \partial x - h\alpha . \Sigma . \frac{\partial z}{\partial x} -$ &c. on aura pareillement $\Sigma . \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\alpha} z - h\alpha . \Sigma . \frac{\partial\partial z}{\partial x^2} -$ &c. & ainsi de suite; d'où je tire $\Sigma . z = \frac{1}{\alpha} . \int z \partial x - mz$ $- \alpha m' . \frac{\partial z}{\partial x} -$ &c. on aura pareillement $\Sigma^2 . z = \frac{1}{\alpha} \Sigma .$ $\int z \partial x - m \Sigma z - \alpha m' . \Sigma . \frac{\partial z}{\partial x} -$ &c. or, $\Sigma . \int z \partial x$ $= \frac{1}{\alpha} \int^2 . z \partial x^2 - m \int z \partial x -$ &c. d'où l'on voit que $\Sigma^2 . z$, a une expression de cette forme, $\Sigma^2 . z = \frac{1}{\alpha^2} .$ $\int^2 . z \partial x^2 + \frac{K}{\alpha} . \int z \partial x + K' z + K'' . \alpha . \frac{\partial z}{\partial x} +$ &c. en suivant ce procédé, on conclura généralement,

$\Sigma^n . u = \frac{1}{\alpha^n} . \int^n . u \partial x^n + \frac{r}{\alpha^{n-1}} . \int^{n-1} . u \partial x^{n-1}$ $+ \frac{r'}{\alpha^{n-2}} . \int^{n-2} . u \partial x^{n-2} +$ &c. *(b)*; r, r', &c. étant des coëfficiens constans & indépendans de α. Je suppose dans les équations *(a)* & *(b)*, $u = e^x$, ce qui donne, $u = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\partial u}{\partial x^2} =$ &c. $= \int u \partial x = \int^2 . u \partial x^2 =$ &c.

& $\Delta . u = e^x . (e^\alpha - 1)$; $\Delta^2 . u = e^x . (e^\alpha - 1)^2$, & généralement $\Delta^n . u = e^x . (e^\alpha - 1)^n$; ensuite $\Sigma . u = \frac{e^x}{e^\alpha - 1}$, $\Sigma^2 . u = \frac{e^x}{(e^\alpha - 1)^2}$; & généralement $\Sigma^n . u = \frac{e^x}{(e^\alpha - 1)^n}$; cela posé, les équations *(a)* & *(b)* donneront;

la première, $(e^\alpha - 1)^n = \alpha^n + q . \alpha^{n+1} +$ &c.

la seconde, $\frac{1}{(e^\alpha - 1)^n} = \frac{1}{\alpha^n} + \frac{r}{\alpha^{n-1}} +$ &c.

donc on aura,

$$\Delta^n . u = (e^{\alpha . \frac{\partial u}{\partial x}} - 1)^n, \text{ \& } \Sigma^n . u = \frac{1}{(e^{\alpha . \frac{\partial u}{\partial x}} - 1)^n};$$

pourvu qu'en développant les seconds membres de ces équations, on applique les exposans des puissances, à la caractéristique ∂, & qu'on change les différences négatives en sommes.

L'équation *(a)* donne

$$\Delta^n . u = \alpha^n . \frac{\partial^n . u}{\partial x^n} + \alpha^{n+1} . q . \frac{\partial^{n+1} . u}{\partial x^{n+1}} + \text{\&c.}$$

$$\Delta^{n+1} . u = \alpha^{n+1} . \frac{\partial^{n+1} . u}{\partial x^{n+1}} + \alpha^{n+2} . q . \frac{\partial^{n+2} . u}{\partial x^{n+2}} + \text{\&c.}$$

$$\Delta^{n+2} . u = \alpha^{n+2} . \frac{\partial^{n+2} . u}{\partial x^{n+2}} + \text{\&c.}$$

d'où l'on voit que $\alpha^n . \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, sera donné par une équation de cette forme,

$$\alpha^n . \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \Delta^n . u + s . \Delta^{n+1} . u + s' . \Delta^{n+2} . u + \text{\&c.} \quad (c);$$

l'équation *(b)* donne pareillement,

$$\frac{1}{\alpha^n} . \int^n . u \partial x^n = \Sigma^n . u + f . \Sigma^{n-1} . u + f' . \Sigma^{n-2} . u + \text{\&c.} \quad (\partial),$$

s, s', &c. f, f', &c. étant des coëfficiens constans & indépendans de α; soit donc $u = e^x$, & l'équation *(c)* donnera,

$\alpha^n = e^{\alpha} - 1 + s.(e^{\alpha} - 1)^2 + s'.(e^{\alpha} - 1)^3 +$ &c.

or, on a, $\alpha^n = [l(1 + e^{\alpha} - 1)]^n$; donc, si on développe le second membre de cette équation par rapport aux puissances de $e^{\alpha} - 1$, il donnera, $e^{\alpha} - 1 + s(e^{\alpha} - 1)^2 +$ &c. partant l'équation *(c)* est la même que celle-ci,

$$\alpha^n . \frac{\partial^n . u}{\partial x^n} = [l.(1 + \Delta u)]^n;$$

pourvu que dans le développement du second membre, on applique les exposans à la caractéristique Δ.

L'équation *(∂)* donne, en y faisant $u = e^x$ ....

$$\frac{1}{\alpha^n} = \frac{1}{(e^{\alpha} - 1)^n} + \frac{f}{(e^{\alpha} - 1)^{n-1}} + \text{\&c.}$$

or, $\frac{1}{\alpha^n} = \frac{1}{[l(1 + e^{\alpha} - 1)]^n}$; d'où il est facile de conclure

$\frac{1}{\alpha^n} . \int^n . u\partial x^n = \frac{1}{[l(1 + \Delta . u)]^n}$, pourvu que dans le second membre de cette équation on applique à la caractéristique Δ, les exposans des puissances, & qu'on change les différences négatives en intégrales.

XIII.

Reprenons l'équation $e^{\frac{\partial u}{\partial x} \alpha} - 1 = \Delta . u$, ou $e^{\frac{\partial u}{\partial x} . \alpha} = 1 + \Delta . u$; M. de la Grange en conclut en vertu de l'analogie des puissances & des différences, $e^{\frac{\partial u}{\partial x} \alpha'} = (1 + \Delta . u)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}$; or, $e^{\frac{\partial u}{\partial x} \alpha'}$ représente ici l'unité, plus la différence finie de u, lorsqu'on y suppose x devenir $x + \alpha'$; cette équation renferme la théorie générale des interpolations, & elle est facile à démontrer par ce qui précède; car puisqu'on a

$$\alpha \,.\, \frac{\partial u}{\partial x} = \Delta \,.\, u + f \,.\, \Delta^2 \,.\, u + \&c.$$

$$\alpha^2 \,.\, \frac{\partial\partial u}{\partial x^2} = \Delta^2 \,.\, u + {}'f \,.\, \Delta^3 \,.\, u + \&c.$$

&c.

on aura

$$\alpha' \,.\, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\alpha'}{\alpha} \,.\, \Delta \,.\, u + f \,.\, \frac{\alpha'}{\alpha} \,.\, \Delta^2 \,.\, u + \&c.$$

$$\alpha'^2 \,.\, \frac{\partial\partial u}{\partial x^2} = \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} \,.\, \Delta^2 \,.\, u + \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} \,.\, {}'f \,.\, \Delta^3 \,.\, u + \&c.$$

&c.

Donc, nommant $'\Delta \,.\, u$ la différence finie de u, lorsqu'on y suppose x devenir $x + \alpha'$, on aura

$$1 + {}'\Delta \,.\, u = 1 + \alpha' \,.\, \frac{\partial u}{\partial x} + \&c.$$

$$= 1 + \frac{\alpha'}{\alpha} \,.\, \Delta \,.\, u + \Delta^2 \,.\, u \,.\, (g \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} + g' \,.\, \frac{\alpha'}{\alpha} + g'') + \&c.$$

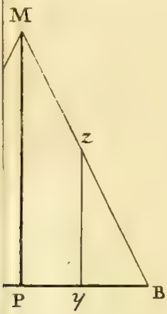
g, g', &c. étant des coëfficiens constans & indépendans de α & de α'. Soit $u = e^x$, & l'on aura

$$e^{\alpha'} = 1 + \frac{\alpha'}{\alpha} \,.\, (e^{\alpha} - 1) + (e^{\alpha} - 1)^2 \,.$$
$$(g \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} + g' \,.\, \frac{\alpha'}{\alpha} + g' \,.) + \&c.$$

Or, $e^{\alpha'} = (1 + e^{\alpha} - 1)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}$; développant donc le second membre de cette équation par rapport aux puissances de $e^{\alpha} - 1$, on aura

$$1 + \frac{\alpha'}{\alpha} \,.\, (e^{\alpha} - 1) + (e^{\alpha} - 1)^2 \,.\, [g \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} + g' \,.\, \frac{\alpha'}{\alpha} + g'' + \&c.];$$

donc on aura $1 + {}'\Delta \,.\, u = e^{\frac{\partial u}{\partial x} \alpha'} = (1 + \Delta u)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}$; en observant toujours d'appliquer aux caractéristiques Δ & ∂ les exposans des puissances.



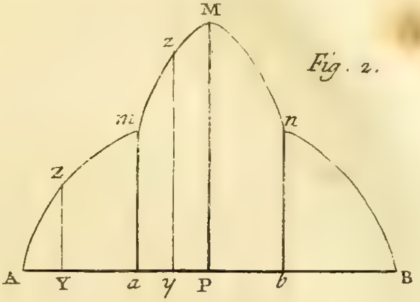
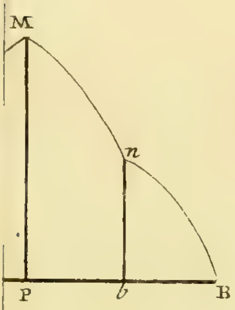


Fig. 2.



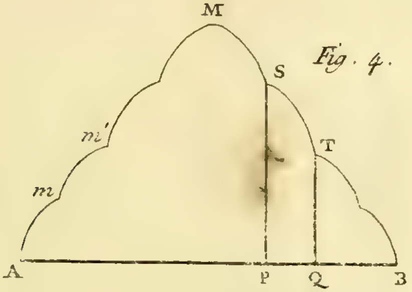


Fig. 4.

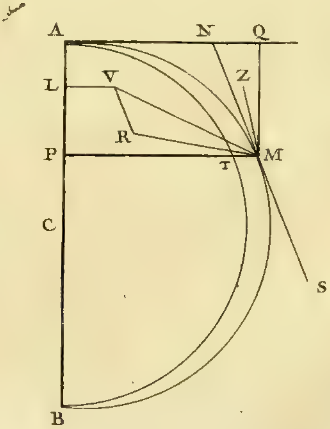


Fig. 5.

El.th Haussard Sc.

Fig. 1

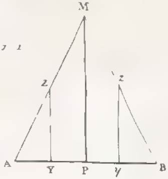


Fig. 2

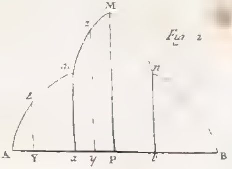


Fig. 3

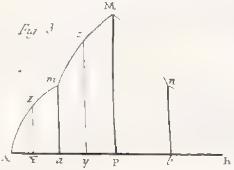


Fig. 4

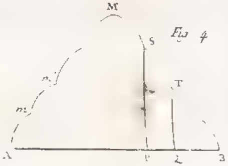
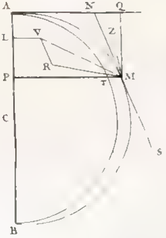


Fig. 5



Fl.th Haussard Sc

EXTRAIT

D'une Lettre écrite à M. l'Abbé Nollet, le 20 Juillet 1765, par M. DE CAIRE, Chevalier de l'Ordre de Saint-Louis, & Capitaine au Corps du Génie, sur la cause du Froid en Canada.

VOUS avez dû voir, Monsieur, dans les Relations de la Nouvelle-France, qui ont été publiées jusqu'ici, l'étonnement des Voyageurs sur le froid excessif qu'il y fait, plutôt que des raisonnemens solides, pour en expliquer la cause. Je crois même qu'à l'exception des Pères Bressany & de Charlevoix, Jésuites, tout ce qu'en disent les autres Voyageurs ne mérite aucune considération. La plupart ne parlent de ce phénomène que pour exprimer seulement la sensation qu'ils en ont éprouvée, sans rien dire qui puisse en indiquer le principe; & les autres croyant en avoir trouvé la cause, raisonnent sans connoissance; mais cela ne m'étonne point: il est des gens qui ne savent rien voir & beaucoup qui voyent mal, ce qui est peut-être encore pis; de sorte que le nombre des bons Observateurs de la Nature est toujours fort petit, sur-tout dans nos Colonies, qui joignent à leur éloignement des Pays savans, le peu de ressources d'une Terre nouvellement peuplée d'hommes policés.

La partie habitée du Canada se trouvant placée sous les mêmes parallèles que la France, on ne peut être que fort étonné que la différence de température de deux pays dont les climats semblent devoir être les mêmes, soit cependant si considérable qu'elle peut passer pour un phénomène. En effet, c'en est un que de voir à Paris la liqueur du thermomètre à 15 degrés $\frac{1}{2}$ au-dessous de la congélation en 1709, tandis qu'en 1743 elle est descendue en Canada au 33^e degré.

L'étonnement devient encore bien plus grand lorsqu'on

fait attention que la progreſſion du froid ne ſuit pas celle des degrés du thermomètre, & qu'un pays où cet inſtrument marqueroit un nombre de degrés double de celui qu'il indiqueroit dans un autre, ne ſeroit pas ſeulement du double plus froid, mais peut-être quinze à vingt fois davantage, & même au-delà, ſuivant que les deux nombres reſpectifs de degrés ſeroient l'un plus près & l'autre plus éloigné du terme de la glace: car on peut conſidérer la liqueur du thermomètre comme un reſſort, ou ſi l'on aime mieux, comme un bâton dont on voudroit rapprocher les deux extrémités. Il eſt bien aſſuré qu'après les avoir fait concourir l'une vers l'autre juſqu'à un certain point, il faudroit enſuite autant ou plus de force pour les approcher d'un pouce de plus qu'il n'en avoit fallu pour les 20, 30, 40, &c. premiers pouces dont on les avoit rapprochées en premier lieu.

Il en eſt de même de la liqueur du thermomètre. Le froid eſt la force qui la condenſe ou qui preſſe ſon reſſort; d'où l'on voit que ſi à meſure qu'elle baiſſe, le froid augmente, c'eſt dans une progreſſion bien différente de celle du nombre de degrés. On peut juger maintenant quelle énorme différence il y a eu entre l'hiver de 1709 à Paris, & celui de 1743 à Québec; ſur quoi il eſt bon d'obſerver encore que cette dernière ville eſt plus près du Soleil que la première de près de deux degrés, celle-ci étant par les $48^d\ 50'\ 11''$ de latitude, & l'autre, par les $46^d\ 55'$.

Avant de vous donner mes conjectures, Monſieur, ſur la cauſe d'un phénomène auſſi ſingulier, je crois devoir auparavant examiner celles des Pères Breſſany & de Charlevoix, comme étant les deux ſeuls Voyageurs qui en aient parlé avec des connoiſſances, & que je montre en quoi il me paroît qu'ils ſe ſont trompés.

Le premier de ces deux Miſſionnaires qui a publié, en Italien, une Relation du Voyage qu'il a fait dans la Nouvelle France, attribue à trois cauſes principales la rigueur du froid de cet immenſe pays; 1.° à la quantité de neige qu'il y tombe; 2.° à la proximité de la mer du Nord, & 3.° à

l'élévation du terrein qu'il prétend prouver par la profondeur de la mer à mesure qu'on approche de la côte, & par la hauteur des chutes d'eau qui se trouvent en fort grand nombre dans les rivières. Mais certainement la profondeur de la mer ne prouve absolument rien, & les chutes d'eau ne prouvent pas plus, comme dit fort bien M. l'Abbé Prevost dans son Histoire générale des Voyages, que les cataractes du Nil, sur-tout si on fait attention que le fleuve Saint-Laurent, depuis la ville de Montreal où finissent les rapides jusqu'à la mer qui en est à cent quatre-vingts lieues, n'a pas plus de rapidité que la plupart de nos rivières d'Europe, & c'est de quoi je me suis assuré. On peut d'ailleurs en juger par l'étendue des marées qui, si le pays étoit assez élevé pour produire par cette seule raison de si grands froids, ne seroient sûrement pas sensibles dans le lac Saint-Pierre, qui est à cent cinquante-quatre lieues de la mer. J'alléguerai encore contre cette opinion du Père Bressany, que le climat bien loin de devenir de plus en plus rigoureux à mesure qu'on remonte le fleuve, comme cela devroit être dans son hypothèse, devient au contraire toujours plus tempéré.

A l'égard de la seconde cause qu'adopte le Père de Charlevoix, & à laquelle le Père Bressany attribue en partie le froid du Canada, non-seulement je la trouve mal énoncée, mais aussi moins recevable qu'aucune autre; car certainement quand je jette les yeux sur une mappemonde, je ne vois pas que Québec soit plus près de la mer du Nord que Paris; mais au contraire, puisque l'Océan septentrional dont les mers de France & du Canada, comprises d'ailleurs sous les mêmes parallèles, font partie, suivant à peu-près le nord-est, se rapproche de Paris & s'éloigne de Québec. C'est apparemment à cause des glaces qui couvrent, pendant un certain temps de l'année, la mer qui borne le Canada à l'est, qu'il a cru pouvoir appeler en particulier, *Mer du Nord,* cette portion de l'Océan. Erreur géographique singulière si, comme il y a apparence, elle n'est fondée que sur cette raison. Mais comme dans le fond c'est moins au nom qu'aux glaces de cette

mer qu'il attribue la rigueur des hivers de la Nouvelle France; j'aurai à cet égard une objection à lui faire, qui sans doute est sans replique; c'est qu'il n'y a exactement point de glace sur les mers du Canada pendant l'hiver. C'est à quoi les deux Religieux n'ont pas fait attention, & c'est apparemment ce qui les a jetés dans l'erreur, & leur a fait commettre l'anachronisme, si j'ose m'exprimer ainsi, dont ils ont conclu leur assertion, en supposant dans un temps de l'année des glaces sur une mer où elles n'existent que dans un autre temps. Car on sait positivement que les glaces ne paroissent guère avant le mois de Mars, qu'elles augmentent jusqu'en Juin, & que diminuant ensuite peu-à-peu jusqu'à l'automne, elles disparoissent enfin tout-à-fait jusqu'au retour du printemps. Cela vient de ce que ce n'est point de l'eau de la mer qu'elles sont formées, & que produites par les ruisseaux & les sources qui coulent sur les bords des côtes, fort élevées sans doute, du nord de ce continent, leurs propres masses, aidées du dégel de la belle saison, les détachent de la terre & les précipitent dans l'Océan où les courans & les vents les faisant errer au loin, les anéantissent enfin par les chocs & les différens mouvemens qu'ils leur font éprouver. La chaleur du Soleil ne contribue pas peu aussi à réduire, dans leur premier état de liquidité, ces monstrueuses glaces qui font l'étonnement des Voyageurs, & dont ces mers sont couvertes dans les temps que nous venons d'indiquer.

Cette explication, qui est aussi vraisemblable qu'elle est simple & naturelle, fait trouver d'autant plus extraordinaire celle d'un Savant du premier ordre sur le même sujet. Le célèbre M. Halley pense que l'Amérique septentrionale a été autrefois très-près du pôle; qu'un changement arrivé, on ne sait pas quand, l'en a éloignée, & que les glaces dont nous venons de parler sont les restes de celles que la proximité du pôle avoit autrefois produites dans cette partie du Nouveau-Monde. Il regarde aussi le froid qu'on y éprouve comme un reste de celui qui s'y faisoit sentir avant qu'elle eût été déplacée.

On

On ne peut douter que notre Globe n'ait essuyé de grands changemens; mais n'est-ce pas abuser des notions que nous en avons que de nous en servir, comme M. Halley, pour expliquer les phénomènes de la Nature?

Une autre observation, qui est comme la conséquence du fait que je viens d'établir, & qui ne sert pas moins que lui à détruire le sentiment des deux Voyageurs Jésuites, c'est que les vents de Nord-est, qui soufflent pendant l'hiver, & qui viennent nécessairement de la mer du Nord, bien loin de refroidir l'air, occasionnent au contraire une diminution considérable de froid. Il arrive même que quand ils succèdent tout-à-coup au Nord-ouest, le thermomètre monte dans l'espace d'une matinée, quelquefois de 10 à 12 degrés. Cela seul prouveroit assez que la mer n'est pas couverte de glaces pendant l'hiver, si on n'en étoit pas assuré d'ailleurs.

Le Père Bressany, en attribuant, en premier lieu, ces étonnantes gelées à la neige & au séjour qu'elle fait pendant six à sept mois sur la terre, ne s'est pas aperçu qu'il ne faisoit que changer la question; car on pouvoit lui demander pourquoi il tombe cette quantité de neige dans un pays situé sous les mêmes parallèles que le Languedoc & la Provence, & pourquoi elle y séjourne si long-temps? Quand même on lui accorderoit que les vapeurs de ce prodigieux nombre de lacs & de rivières dont le Canada est rempli, sont suffisantes pour les fournir (ce qui cependant peut être contesté, comme je le montrerai plus bas), son hypothèse n'en seroit pas mieux étayée. On lui demanderoit encore quel est le véhicule qui réduit ces vapeurs en neige à des latitudes où l'on n'en voit ordinairement point ou rarement? D'ailleurs, en faisant même abstraction de toutes ces objections, il s'en faut de beaucoup qu'on puisse conclure le froid du Canada de la quantité de neige qu'il y tombe. Il est des cantons dans nos montagnes de Provence & du Dauphiné où elle est tout aussi abondante, & qui sont même entourés de montagnes qui en sont éternellement couvertes; cependant il s'en faut bien que le froid qu'il y fait puisse entrer en comparaison avec celui de la

Nouvelle-France. Je ne citerai que le Briançonnois; la neige y eſt au moins en auſſi grande quantité qu'à Québec, elle y ſéjourne preſque auſſi long-temps, & les ſommets de ſes montagnes n'en ſont jamais dégarnis; néanmoins, dans les hivers ordinaires, la liqueur du thermomètre ne deſcend qu'au 6.^{e} ou 7.^{e} degré au-deſſous du terme de la glace; en 1760, elle ne deſcendit qu'au 6.^{e} degré $\frac{1}{2}$.

D'ailleurs, ſi le ſéjour de la neige pouvoit être la cauſe de ce grand froid, ſeroit-ce au bout d'un mois & demi qu'elle couvre la terre, qu'elle feroit deſcendre la liqueur au 24^e degré après celui de la congélation, tandis qu'à Briançon, après cinq à ſix mois de ſéjour, à peine la fait-elle deſcendre juſqu'au 7.^{e} degré? En 1759, la neige ne commença à tomber dans la partie de Québec que du 25 au 30 Octobre, & le thermomètre, vers le milieu de Décembre, ſe trouva au 24.^{e} degré au-deſſous de la glace.

Je crois qu'en voilà aſſez, Monſieur, pour prouver que les trois cauſes auxquelles le Père Breſſany attribue le froid du Canada ne réſolvent point la queſtion.

Le Père de Charlevoix en donne une quatrième, en avouant cependant qu'il ne la croit pas ſeule capable de produire un auſſi grand effet, mais qui doit, ſelon lui, y contribuer beaucoup. C'eſt d'un côté, cette étrange multitude de lacs & de rivières dont on ſait que la Nouvelle-France eſt remplie; de l'autre, ſes bois & ſes montagnes. Le Père Breſſany prétend qu'aucun de ces trois objets n'y ſauroit avoir part, & je penſe comme lui.

Quelqu'abondantes que puiſſent être les vapeurs qui s'élèvent des eaux, il eſt bien certain qu'elles ſeroient toujours inſuffiſantes pour produire ſeulement un degré de froid égal à celui de la glace, ſi quelqu'autre cauſe n'y coopéroit avec elle. Je n'examinerai point ſi Gaſſendi & quelques autres Philoſophes corpuſculaires ont raiſon de ſéparer la cauſe du froid de celle de la gelée, & de ſoutenir qu'il exiſte des parties frigorifiques ignées, ou ſi ce n'eſt pas gratuitement que M. Muſſchenbroëck, qui diſtingue auſſi ces deux cauſes,

regarde la gelée comme l'effet d'une matière étrangère qui penétrant dans les interſtices des liquides en arrête les mouvemens & en attache, pour ainſi dire, les parties enſemble. L'opinion la plus généralement reçue aujourd'hui, qui eſt auſſi la vôtre, Monſieur, & la plus admiſſible à mon ſens, donne également pour cauſe de la gelée, ainſi que du froid, la ſimple privation de la matière du feu; mais comme cette privation ne ſauroit être aſſez conſidérable à des latitudes comme celles du Canada, pour être la cauſe du froid rigoureux qu'on y éprouve; voyons ſi ce froid & ces gelées extraordinaires ne proviendroient pas du refroidiſſement de l'atmoſphère, cauſé par le mélange des vapeurs avec quelque ſel, tel que le nitre, le ſel ammoniac ou quelqu'autre ſel volatil ou alkaliſé. Cette conjecture paroît plauſible, puiſqu'il eſt certain que ces ſortes de mélanges peuvent opérer un froid exceſſif.

S'il eſt vrai que les eaux dormantes fourniſſent beaucoup de vapeurs, il n'eſt guère moins aſſuré que celles qui ſont conſtamment en mouvement n'en fourniſſent que très-peu. Leur agitation perpétuelle émouſſant la pointe des rayons ſolaires, empêche ſans doute qu'il ne puiſſe s'en élever beaucoup; & c'eſt vraiſemblablement par cette raiſon que les pluies ſont fort rares en pleine mer. Or, les eaux des rivières & des lacs du Canada, toujours agitées comme celles de la mer, par les courans & les vents qui cauſent même ſur ces mers douces des tempêtes, coulant d'ailleurs ſur des fonds de ſable, doivent, comme la mer, fournir très-peu de vapeurs; auſſi le Canada eſt-il un des pays du monde où il pleut le moins & où l'on voit le moins de brouillards; ce qui ſeroit tout l'oppoſé, ſi en effet les vapeurs aqueuſes y étoient auſſi abondantes qu'on eſt porté à le croire en voyant la grande quantité d'eau que ce pays contient.

La ſéchereſſe de ſon terrein contribue auſſi infiniment à rendre les pluies ſi rares. Il y a peu de pays où la terre ſoit plus généralement mêlée de ſable & de pierres & qui contienne moins d'humidité; c'eſt ce que les deux Religieux

Voyageurs ont très-bien remarqué, & ils en donnent même pour preuve la ſalubrité ſingulière de l'air qui rend le Canada le pays de l'Univers peut-être le plus ſain.

Les ſels ne ſe trouvant que dans les terres graſſes ou très-compactes, telles qu'on nous repréſente celles de la Sibérie & de l'Arménie, qui par cette raiſon en abondent *(voyez Tournefort, Voyage du Levant)*, la légèreté du terrein du Canada eſt une preuve certaine qu'il n'en contient point du tout; mais quand même ils y ſeroient abondans, dès que les corpuſcules qui s'en éleveroient ne pourroient ſe joindre à des molécules d'eau que la ſécheresſe du ſol, comme je viens de l'obſerver, rend très-rares, ainſi que le peu de vapeurs des lacs & des rivières, le refroidiſſement de l'atmoſphère qui ſeroit proportionné au peu de parties aqueuſes qu'il contient, n'opéreroit jamais qu'un froid très-ordinaire, puiſque c'eſt de l'union de ces deux objets que doit, dans ce cas-ci, réſulter la gelée. *(Diſſertation ſur la Glace, par M. de Mairan).*

La conjecture que j'avois formée comme la plus vraiſemblable ne peut donc point avoir lieu.

Si les bois paroiſſent devoir entrer en conſidération dans la queſtion dont il s'agit, ce n'eſt peut-être que par les vapeurs qu'ils empêchent d'ordinaire de s'élever; mais puiſque j'ai prouvé qu'il n'eſt guère de pays qui en fourniſſe auſſi peu que le Canada, & qu'il eſt certain que les véhicules pour les refroidir n'y ſont pas moins rares; je crois que cet article des conjectures du Père de Charlevoix, ſe trouve ſuffiſamment réfuté par l'expoſé ci-deſſus.

Je n'ai pas été peu étonné que ce Miſſionnaire ait avancé que le froid diminue dans la Nouvelle-France à meſure qu'on la défriche. Pour peu qu'il eût réfléchi ſur cet objet, il en auroit aperçu l'inconſéquence. La Nouvelle-France eſt une forêt immenſe, auſſi grande que l'Europe; les bords ſeuls du fleuve Saint-Laurent, dans l'étendue d'environ 150 lieues & ſur une largeur moyenne de 3 à 400 toiſes, ſont à peu-près les ſeules parties défrichées de ce vaſte pays; je demande

d'après cela, ſi un ſi petit objet peut apporter quelque différence dans le climat d'une forêt auſſi grande, comme je viens de le dire, que l'Europe? L'autorité dont s'appuie le Père de Charlevoix, c'eſt l'aſſurance que lui en ont donné les habitans. Eh! comment peuvent-ils en juger? quel eſt leur terme de comparaiſon dans un pays où il s'en faut bien qu'il y ait eu une ſuite d'obſervations? Cependant ceci ne peut ſe tranſmettre que par des obſervations, comme tout phénomène qui a des degrés d'augmentations & de diminutions; & ce n'eſt pas ſur le dire d'un vieillard qu'on peut ſur de pareils objets établir un fait.

Mais quand même on accorderoit que le défrichement de cette petite portion des bois du Canada a apporté quelque changement dans ſon climat, ne fût-il, ce changement, que d'un demi-degré, quel étonnant réſultat n'auroit-on point ſi on vouloit conclure, comme cela devroit être ſur ce principe, le froid actuel du Canada par cette analogie: *La partie défrichée eſt à celle qui ne l'eſt pas, comme un demi-degré de froid que la partie défrichée opéroit, eſt au froid inconnu dont la partie en friche eſt capable.* Certainement l'exiſtence de ce quatrième terme ne laiſſeroit la vie à aucun individu, & vous obſerverez, Monſieur, qu'il ſeroit bien plus abſurde, ce quatrième terme, ſi je n'avois pas ſuppoſé, contre la vérité dans l'analogie, que le froid eſt dans la même proportion que les nombres reſpectifs des degrés.

Les montagnes que le Père de Charlevoix donne pour le troiſième objet de la collection de ſes opinions particulières ſur la cauſe du froid du Canada, ſont beaucoup plus éloignées de Québec que les Alpes & les Pyrénées ne le ſont de Paris. D'ailleurs, quelles montagnes que les Apalaches en comparaiſon de celles-ci! elles ſeroient des côteaux auprès de ces maſſes énormes qui s'élèvent au-deſſus des nues, & au pied deſquelles ſe trouvent nos Provinces du midi de la France, ſans en éprouver ce froid extrême que le Père de Charlevoix veut que les Apalaches ſoient capables d'opérer en Canada. Il ne fait pas même attention qu'elles ſont dans

la partie méridionale de ce pays; mais il y a tant de choſes à dire pour réfuter cet article, que je ne crois pas devoir m'y arrêter plus long-temps.

Je penſe, Monſieur, qu'il eſt aſſez prouvé par tout ce que je viens d'expoſer, qu'il s'en faut de beaucoup que les deux Voyageurs Jéſuites aient trouvé la cauſe du froid de la Nouvelle-France. On peut dire qu'ils ont épuiſé les hypothèſes pour la découvrir, & quoiqu'elles ſoient preſque toujours auſſi nombreuſes qu'on le veut, quand on ne raiſonne que ſur les effets d'une cauſe inconnue, je ne chercherai point à les imiter. Newton donne pour premier principe, que ceux qui veulent étudier la Nature, ne doivent adopter pour rendre raiſon des effets naturels, que des cauſes réellement exiſtantes & qui peuvent ſervir à expliquer ces mêmes effets. Perſuadé que c'eſt-là véritablement la marche que l'eſprit humain doit ſuivre pour aller aux découvertes, j'ai fait en ſorte de ne point m'en écarter, en conſidérant le vent de nord-oueſt comme la ſeule & unique cauſe de tout le froid du Canada. Vous allez juger, Monſieur, ſi je me ſuis trompé.

On voit dans toutes les relations des voyages faits au Canada, ainſi que dans celles des deux Jéſuites, que les plus fortes gelées n'ont lieu que lorſque c'eſt le vent de Nord-oueſt qui règne. Un fait auſſi frappant n'a point échappé non plus aux gens du pays; mais ni eux, ni les Voyageurs n'ont cherché à examiner ſi ce vent ne ſeroit pas lui ſeul la vraie cauſe du froid exorbitant de ce continent. Cela vient ſans doute de ce que ni les uns ni les autres n'ont pu imaginer que cette cauſe pût ſe trouver ailleurs que dans le pays même où elle opère. Il étoit aſſurément bien juſte de penſer de la ſorte, tant qu'on n'avoit pas fait l'examen des objets qui, ſans aller au loin, pouvoient ſervir à expliquer ce phénomène. On auroit eu tort en effet de procéder autrement & de négliger ce que les qualités du ſol & ſa ſituation pouvoient faire mettre en conſidération pour en rendre raiſon. La terre du Canada pouvoit, par exemple, être fort compacte & fort humide, chargée de ſels volatils ou autres,

tels que le nitre & le ſel ammoniac naturel, comme il s'en trouve dans quelques endroits de l'Arménie : le pays pouvoit auſſi être fort élevé au-deſſus du niveau de la mer. Or, il eſt bien certain que le concours de quelques-uns de ces objets ſeroit très-capable de produire un degré de froid très-conſidérable, comme cela arrive en Sibérie & dans quelques cantons de l'Arménie, où ce concours a lieu ; mais il s'en faut de beaucoup, après les faits que j'ai établis, qu'il ait lieu en Canada. C'eſt donc hors de ce pays qu'exiſte la cauſe de ce froid prodigieux qui s'y fait ſentir ; j'ai avancé qu'elle réſidoit uniquement dans le vent de Nord-oueſt, il me reſte à le prouver.

On ne peut diſconvenir que les vents n'influent ſingulièrement ſur les viciſſitudes des ſaiſons. Capables d'acquérir un degré très-conſidérable de froid ou de chaud, il eſt aſſez naturel de penſer, & même différentes obſervations conſtatent la choſe, qu'ils apportent dans un pays l'air froid ou chaud des régions qu'ils ont traverſées. C'eſt par les vents qui viennent de la Sibérie, qu'à Aſtracan, ville ſituée au 46^{d} 22′ de latitude, la liqueur du thermomètre deſcend juſqu'au 24.^{e} degré $\frac{1}{2}$ au-deſſous de la congélation ; & c'eſt auſſi par le même principe, quoique l'effet ſoit différent, que le vent qui vient d'Afrique apporte à Malte, pendant l'été, une chaleur inſupportable. On pourroit citer d'autres lieux de la terre, où les vents produiſent encore les mêmes effets.

Donnez-vous maintenant la peine, Monſieur, de jeter les yeux ſur la carte, & d'y ſuivre la route que tient le vent de Nord-oueſt pour arriver en Canada. Vous verrez que depuis les côtes où échouèrent les Ruſſes en 1743, & qui ſont à-peu-près par les 71 degrés $\frac{1}{2}$ de latitude Nord, ce vent parcourt, avant d'arriver à Québec, un eſpace d'environ 1200 lieues d'une terre qui tient de plus en plus du Nord, & qui n'eſt interceptée par aucune mer, circonſtance qu'il eſt eſſentiel de remarquer, comme je le ferai voir tout à-l'heure. Il ne l'eſt pas moins d'obſerver auſſi que tout cet eſpace ne contient aucune chaîne de grandes montagnes capable de

détourner ce vent; & vous voudrez-bien, Monsieur, faire attention que le froid par le 71.^{e} degré $\frac{1}{2}$ de latitude, est encore bien plus considérable que celui de Québec.

Toùs ces faits étant incontestables, je crois pouvoir en conclure avec certitude, que le vent de Nord-ouest refroidi à l'excès par les climats constamment glacés d'où il vient, est la seule & unique cause du froid exorbitant du Canada; ce que je suis d'autant plus en droit de penser, que j'ai suffisamment prouvé, à ce que j'imagine, que ni les eaux, ni les bois, non plus que les qualités & la disposition du terrein de ce pays-là, ne pouvoient être les principes d'un phénomène aussi extraordinaire,

J'ai dit qu'il étoit essentiel d'observer que le Nord-ouest ne rencontroit aucune mer dans son trajet; c'est qu'il est certain que s'il en parcouroit une surface considérable, son degré de froid pourroit en être beaucoup affoibli, parce que la mer moins dense que la terre, & constamment exposée aux rayons du soleil, tandis que les premières neiges leur dérobent la surface de celle-ci, est par ces raisons susceptible d'un refroidissement moins considérable qu'elle; d'autant plus qu'elle ne contient point comme la terre, de ces sortes de sels, les plus propres à opérer ces froids singuliers que les procédés chimiques nous font connoître: d'où il résulte que son atmosphère, latitudes égales, doit être beaucoup plus tempéré que celui de la Terre, & diminuer conséquemment le degré de froid d'un vent qui venant des environs du pôle, le traverseroit. C'est sans doute pour cette raison qu'on éprouve en effet beaucoup moins de froid l'hiver sur la mer que sur la terre; & c'est sur-tout lorsqu'en venant de la pleine mer on approche des côtes qu'on s'en aperçoit. Il n'y a guère de Marin qui n'ait fait cette remarque.

MÉMOIRE

MÉMOIRE SUR LES NERFS DE LA DIXIÈME PAIRE.

Par M. SABATIER.

RIEN ne mérite plus de fixer l'attention des Anatomistes, que les nerfs, organes du mouvement & du sentiment, & desquels dépendent la plupart des fonctions de l'économie animale. Mais il est aussi difficile qu'important d'en connoître la marche & la distribution. La petitesse des fibrilles qui s'en séparent, leurs entrelassemens multipliés, leurs communications réciproques ou avec celles des nerfs voisins, leur situation tantôt profonde & tantôt superficielle, & sur-tout les variétés que la Nature présente dans la manière de naître & de se ramifier de quelques-uns, sont autant d'obstacles qui empêchent d'y parvenir. Il n'est donc pas étonnant que leur histoire n'ait pas été aussi approfondie que celle des autres parties qui entrent dans la composition du corps humain. Ces organes sont devenus depuis quelque temps l'objet de mes recherches particulières. Le Mémoire que l'on va lire est le premier fruit de ce nouveau travail. Il ne contient point de ces découvertes intéressantes qui assurent la réputation de ceux qui les ont faites. L'Anatomie a été cultivée par un si grand nombre d'habiles Gens, qu'il est difficile d'en faire de cette espèce; mais comme il renferme la description exacte d'un nerf peu connu, & sur l'origine duquel les sentimens des Auteurs sont partagés, j'ai pensé qu'il pourroit être utile.

Les nerfs de la dixième paire, ou autrement, les nerfs sous-occipitaux, n'ont commencé à être placés au nombre de ceux qui naissent de la moelle alongée, que depuis Willis qui a mis en doute s'ils devoient être comptés parmi les nerfs qui sortent du crâne, ou parmi ceux que la moelle

épinière produit. Vieussens, qui est venu ensuite, ayant embrassé la première opinion, elle a été adoptée par la plus grande partie des Modernes. Il y en a cependant eu plusieurs qui ont cru trouver à ces nerfs le caractère propre à ceux de la moelle de l'épine, & qui les ont regardés comme la première paire cervicale. Tels sont entr'autres Santorini, Heister, Garengeot, & ce qui est du plus grand poids, le célèbre M. Haller, qui les a décrits sous ce nom dans son grand Ouvrage de Physiologie. S'il étoit certain qu'ils naquissent hors du crâne & non pas au-dedans de cette cavité, & qu'ils fussent composés de deux faisceaux de fibres, l'un antérieur & l'autre postérieur, & non pas d'un seul qui s'élève de la partie antérieure de la moelle, la question seroit décidée en faveur de ces derniers; mais c'est ce qu'il est impossible de déterminer d'une manière positive, d'après les descriptions qui en ont été données.

Willis dit, en parlant des nerfs dont il s'agit, qu'ils commencent à naître vis-à-vis l'extrémité de l'occipital, par un grand nombre de filets qui s'élèvent des côtés de la moelle alongée, lorsqu'elle est prête à s'enfoncer dans le canal des vertèbres; Vieussens, qu'ils tirent leur origine de la partie inférieure des tubercules pyramidaux & olivaires, au-dessous des nerfs de la neuvième paire; Ridley, qu'ils viennent en partie de la moelle alongée & de celle de l'épine; & M.rs Winslow & Lieutaud, que leur naissance répond à l'extrémité de la moelle alongée, vis-à-vis la partie postérieure des condyles de l'occipital. Santorini au contraire assure que ces nerfs s'élèvent de la moelle de l'épine, entièrement hors du crâne, en quoi il a été suivi par M. Morgagni, lequel fait observer que s'ils paroissent sortir du dedans de cette cavité, ce n'est qu'une apparence qui dépend de ce que la première vertèbre du col étant assez fermement attachée à l'occipital, & ces deux os étant également recouverts de la dure-mère, il est assez difficile de distinguer les limites de l'un & de l'autre.

Le nombre de faisceaux qui forment les nerfs de la dixième paire n'est pas mieux connu. Selon Ridley, ce qui les fait

eſſentiellement différer des nerfs qui viennent de la moelle épinière, c'eſt qu'ils n'en ont qu'un ſeul, dont les fibres ſortent de la partie antérieure de cette moelle. M. Morgagni penſoit déjà de même dès le temps où il écrivoit ſes *Adverſaria Anatomica;* mais comme dans une diſſection ultérieure il avoit vu trois fibres extrêmement minces répondre de chaque côté à la partie poſtérieure de ces nerfs, & aller ſe joindre à l'acceſſoire de Willis, il les a cherchées ſur ſept autres ſujets. Deux fois il a été obligé de ſuſpendre ſon jugement. Quatre fois il s'eſt aſſuré que les fibres en queſtion n'avoient point lieu. Enfin il a trouvé une fois, du côté droit ſeulement, deux fibrilles nerveuſes, qui après avoir embraſſé le nerf acceſſoire de Willis ſans avoir aucune communication avec lui, ſe portoient vers le lieu où celui de la dixième paire, formé par des filets qui naiſſoient de la partie antérieure de la moelle de l'épine, perçoit la dure-mère pour ſortir du canal des vertèbres; de ſorte que s'il eût toujours rencontré ce qu'il n'a vu que ſur un ſujet unique, & du côté droit ſeulement, il n'auroit pas douté que les nerfs de la dixième paire n'euſſent deux racines comme les nerfs vertébraux. M. Winſlow dit auſſi que ces nerfs viennent de côté & d'autre de la partie antérieure de la moelle, par un plan ſimple de petits filets. Cependant ſi l'on en croit Santorini, Heiſter, & un Auteur Italien anonyme, ſur lequel ce dernier s'appuie, ils ont pour le moins trois racines en arrière, leſquelles viennent s'y réunir; & M. Haller, après avoir douté qu'ils euſſent une double origine, s'en eſt enfin aſſuré.

Une diverſité de ſentimens auſſi marquée, demandoit de nouvelles obſervations, & j'y ai eu recours. J'ai vu que les nerfs de la dixième paire ſortent de la moelle de l'épine, dans l'intervalle qui ſépare l'occipital d'avec la première vertèbre du cou, & par conſéquent hors du crâne, & quelquefois auſſi vis-à-vis les parties latérales de la première vertèbre. Les filets qui leur donnent naiſſance, viennent pour le plus ſouvent de la partie antérieure de la moelle ſeulement, comme ceux de la moelle alongée. Cependant, il y a au moins un

tiers des ſujets chez leſquels ils ſont formés, à leur origine, de deux plans de fibres, l'un antérieur & l'autre poſtérieur: ce qui juſtifie les auteurs qui ont embraſſé l'une ou l'autre opinion, d'après des obſervations bien faites, mais pas aſſez réitérées. Lorſque les nerfs de la dixième paire ne ſont formés que d'un ſeul plan de fibres, celles qui les compoſent ſont au nombre de huit à neuf, raſſemblées en trois faiſceaux pour l'ordinaire, & quelquefois en deux, aſſez écartés l'un de l'autre, & qui ne ſe réuniſſent qu'à ſa ſortie à travers le prolongement de la dure-mère qui tapiſſe le canal de l'épine. Lorſqu'ils en ont deux, l'antérieur eſt le plus conſidérable. Pour le poſtérieur, il n'eſt fait que d'un, & tantôt de deux filets, dont l'inférieur eſt aſſez gros. Les deux plans ſont ſéparés l'un de l'autre par le ligament dentelé & par le nerf acceſſoire de Willis, qui, comme on ſait, remonte le long de la partie ſupérieure de la moelle de l'épine, entre ce ligament & le plan poſtérieur des filets qui donnent naiſſance aux nerfs cervicaux. J'ai cependant trouvé quelques ſujets, où le plan poſtérieur des nerfs de la dixième paire, étoit ſitué au-devant de l'acceſſoire de Willis, entre ce nerf & le ligament dentelé; ce plan eſt toujours ſitué un peu plus bas que l'antérieur. Les nerfs de la dixième paire, formés comme il vient d'être dit, s'écartent de la moelle de l'épine de dedans en dehors, & un peu en arrière, & ſe portent vers le lieu où l'artère vertébrale perce la dure-mère & s'introduit dans le crâne. Les deux plans de fibres, quand il y en a deux, s'uniſſent & ſe rencontrent pour paſſer au-deſſous de cette artère, & par la même ouverture. Le tronc même de l'acceſſoire de Willis eſt preſque toujours ſi adhérent à leur ſortie, qu'on diroit qu'il s'en détache quelques filets qui vont s'y joindre. Cependant j'ai trouvé, que dans le plus grand nombre de ſujets, il n'y étoit que collé ſans continuité de ſubſtance, quoiqu'en pluſieurs il me ſemblât y être vraiment continu. J'ai même remarqué en deux ou trois occaſions, que ce nerf au lieu d'être uni avec ceux de la dixième paire, leur donnoit un filet aſſez conſidérable, qui deſcendoit s'y

joindre de dedans en dehors. La ſituation des derniers nerfs, eſt ordinairement tranſverſale depuis leur naiſſance juſqu'à leur ſortie du canal de l'épine. Quelquefois auſſi elle eſt un peu oblique de bas en haut, à contre-ſens de la première paire cervicale, & il eſt très-peu de ſujets chez leſquels les fibres inférieures de l'un & de l'autre plan deſcendent, pendant que les ſupérieures montent.

A peine les nerfs de la dixième paire ſont-ils ſortis du canal de l'épine, qu'ils ſe gliſſent au-deſſous de l'artère vertébrale, entre cette artère & l'échancrure ſupérieure de la première vertèbre du cou, circonſtance d'autant plus remarquable, que Willis & Ridley ont cru qu'ils paſſoient entre la première & la ſeconde vertèbre, & qu'Heiſter, auteur fort moderne, & qui n'ignoroit pas que Vieuſſens, Santorini & M. Morgagni avoient avancé le contraire, a dit auſſi qu'ils ſortoient entre ces vertèbres. Ils groſſiſſent un peu dans leur trajet, & forment une eſpèce de ganglion fort alongé, qui eſt courbé de bas en haut, & qui paroît comme biſurqué lorſqu'on l'examine par-dehors. Quand ces nerfs ſont parvenus vis-à-vis le bord poſtérieur de la première vertèbre, ils ſe partagent en deux branches d'égale groſſeur, dont une eſt antérieure & aſſez longue, & l'autre eſt poſtérieure & beaucoup plus courte.

La première ſe porte d'arrière en avant, & de dedans en dehors, le long du bord poſtérieur de l'artère vertébrale, juſqu'au lieu où cette artère ſort du canal pratiqué à travers les vertèbres du cou; elle monte enſuite de bas en haut, & va paſſer entre l'apophyſe tranſverſe de la première vertèbre, & celle du temporal qui eſt connue ſous le nom de *maſtoïde*, au dedans de l'artère en queſtion. Après cela, elle deſcend au-devant de la première vertèbre, & forme une eſpèce d'anſe nerveuſe, avec un des rameaux antérieurs de la première paire cervicale, qui remonte de bas en haut, & qui vient s'y terminer par deux filets aſſez peu écartés l'un de l'autre. L'anſe dont il vient d'être parlé embraſſe la partie antérieure de l'apophyſe tranſverſe de la première vertèbre, à ſa racine.

La branche antérieure de la dixième paire, après avoir formé cette communication, se partage pour l'ordinaire en trois rameaux qui se jettent dans le tronc de la huitième paire, dans celui de la neuvième & dans la partie supérieure du premier ganglion de l'intercostal; souvent elle n'a que deux rameaux à son extrémité, lesquels vont à la neuvième paire & à l'intercostal; souvent aussi celui qui doit s'unir à la huitième paire, se détache de cette branche avant qu'elle ait reçu les deux filets de la première paire cervicale, & se glissant obliquement d'arrière en avant & de bas en haut, derrière la veine jugulaire interne, il va se perdre dans le tronc même de la huitième paire, au passage de ce nerf à travers le trou déchiré postérieur.

La branche antérieure de la dixième paire donne quelques filets dans le trajet qu'elle parcourt. Le premier s'élève de sa partie supérieure, derrière le trou de l'apophyse transverse de la première vertèbre, & vis-à-vis le muscle droit latéral de la tête, auquel il se distribue. Il est peu considérable, & j'en ai quelquefois trouvé deux fort près l'un de l'autre, qui avoient la même destination. Celui qui vient ensuite est beaucoup plus petit: il se détache de sa partie inférieure & descend le long de la partie interne du canal dans lequel l'artère est renfermée. Ce filet, indiqué par Garengeot & ensuite par M.rs Winslow & Tarin, est rejeté par M. Haller qui dit ne l'avoir jamais pu rencontrer, non plus que deux de ses Disciples qui ont beaucoup travaillé sur les nerfs, & dont un, nommé M. Asche, a donné sur les nerfs qui sont l'objet de ce Mémoire, une Dissertation que je n'ai pu me procurer. Il est si mince qu'il m'a souvent échappé; mais je l'ai vu trop distinctement sur des sujets de tout âge, pour pouvoir le révoquer en doute. Il se partage en plusieurs filamens d'une finesse extrême qui vont se jeter sur les parois du canal qui le contient & sur l'artère qui y est logée avec lui, & parmi lesquels il y en a toujours un ou deux qui se terminent dans le tronc de la première paire cervicale, à son passage entre la première & la seconde vertèbre du cou. Il

ſembleroit que M. Tarin auroit connu ces derniers filamens; mais la deſcription qu'il en donne, & même celle qu'il fait de la dixième paire en général eſt ſi ſuccincte & ſi peu exacte, qu'on ne voit pas clairement ce qu'il a voulu dire. Le filet dont il vient d'être parlé ne deſcend pas au-delà de la première vertèbre, & ne contribue en rien à la formation des nerfs cardiaques, comme on pourroit le préſumer d'après un paſſage du Traité *de motu cordis & anevriſmatibus* de Lanciſy. Quoique le nerf dont cet illuſtre Anatomiſte fait mention ſous le nom de *vertébral* ait quelque rapport avec lui, on ne peut certainement pas les confondre. On ne voit même pas trop ce que c'eſt que ce nerf vertébral, qui naît au-dedans du crâne près les nerfs de la dixième paire deſquels il reçoit différens filets, qui deſcend le long du canal où l'artère vertébrale eſt logée, & qui après avoir groſſi dans ce canal par l'union de pluſieurs filets que la moelle de l'épine lui fournit, ſort de deſſous la ſeptième vertèbre du cou, & ſe termine en un ganglion duquel viennent pluſieurs ramifications pour la veine-cave ſupérieure, le péricarde & la propre ſubſtance du cœur. Il naît un troiſième filet de la branche antérieure de la dixième paire, lorſque cette branche eſt parvenue au-devant de l'apophyſe tranſverſe de la première vertèbre, & ce filet qui eſt grêle & aſſez alongé, monte obliquement en dedans pour le muſcle petit droit antérieur de la tête. Le grand droit antérieur qui eſt ſitué plus intérieurement en reçoit un quatrième un peu plus gros & un peu plus long, qui s'y porte dans la même direction. Ces deux derniers paroiſſent ſouvent plutôt appartenir au rameau antérieur de la première paire cervicale, qui ſe jette dans la branche antérieure de la dixième paire, qu'à cette branche même; & quelquefois il y a une ſi grande confuſion parmi les nerfs aſſemblés en cet endroit, qu'on auroit toute la peine du monde à déterminer duquel d'entr'eux les filets dont il s'agit tirent leur origine.

La ſeconde des branches ou la branche poſtérieure de la dixième paire ſe porte obliquement en arrière & en haut. Elle ſe partage après environ quatre lignes de chemin en ſept

ou huit rameaux qui s'écartent les uns des autres en manière de rayons, & qui font, par leur épanouissement, une patte-d'oie assez semblable à celle de la branche supérieure de la portion dure de la septième paire. Ces rameaux vont gagner les parties du voisinage. Le premier monte vers le bord inférieur du muscle petit oblique ou oblique supérieur. Il passe bientôt au-dessous de ce muscle, & se perd à la partie postérieure & inférieure de l'apophyse mastoïde. Il m'a semblé voir plusieurs fois qu'il s'introduisoit dans la propre substance de cette apophyse, sans doute pour pénétrer dans les cavités qu'elle renferme, & se distribuer au périoste qui les tapisse; mais sa finesse & son peu de consistance m'ont empêché de le poursuivre comme je l'aurois desiré. Le second rameau accompagne le premier jusqu'au muscle petit oblique, auquel il donne un grand nombre de filamens. Je l'ai souvent trouvé double ou triple, de sorte que ce muscle recevoit une quantité prodigieuse de nerfs, eu égard à son peu de grosseur. Le troisième & le quatrième se portent dans une direction presque transversale derrière la partie moyenne & supérieure du muscle grand droit postérieur; le premier s'y termine entièrement par plusieurs ramifications fort fines qui se répandent dans ce muscle; le second traverse toute sa largeur en arrière, & s'enfonce ensuite dans le muscle petit droit situé beaucoup plus en dedans & plus profondément. Un cinquième rameau, qui est souvent double, & qui par sa direction & sa grosseur paroît être la continuation de la branche dont il part, se jette dans la partie moyenne du muscle grand complexus qui les recouvre tous. Il ne s'en sépare aucun filament pour le splenius qui est situé derrière le grand complexus, & qui lui est assez adhérent. Le sixième descend obliquement en arrière jusqu'au bord supérieur & à la partie moyenne du grand oblique ou oblique inférieur auquel il est entièrement destiné. Enfin le septième & le huitième ont à peu-près la même direction, & descendent derrière le muscle qui vient d'être nommé pour se terminer dans le tronc même de la première paire cervicale, lequel glisse le long

long du bord inférieur de ce muſcle, & pour monter enſuite ſur la région de l'occiput où il ſe diſtribue par un grand nombre de ramifications. Ces deux derniers rameaux ſont ſouvent de groſſeur fort inégale. J'ai trouvé des ſujets en qui ils s'enfonçoient dans l'épaiſſeur du grand oblique & paroiſſoient s'y terminer; mais ils ne faiſoient que le traverſer, & après lui avoir donné quelques filamens fort minces, ils alloient à leur deſtination ordinaire. Ce ſont ſans doute ces deux derniers rameaux dont M. Haller veut parler lorſqu'il dit avoir vu, mais par un travail difficile, la branche poſtérieure des nerfs de la dixième paire, faire avec celle de la première paire cervicale, une arcade ſemblable à l'anſe nerveuſe qui répond à la partie antérieure de l'apophyſe tranſverſe de la première vertèbre, & dont il a été parlé précédemment. Il eſt vrai qu'il y a des ſujets chez qui ces rameaux ſont ſi fins qu'on ne les pourſuit qu'avec peine juſqu'au bord inférieur du muſcle petit oblique; mais il s'en rencontre d'autres où on les trouve avec aſſez de facilité. Cet illuſtre Auteur & ſes Diſciples cités plus haut ſont les ſeuls qui en aient fait mention; encore ne paroiſſent-ils connoître qu'un de ces rameaux pendant que je les ai conſtamment trouvés tous les deux.

M. Winſlow a avancé que la partie ſupérieure de l'arcade formée par la branche antérieure des nerfs de la dixième paire, ou le ganglion même de ces nerfs, jetoit en haut un rameau conſidérable, qui groſſit d'abord par l'union d'un rameau court de la première paire cervicale, & qui monte en arrière ſur la ſommité de l'occiput, ſous le nom de nerf occipital, où il ſe diſtribue par pluſieurs ramifications, juſque ſur le ſommet & ſur les parties latérales de la tête. J'ai ſouvent cherché ce rameau, tant parmi ceux qui appartiennent à cette branche antérieure, que parmi ceux qui appartiennent à la poſtérieure, ſans rien apercevoir qui y eût le moindre rapport. Les nerfs qui montent ſur l'occiput & qui ſont fort gros, m'ont toujours paru procéder de la première & de la ſeconde paire cervicale. Ils ſont au nombre de deux. Le premier formé par la première paire dont il eſt la principale branche, gliſſe

en arrière, entre les apophyſes tranſverſes des deux premières vertèbres du cou, au-deſſous des muſcles acceſſoires du long dorſal & du ſacro-lombaire, de la portion ſupérieure de l'angulaire de l'omoplate, de la partie cervicale du ſplenius & des petit & grand complexus, & ſe porte entre ce dernier muſcle & le bord inférieur du grand oblique de la tête, juſque près l'apophyſe épineuſe de la ſeconde vertèbre du cou. Là, il perce obliquement l'épaiſſeur du *biventer cervicis* & de la partie la plus ſupérieure du trapèſe, pour monter ſur la partie moyenne de l'occipital. C'eſt ce premier nerf avec lequel les rameaux inférieurs de la branche poſtérieure de la dixième paire vont communiquer, après avoir paſſé derrière le grand oblique, & quelquefois après avoir traverſé l'épaiſſeur de ce muſcle. Le ſecond nerf eſt ſitué un peu plus bas & plus en dehors; il appartient à la ſeconde paire cervicale. Il paſſe entre les apophyſes tranſverſes de la ſeconde & de la troiſième vertèbre du cou, & ſous les muſcles ci-deſſus nommés, & perce enfin le complexus comme le précédent. Quelque attention que j'aie apportée à mes diſſections, je n'ai vu qu'une ſeule fois la branche poſtérieure de la dixième paire communiquer par un rameau de groſſeur médiocre avec le premier de ces nerfs, & s'unir avec lui pour former les nombreuſes ramifications qui ſe perdent ſur la partie poſtérieure, & juſque ſur le ſommet de la tête. Peut-être ce rameau a-t-il toujours lieu; mais ſi cela eſt, il faut qu'il ſoit d'une fineſſe bien prodigieuſe, puiſque je n'ai pu l'apercevoir ſur plus de dix ſujets où je l'ai cherché de ſuite, & que M. Haller n'a pas été plus heureux dans les recherches qu'il en a faites.

Les deux branches de la dixième paire ſont ſituées fort profondément, & ne peuvent être bien vues que par le procédé que voici. Il faut commencer par mettre la poſtérieure à nu, en enlevant les muſcles trapèſe & ſplenius qui ſeront détachés de l'occipital & des apophyſes épineuſes des vertèbres du cou, à la manière ordinaire, ou, ce qui revient au même, de dedans en dehors. On lèvera enſuite le petit complexus & une partie du grand, dans un ſens

contraire, c'eſt-à-dire de dehors en dedans, puis on ira chercher la branche dont il s'agit, dans la partie la plus profonde de l'angle que les muſcles petit & grand oblique de la tête forment à leur inſertion, à l'endroit de l'apophyſe tranſverſe de la première vertèbre. On ſe procurera plus de facilité, ſi on détruit la partie de ces muſcles qui eſt fixée à cette apophyſe, & l'on aura en même temps l'avantage de voir le tronc des nerfs de la dixième paire & leur branche antérieure qui gliſſe derrière & ſous l'artère vertébrale, comme il a été dit plus haut. Pour ſuivre cette ſeconde branche, il faudra ſéparer le petit droit latéral de la tête d'avec la même apophyſe tranſverſe, briſer & emporter cette apophyſe, couper en travers l'artère vertébrale à la ſortie du canal qui la renferme, & ſcier l'extrémité de l'apophyſe maſtoïde. Mais on ne pourra la conduire juſqu'au lieu où elle ſe termine dans le tronc de la huitième paire, dans celui de la neuvième, & dans le ganglion ſupérieur de l'intercoſtal, qu'autant que l'on aura mis à découvert tous ces nerfs par le retranchement de la branche de la mâchoire inférieure, du muſcle digaſtrique, de ceux qui prennent naiſſance à l'apophyſe ſtyloïde, & même de la partie ſupérieure de la carotide & de la veine jugulaire interne.

Ce que j'ai dit dans le cours de ce Mémoire, montre que les nerfs de la dixième paire ont plus de reſſemblance avec ceux de la moelle de l'épine, qu'avec les nerfs de la moelle alongée. En effet, ils naiſſent hors du crâne; ils ſont quelquefois formés à leur origine de deux faiſceaux nerveux; ils paſſent entre la première vertèbre du cou & l'occipital, & non pas à travers une des ouvertures pratiquées dans l'épaiſſeur du crâne; enfin ils ſe perdent en entier dans les petits muſcles antérieurs & poſtérieurs de la tête, ſi on en excepte les rameaux par leſquels ils communiquent avec la huitième paire, la neuvième, le grand nerf intercoſtal, & ſur-tout avec la première paire cervicale, & quelques autres très-fins, dont je n'ai pas fait une mention expreſſe, parce qu'ils n'ont rien de régulier, & que de la branche antérieure de ces

nerfs, d'où ils partent, ils vont ſe répandre dans les graiſſes du voiſinage & ſur les ligamens qui entourent de chaque côté l'articulation de l'occipital avec les apophyſes articulaires ſupérieures de la première vertèbre du cou. Cependant comme il y a beaucoup de ſujets chez qui ces nerfs n'ont à leur principe qu'un ſeul faiſceau de fibres, & que le nom ſous lequel on les déſigne, eſt conſacré par l'uſage, on peut le leur conſerver, pourvu qu'en les décrivant, on ait ſoin de rectifier par une expoſition exacte de la manière la plus ordinaire dont ils prennent naiſſance, & par celle de leur diſtribution, les idées fauſſes que ce nom pourroit en donner.

VOYAGE SOUTERRAIN

OU

DESCRIPTION des Grottes de Lombrive & de Bedeilhac, dans le pays de Foix; du Minier des Indes près Arles en Rouſſillon; du Minier de Sournia en Languedoc, & de Saint-Dominique aux environs de Caſtres dans la même province; avec des Remarques ſur les Priapolites qu'on trouve au voiſinage de cette dernière Grotte.

Par M. MARCORELLE, de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Toulouſe, & Correſpondant de l'Académie.

TOUT le monde ſait que les grottes ſont des cavernes, des creux, des eſpaces vides qui ſe rencontrent dans le ſein de la terre, & principalement dans l'intérieur des montagnes. On attribue leur formation à celle même du globe que nous habitons, ou au changement qui y eſt ſurvenu dans le temps du Déluge, ou à divers bouleverſemens cauſés ſoit par des feux ſouterrains, ſoit par les eaux qui en pénétrant au travers des montagnes & des rochers, ont entraîné la terre & le ſable qui leur ont préſenté le moins de réſiſtance; elles peuvent avoir été produites encore par les variations continuelles qu'éprouvent les êtres matériels, par des révolutions auxquelles les loix de la Nature les aſſujettiſſent, & par des changemens particuliers qui quoique l'effet d'une cauſe inſenſible, deviennent cependant très-grands après une longue ſuite d'années; mais comme on ne ſauroit former là-deſſus que des conjectures, je ne m'y arrête pas davantage.

Les grottes du royaume & des pays étrangers entrent dans le dessein d'une Histoire naturelle, & en font partie. Aussi l'Académie recueille-t-elle avec soin les descriptions qui lui en sont présentées *(a)*. Mais dans celles qu'on lit dans les Volumes qu'elle publie chaque année, il n'est fait aucune mention des grottes de Lombrive & de Bedeilhac dans le pays de Foix, du minier des Indes en Roussillon, du minier de Sournia en Languedoc, & de Saint-Dominique aux environs de Castres dans la même province. Elles mériteroient cependant, à raison de leur grandeur & des singularités qu'elles offrent, d'avoir autant de célébrité que bien d'autres. Je vais essayer de crayonner dans ce Mémoire l'esquisse des principaux traits des grands tableaux de ces grottes.

ARTICLE PREMIER.

Grottes de Lombrive, dans le pays de Foix.

LA montagne de Lombrive, remplie de rochers, de pierre calcaire fort dure, est à demi-quart de lieue & au midi de Tarascon en Foix; elle renferme dans son sein plusieurs grottes qui communiquent entr'elles, & dont les unes sont au-dessus des autres. Pour y parvenir, il faut passer par un sentier escarpé & plein de cailloux. Comme ils sont mouvans, ils roulent sous les pieds & rendent pénible & difficile l'accès

(a) Il est parlé, dans les Memoires de l'Académie, de plusieurs grottes; de celles de Besançon, *Anciens Mém. tome II, page 2; Histoire de 1712, pages 92 & suiv. Histoire de 1726, page 16; Savans étrangers, tome I.er, page 195:* de la Balme, *Histoire de 1700, page 3; Savans étrang. tome II, page 149:* de Saint-Pons, *Observ. d'Histoire naturelle;* Suite des *Mém. de 1740, page 217:* d'Arcy, de Caumont, de Villecrose, de Barjols, des Sévennes, de Vésoul, *année 1754, Mémoires, pages 132 & suiv.* de Roquefort, de Cornus, de Fodamente, de Saint-Baulize, de Coterouge, d'Alric, de Senones, *Savans étrang. tome III, page 591 & suiv.* de Soligno en Italie, *Histoire de 1771, page 14:* de Pouzols près de Naples, *année 1745; Hist. page 16, année 1750; Mémoires, page 68, année 1757; Mémoires, page 370:* de Stirie en Allemagne, *année 1754, Mémoires, page 158:* d'Antiparos dans l'Archipel, *année 1702, Mémoires, page 229:* du Labyrinthe de Candie, *ann. 1702, Mémoires, page 217, &c.*

de ces grottes. L'entrée eſt une ouverture irrégulière de 32 pieds de hauteur & de 96 de largeur.

A la diſtance de 200 pieds de l'entrée, on trouve à main droite une vaſte ſalle de 800 pieds de longueur ſur 80 pieds de largeur, qui a une ſortie au levant; le ſol eſt uni en certains endroits, raboteux & plein de concrétions dans d'autres. Les parois qui forment des portions de cercles ſont tantôt du rocher nu, tantôt du rocher couvert d'incruſtations. Le plafond eſt voûté en berceau, on y voit beaucoup de ſtalactites.

L'eau qui ſuinte à travers les rochers de la grotte, & qui en diſtille goutte à goutte, produit ſans doute ces concrétions; en traverſant les rochers, elle doit néceſſairement détacher des particules de pierre qui ſont la matière du ſpath, les entraîner avec elle & les dépoſer dans ſa route: là ces particules s'amaſſent d'abord en pointe, & puis en manière de tuyaux par l'appoſition à pluſieurs repriſes du ſédiment pierreux à ſon extrémité. Ces tuyaux s'alongent & s'épaiſſiſſent enſuite par les différentes couches que l'eau amène ſucceſſivement l'une ſur l'autre, & forment ainſi les ſtalactites, les incruſtations qu'on voit au plafond & aux parois; ſouvent l'eau en paſſant lentement dans les ſciſſures des rochers, n'y laiſſe pas toutes les molécules de la matière ſolide dont elle s'eſt chargée, elle en emporte des parties, & en tombant ſur le ſol immédiatement au-deſſous de chaque ſtalactite elle s'y dépoſe; ces dépôts ſucceſſifs s'épaiſſiſſent après l'évaporation de l'eau, & produiſent les concrétions, les éminences, les boſſes qui ſont au ſol de la grotte. Ces éminences & ces boſſes ſont plus ou moins groſſes, ſuivant que les ſtalactites auxquelles elles répondent ſont plus ou moins grandes & qu'il ſe diſtribue ſur leur ſurface convexe plus ou moins de ſuc pierreux. La manière dont ſe forment en général les ſtalactites eſt ſi bien développée & ſi clairement expliquée dans les ſavans Mémoires donnés par M.[rs] Daubenton & Guettard, dans le volume de l'Académie pour l'année 1754, qu'il ſeroit ſuperflu & même téméraire de traiter après eux cette matière;

il suffit de dire que la Nature toujours semblable à elle-même, agit dans les mêmes cas par les mêmes principes, & qu'elle suit ceux exposés par ces deux célèbres Académiciens dans la formation des stalactites de la grotte de Lombrive.

Leur figure y varie à l'infini. Si on veut laisser agir l'imagination, ces stalactites représentent, comme celles des autres grottes, des tuyaux d'orgue, des culs-de-lampe, des tombeaux, des draperies, des piliers, des pyramides, des colonnes, des fleurs, des fruits, des arbrisseaux, &c. mais sans m'occuper de la bizarrerie de leurs formes, je me contente d'exposer les remarques auxquelles a donné lieu leur examen.

Parmi les stalactites de la première salle des grottes de Lombrive, il y en a de grises & d'autres blanches; la surface de quelques-unes est unie, polie, & celle de quelques autres chagrinée & remplie de petites éminences: ces variétés viennent sans doute des différentes matières dont sont composées les stalactites; elles tiennent plus ou moins de la nature & de la qualité des unes & des autres de ces matières, selon les différentes proportions & combinaisons dans lesquelles sont faits leurs mélanges dans l'eau qui est l'agent de leur formation.

Au sol de cette grotte, on trouve en certains endroits des élévations, des bosses, & en d'autres des enfoncemens, des creux. Ici il y a des congélations faites des différentes couches concentriques qui ressemblent, par leur forme & leur blancheur à des mamelles qui ont au milieu un bout pointu & un peu humide; là, & principalement au fond de la salle, on voit un nombre infini de colonnes blanches, de différente hauteur & de différente grosseur; il y en a qui ont 4, 5, 6, 7 & 8 pieds de hauteur, sur 1, 2, 3, 4 & 5 pieds de diamètre, & d'autres qui s'élèvent jusqu'à la voûte: ces colonnes se touchent par leurs bases, mais leurs sommets sont très-distincts; en en cassant, on s'aperçoit aisément que leur section est oblique & qu'elles sont faites par couches à différentes reprises par les chutes successives de l'eau.

Les parois de la grotte offrent des variétés sans nombre, on y voit des masses de la matière du spath dont sont faites les

les ſtalactites: ces maſſes de différente épaiſſeur ſont preſque toutes adhérentes au rocher, il en eſt pourtant qui en ſont un peu éloignées; les unes ſont plates, unies, liſſes; les autres ondées, pliſſées & luiſantes: l'inégalité & la courbure des parois ne contribuent pas peu à faire prendre aux ſtalactites qui s'y forment des figures différentes & irrégulièrement contournées; tantôt ce ſont des congélations, qui, à raiſon de leur pente, ſemblent des caſcades, tantôt elles imitent des grapes de raiſin, des pierres de différente groſſeur & de différente forme, tantôt elles repréſentent des rideaux, des broderies d'ornemens, d'architecture, produits par les dépreſſions que l'eau laiſſe en s'évaporant.

Les ſtalactites qui pendent de la voûte en manière de glaçons, paroiſſent des pyramides renverſées; pour l'ordinaire elles ſont creuſées par le milieu dans toute leur longueur & forment des tuyaux plus ou moins gros, plus ou moins longs; il y en a qui deſcendent de la voûte juſqu'à terre, & d'autres qui n'atteignent pas le ſol; ces ſtalactites ſont sèches à leur ſurface, & ce n'eſt qu'à la pointe d'où découle la goutte d'eau qu'on y trouve de l'humidité; il en eſt dont les tuyaux ſe ſont obſtrués & remplis, celles-là ſont ſolides: ces différences ſont vraiſemblablement occaſionnées par la différente poſition de l'orifice du canal des ſtalactites dans le rocher.

Dans la même ſalle où ſont les ſtalactites dont on vient de parler, on trouve à main droite de l'entrée & à la diſtance de 227 pieds, une ouverture arquée; cette ouverture conduit à une galerie voûtée de 840 pieds de longueur, la largeur & la hauteur ne ſont pas par-tout les mêmes; la largeur qui à l'entrée eſt de 30 pieds, n'eſt plus vèrs la fin que de 12 pieds; la hauteur eſt d'abord de 10 pieds, mais elle diminue peu à peu, parce que le terrein va en montant; elle devient ſi petite à l'extrémité de la galerie, que l'on a de la peine à s'y gliſſer: on eſt obligé de ramper ſur le ventre & de garder cette ſituation incommode durant l'eſpace de 40 pieds.

En ſortant de ce pénible défilé, on ſe trouve dans une

ſeconde ſalle dont la longueur eſt de 200 pieds, & la largeur de 80 pieds, la voûte en eſt fort élevée: cette ſalle n'offre rien de remarquable; on y voit à main droite une ouverture par où l'on entre dans une galerie de 50 pieds de longueur & qui va toujours en montant; on la parcourt avec moins de peine que la première.

Au bout de cette galerie ſe préſente un vaſte banc de rochers de 224 pieds de hauteur, qui ſemble barrer abſolument tout paſſage: ces rochers ſont revêtus d'une quantité innombrable de congélations de différentes formes & d'une couleur rouſſâtre; il eſt à préſumer que ces congélations ſe ſont étendues inſenſiblement dans cet endroit, & qu'en s'étendant elles ſe ſont touchées les unes les autres, n'ont fait qu'une même maſſe & ont bouché par la ſuite des temps les iſſues & les paſſages qui étoient entre ces rochers.

Les ſalles & les galeries qu'on vient de décrire, peuvent être conſidérées comme le rez-de-chauſſée du grand édifice que la Nature a conſtruit dans la montagne de Lombrive; celles qui ſont au-deſſus compoſent l'appartement du premier étage, & le banc de rocher couvert de congélations eſt l'eſcalier qui y conduit.

On le monte en partie en graviſſant ces rochers eſcarpés, & en partie, au moyen d'une échelle à main dont on ſe ſert à pluſieurs repriſes; quelquefois on eſt obligé de l'établir ſur des pointes aiguës de rocher, ſans qu'on puiſſe l'aſſujettir ſolidement: en montant on aperçoit de tous côtés d'affreux précipices dont la vue excite la plus grande frayeur; l'obſcurité de ces lieux qu'on ne viſite qu'à la lueur des flambeaux, aide beaucoup à l'augmenter.

Après avoir franchi cette route ſcabreuſe & périlleuſe, on ſe trouve au ſommet du rocher; là deux appartemens s'offrent à la vue; celui de la droite n'a qu'une ſeule pièce, c'eſt un ſalon voûté qui a 100 pieds de longueur & 33 pieds de largeur: le ſol eſt d'un ſable blanchâtre & durci; on y trouve des enfonçures & des rehauſſemens: ces inégalités produiſent

des figures qui imitent en quelque ſorte les compartimens d'un parterre.

L'appartement de la gauche eſt compoſé de pluſieurs pièces: d'abord, c'eſt un ſalon qui a 300 pieds de longueur & 27 pieds de largeur; il eſt voûté comme le précédent, & le fond eſt auſſi d'un ſable blanc qui s'eſt durci avec le temps; il y a de l'eau en certains endroits: la voûte & le ſol des autres ſalles étant à peu-près les mêmes, je me bornerai à rapporter les meſures qui ont été priſes.

De ce ſalon on paſſe, en ſe tournant à droite, dans une ſalle de 100 pieds de longueur & de 24 de largeur. Il y a plus de chauve-ſouris dans cette ſalle que dans les autres, elles ſe logent dans les creux des rochers qui forment la voûte.

Du même ſalon, en ſe tournant à gauche, on entre dans une autre ſalle de 650 pieds de longueur, & 30 de largeur, on y fait remarquer un écho aſſez fidèle.

Cette dernière ſalle conduit à une autre qui a 112 pieds de longueur & 33 pieds de largeur; le ſol n'eſt qu'un baſſin rempli d'une eau claire, fraîche & bonne à boire: comme il y a par-tout 8 pouces d'eau, on ne peut y marcher ſans ſe mouiller les pieds; on pourroit appeler cette grotte la ſalle des bains.

Celle qui ſuit eſt remarquable par ſa grandeur; elle a 1500 pieds de longueur, & 33 pieds de largeur; cette ſalle communique à deux autres, & forme avec elles la figure d'une croix.

Celle qui eſt à droite a 100 pieds de longueur & 33 pieds de largeur, elle eſt terminée par un abîme.

La ſalle qui eſt à gauche a 510 pieds de longueur & 33 pieds de largeur, c'eſt la moins élevée de toutes; ſa hauteur n'eſt que de 10 pieds; la voûte eſt formée par des pierres de marbre de différente couleur.

L'air eſt tempéré dans les grottes de la montagne de Lombrive; le mercure du thermomètre de M. de Reaumur, qui, expoſé à l'air extérieur, étoit au 21.^{e} degré au-deſſus de la glace,

descendit au 9.e degré au-dessus du même terme dans les grottes inférieures, & au 12.e degré dans les grottes supérieures; la liqueur n'éprouva pas de variations fort sensibles pendant le temps de la visite de ces grottes.

ARTICLE DEUXIÈME.

Grottes de Bedeilhac, dans le pays de Foix.

NON loin des grottes de Lombrive sont celles de Bedeilhac; leur situation est près du village de ce nom & à demi-lieue de Tarascon en Foix: l'entrée de ces grottes qui est au nord, est une voûte surbaissée, de 109 pieds de largeur, & de 52 pieds de hauteur; la voûte s'élève à mesure qu'on avance dans la grotte, elle est revêtue de stalactites & de concrétions pierreuses qui offrent aux yeux une infinité de figures bizarres, singulières, & que l'imagination prévenue rend peut-être encore plus merveilleuses; le spectacle qu'elles présentent est pourtant frappant & propre à exciter la surprise.

A la distance de 65 pieds de l'entrée de cette grotte, on passe dans une salle qui a au midi une autre issue extérieure également voûtée, dont la hauteur est de 16 pieds, & la largeur de 27 pieds; cette salle a 600 pieds de longueur & 40 pieds de largeur: on n'y trouve aucun objet capable de fixer l'attention.

De cette salle, on entre dans une galerie longue de 560 pieds, qui conduit à une autre salle voûtée comme la précédente; on admire dans cette dernière salle une grande masse de pétrifications qui a la forme d'un tombeau; aussi la nomme-t-on *le tombeau de Rolland*, & on débite mille fables à ce sujet: ce tombeau est placé à la partie la plus large de la salle qui est de 230 pieds; la plus grande hauteur est de 36 pieds.

Dans la même salle & à 200 pieds du tombeau de Rolland, on remarque un gros pilier, & au côté gauche de ce pilier, un grand nombre de colonnes qu'on appelle *le jeu d'orgues;* c'est sans doute à cause de leur ressemblance avec les tuyaux

de cet inſtrument; lorſqu'on frappe ſur ces colonnes, elles rendent un ſon à peu-près ſemblable à celui que rendent des pierres creuſes ſur leſquelles on heurte, ce ſon n'eſt pas celui de l'orgue.

En continuant de marcher, & après avoir parcouru un autre eſpace de 400 pieds, on trouve dans la même ſalle qui n'a alors que 130 pieds de largeur, un gros pilier dont la circonférence eſt de 36 pieds; aſſez près de ce pilier, eſt une maſſe de pétrifications qui n'a aucune figure déterminée.

Cette ſalle dans laquelle on marche encore 400 pieds, eſt terminée par une belle colonnade compoſée d'une infinité de gros piliers qui ſemblent ſoutenir la voûte; ils ſont rangés dans la largeur de la ſalle, & y rempliſſent une étendue de 80 pieds; ils ſemblent être l'ouvrage de l'art plutôt que celui de la Nature; & on ſeroit tenté de croire qu'ils y ont été rapportés de deſſein pour orner ce lieu & lui ſervir de décoration.

Entre ces piliers, il y a pluſieurs paſſages qui conduiſent à une ſalle qui eſt derrière, & dont la largeur eſt de 200 pieds; on voit dans cette ſalle, la dernière de celles de la grotte, deux pyramides, l'une à droite qui eſt petite, & l'autre à gauche qui eſt la plus grande de toutes; elle a 82 pieds de circonférence.

Au fond de la grotte de Bedeilhac eſt un ruiſſeau d'une eau claire & limpide; après avoir coulé dans la grotte & y avoir parcouru une étendue de 60 pieds, il ſe perd ſous terre: de la même grotte on tire une terre glaiſe propre à ôter les taches d'huile; les gens du pays s'en ſervent pour les enlever & dégraiſſer leurs habits.

La température des grottes de Bedeilhac eſt à-peu-près la même que celle des grottes de Lombrive: le mercure du thermomètre, gradué ſelon la méthode de M. de Reaumur, y deſcendit au 8.e degré au-deſſus de la glace, tandis qu'étant expoſé à l'air libre, il étoit au 20.e degré au-deſſus du même terme.

Ce qui a été dit des ſtalactites, de leur différente longueur

& de leur différente groſſeur, fait aſſez voir qu'elles s'accroiſſent journellement, & qu'elles s'étendent au point d'occuper de grands eſpaces dans les grottes qui auparavant étoient vides. Il y a lieu de croire qu'elles parviendroient à remplir entièrement ces eſpaces, ſi l'eau y charioit aſſez de matière pour opérer cet effet. Pluſieurs Naturaliſtes, du nombre deſquels eſt M. Daubenton, penſent qu'alors ces grottes ſeroient changées en carrières d'albâtre ; les piliers & les maſſes énormes des ſtalactites qui ſont dans celles de Lombrive & de Bedeilhac, ſemblent favoriſer cette opinion. Je fis détacher des morceaux d'une des maſſes de la grotte de Bedeilhac; je les emportai pour les faire polir & les comparer à une pièce d'albâtre.

C'étoit une table ovale de 3 pieds de longueur, de 22 pouces de largeur & 20 lignes d'épaiſſeur; elle étoit dans la maiſon d'un particulier de Toulouſe, depuis environ deux ſiècles; elle avoit été donnée à un de ſes aïeux par un Procureur général du Parlement de cette ville qui la tenoit d'un Ambaſſadeur de France à Rome: ſon épaiſſeur permettant qu'on la ſciât par le milieu dans toute ſa longueur, j'en fis faire deux tables qui ſont actuellement dans mon cabinet.

Cet albâtre a les caractères qui peuvent le faire reconnoître pour tel; ſon poli eſt gras & moins vif que celui du marbre; il a une demi-tranſparence; ſes veines ſont dirigées en ondes, s'anaſtomoſent entr'elles, & font un tout uni & compacte: elles ſont contournées de différentes manières, préſentent de belles taches en forme de plis concentriques, & offrent une couleur tantôt rouſſâtre, tantôt blanchâtre, tantôt griſâtre: la couleur rouſſâtre un peu obſcure eſt pourtant la dominante. En ſciant cet albâtre, on y a trouvé des vides entre les couches qu'on a bouché avec la même matière ; des marbriers Italiens lui donnent le nom d'*albaſtro fiorito.*

Après en avoir fait faire deux tables à la mode, il en eſt reſté des morceaux ſur leſquels j'ai fait quelques épreuves; le réſultat a été qu'ils ont fait effervescence avec l'eau-forte, & qu'ils ſe ſont réduits en chaux par la calcination; il en a

été de même des morceaux de la maſſe de la grotte de Bedeilhac; loin de ſe vitrifier, ils ſe ſont convertis en chaux & ont fait effervescence avec l'eau-forte; leur effervescence étoit pourtant moins grande & moins longue que celle des morceaux d'albâtre: après avoir poli ceux de la grotte de Bedeilhac, on reconnut que leurs parties étoient plus groſſières, moins tranſparentes que celles de l'albâtre auquel on les comparoit; on reconnut encore que leur poli, quoique gras & terne, avoit moins de fineſſe. Ces obſervations viennent à l'appui du ſentiment de M. Daubenton, ſur la formation de l'albâtre.

Dans la même chaîne des montagnes du pays de Foix où ſont les grottes de Lombrive & de Bedeilhac, & aſſez près de ces grottes eſt la mine de fer de Gudanes, dont M. de Reaumur a donné la deſcription dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1718. J'ai dans mon cabinet d'Hiſtoire naturelle, un morceau tiré de cette mine; il eſt incruſté par-dehors d'une eſpèce d'émail dur, poli, luiſant & noir comme du jais; l'intérieur ne diffère point pour la couleur, la forme & la matière des morceaux des autres mines; les rayons de la croûte émaillée ſont dirigés vers cette matière comme vers leur centre: on voit à la ſuperficie de cette couche d'émail, quelques inégalités relevées en boſſe, plus larges & plus épaiſſes en certains endroits qu'en d'autres: ces inégalités pareillement noires, ſont pourtant mêlées de quelques particules d'une matière rouſſâtre, telle qu'on en trouve dans l'intérieur; ce qui prouve bien que ce morceau de mine n'eſt pas l'ouvrage de l'art. Il me paroît ſemblable à celui qui fut envoyé à S. A. R. M.^{gr} le Duc d'Orléans, Régent du Royaume, & à celui que M. le Monnier, Médecin, a trouvé à la mine de Lapinoze, dans la montagne de Batere en Rouſſillon, & qu'il a décrit dans ſes Obſervations d'Hiſtoire naturelle faites dans les Provinces méridionales de la France en 1739.

Suivant M. de Reaumur, l'émail de ces morceaux de mine a dû être formé de la même matière du criſtal, mais imprégnée

des particules de fer dissoutes par l'eau. Ce célèbre Académicien infère de-là que la formation des mines de fer est la même que celle des stalactites, que lorsque l'eau charie une matière ferrugineuse, elle produit des mines de fer, & que lorsqu'elle est chargée d'une matière pierreuse ou cristalline, elle produit des stalactites.

Les morceaux des mines de Gudanes & de la Pinoze, & ceux des stalactites des grottes de Lombrive & de Bedeilhac, semblent fortifier ces conjectures; les uns & les autres ont le même pays natal, sont formés dans la même chaîne des montagnes des Pyrénées, dans les cavernes de ces montagnes où l'eau arrive en petite quantité, où elle tombe goutte à goutte, & où son cours dure long-temps; ils sont faits par l'addition successive des nouvelles parties & disposés par couches d'une forme orbiculaire bien marquée; ils ont la même direction, le même arrangement, & n'ont d'autre distinction que celle de leurs noms, qu'ils tirent de la nature des matières dont ils sont composés. Plus il y a d'analogie & d'uniformité dans ces opérations de la Nature, & plus on est fondé à penser qu'elles sont faites sur les mêmes principes; aussi en examinant attentivement & avec soin la manière dont les stalactites se forment dans les grottes, & en analysant les eaux qui les produisent, il y a lieu de présumer qu'on parviendroit à connoître non-seulement leur formation, mais encore celle des cristaux, des pierres, des marbres, des albâtres, des minéraux & des autres corps qui leur sont analogues; mais cette connoissance ne sauroit être que le fruit d'une foule d'observations faites pendant une longue suite d'années.

ARTICLE TROISIÈME.

Grotte du Minier des Indes, près Arles en Roussillon.

UNE des plus belles grottes qu'on puisse voir est celle du minier des Indes. Il y avoit autrefois, si l'on en croit la tradition

tradition du pays, une mine de fer d'où elle a pris ſon nom; elle eſt dans une des montagnes des Pyrénées qu'on nomme *Batère*, & qui eſt voiſine de celle du Canigou: cette montagne renferme dans ſon ſein la mine de fer de la Pinoze, dont il a été parlé, & eſt couverte de gras pâturages; on y mène paître de France & d'Eſpagne beaucoup de chèvres & de moutons qui ont un goût exquis; leur laine eſt fine, d'une bonne qualité, & vaut celle d'Eſpagne. La grotte creuſée dans cette montagne eſt dans la paroiſſe de Corſevi, & à la diſtance d'environ trois lieues d'Arles en Rouſſillon; on ne peut la viſiter qu'avec le ſecours des flambeaux de poing; l'entrée qui a 120 pieds de longueur & 2 pieds de largeur eſt aſſez difficile, & il eſt des endroits où on ne peut aller qu'en rampant ſur le ventre. Il n'y a pas de pétrifications dans cette entrée; elle peut être regardée comme le veſtibule des belles chambres qu'on rencontre enſuite.

On en trouve deux à droite & cinq à gauche qui ſe communiquent entr'elles; les unes ont 2 toiſes de longueur ſur une de largeur; la longueur de quelques autres eſt de 4 toiſes, & leur largeur de 3 toiſes; toutes n'ont guère plus de 2 ou 3 pieds de hauteur: leurs voûtes ne ſont point ſoutenues par des piliers ni par d'autres ſupports qui puiſſent en empêcher l'écroulement; auſſi s'en détache-t-il quelquefois des parties. Quand on eſt dans ces chambres, on a ſur ſa tête environ 540 pieds de terre, & on entend le murmure des eaux qui coulent par-deſſus entre deux terres, ſans qu'on puiſſe en voir le cours; l'eau pourtant ſuinte toujours du plafond & des parois de ces grottes.

Les ſtalactites dont elles ſont garnies offrent un magnifique ſpectacle; celles des grottes de Lombrive & de Bedeilhac ne ſauroient leur être comparées; la matière qui forme ces dernières, quoique ſouvent claire & brillante, n'eſt pas à beaucoup près auſſi pure; ici elles ſont blanches, luiſantes & brillent comme le criſtal: toute la ſurface de ces grottes, la voûte & les parois en ſont tapiſſées, il y en a même ſur le ſol, qui eſt en partie de rochers & en partie de terre

glaiſe. Dans certains endroits il eſt couvert d'une grande nappe de ſpath ſemblable à une glace unie, & épaiſſe d'un ou de deux pouces; s'il étoit aiſé d'en détacher des pièces, on pourroit en faire des deſſus de commodes qui auroient l'épaiſſeur du marbre. Dans d'autres endroits du ſol, cette nappe de ſpath eſt variée par une quantité innombrable de figures irrégulières; & de la ſurface, il ſort des arbriſſeaux pareils à ceux qui pendent de la voûte & des parois.

Ces ſtalactites ont ordinairement pour baſe une plaque de la même matière dont elles ſont compoſées : de cette plaque ſortent différens troncs; leur longueur & leur groſſeur varient infiniment; il y en a qui ont demi-pied, 1 pied, 1 pied $\frac{1}{2}$, 2 pieds de longueur, ſur 6, 8, 10 lignes & 1 pouce de diamètre : il en eſt de plus longs & de plus gros, & d'autres qui le ſont moins. De ces troncs partent un grand nombre de branches de différentes longueur & groſſeur qui s'entrelaſſent entr'elles; les vides qu'elles laiſſent ſont remplis d'une infinité de petits rameaux vermiculaires qui naiſſent les uns des autres en tout ſens; il y en a qui ſont auſſi déliés & auſſi fins qu'un cheveu. La ſurface des troncs, des branches & des rameaux eſt hériſſée de petites pointes luiſantes qui, à les conſidérer de près, ſemblent être des pyramides de la même matière; les ſtalactites, ſous ce regard, reſſemblent aſſez à ces eſpèces de plantes qu'on voit dans un temps de gelée ſur les vitres des fenêtres ou aux ficoïdés chargés de glaçons; la matière ſeule dont elles ſont compoſées eſt un objet agréable à la vue, mais la beauté des formes ſous leſquelles elle ſe fait apercevoir, l'emporte de beaucoup ſur elle; ſon éclat eſt encore relevé par la lumière des flambeaux, qui étant réfléchie en même-temps du haut, du bas & des côtés, & renvoyée d'angle en angle parmi cette innombrable quantité de pointes luiſantes, préſente diverſes couleurs, & produit un effet ſurprenant.

J'ai déjà obſervé que ces ſtalactites ſont d'une couleur blanche; néanmoins après les avoir tirées de la grotte & expoſées à l'air extérieur, la couleur de leur ſurface ſe terni

un peu, & de blanche devient d'un gris-cendré, mais elles conservent dans leur intérieur toute leur blancheur; si on en casse, on remarque à leurs cassures que leurs parties forment des petits rayons qui partent d'un centre & aboutissent, en se divergeant, à une circonférence, & que ces rayons très-fins & très-multipliés sont d'un blanc brillant qui a quelque chose de gras comme celui du spath; leur dureté est assez grande; pour les casser, il faut employer une certaine force; elles se calcinent & se dissolvent dans les acides minéraux. On trouve pourtant dans la grotte, des stalactites d'une couleur terne, tirant même un peu sur le noir. On pense dans le pays que la fumée de la poudre à canon employée pour arracher d'un dur rocher du voisinage la mine qui y étoit enchâssée, & la poussière qu'a dû produire une telle opération, leur ont donné cette couleur; il est pourtant plus naturel de l'attribuer aux différentes substances dont elles sont composées, & aux différentes façons dont ces substances ont été déposées & arrangées.

Les stalactites des grottes du minier des Indes, sont qualifiées dans le pays, de *flos ferri*. La persuasion où l'on est qu'il y avoit autrefois dans ce lieu des mines de fer, les fait regarder comme une végétation de ce minéral; mais outre qu'on ne trouve pas actuellement dans ces grottes des mines de cette espèce, M. Guettard a fait voir, de la manière la plus évidente, que le *flos ferri* n'étoit pas une végétation de fer. Les preuves qu'il en a données sont si fortes, qu'elles détruisent pour toujours cette erreur.

Cependant les stalactites du minier des Indes en Roussillon, paroissent avoir les mêmes caractères du *flos ferri* de Styrie en Allemagne; comme celui-ci elles sont formées d'un spath à filets fins & déliés, très-beau & fort blanc; & la définition du *flos ferri* donnée par M. Guettard, qui est la plus exacte de toutes, & celle qui le caractérise le plus, leur convient & peut fort bien leur être appliquée; ce n'est que depuis peu qu'on les a découvertes; on en a envoyé à Paris & dans différentes villes des Provinces un grand nombre de groupes

qu'on voit dans plusieurs Cabinets : il y en a dans celui de l'Histoire Naturelle du Roi ; j'en ai un, dans le mien, de 1 pied 2 pouces de longueur & de largeur ; il jette en tout sens une quantité innombrable de branches de différentes hauteur & grosseur ; il est en petit la représentation d'une forêt épaisse remplie de broussailles ; ses ramifications sont si nombreuses, si variées, & se montrent sous tant de formes différentes, qu'il seroit presque impossible de le décrire. Le peu d'élévation des grottes où croissent ces stalactites, leur adhérence à la voûte, aux parois & au sol de ces grottes, & la situation gênée qu'on est obligé de garder lorsqu'on veut en détacher, empêchent d'en avoir de beaux groupes ; pour l'ordinaire, on les casse, on les réduit en petits morceaux, & ce n'est que très-difficilement qu'on peut s'en procurer de belles pièces ; il seroit à desirer qu'on élargît les ouvertures & les chemins de ces grottes.

L'air y est assez tempéré. Le mercure du thermomètre de M. de Reaumur, qui à l'air extérieur se tenoit au 29.^{e} degré au-dessus de la glace, étoit dans les grottes au 14.^{e} degré au-dessus du même terme.

A une certaine distance de la grotte du Minier des Indes, est la petite caverne d'En-pey : sa situation est près de Lafon, précipice affreux qui sépare la paroisse de Corsevi de celle de Montferré : elle est creusée dans un massif de rocher fort dur, d'une couleur roussâtre : l'eau naît au fond de cette caverne, & y est stagnante. On pourroit croire qu'elle forme & opère l'accroissement des rochers, en déposant successivement la matière dont ils sont composés : les cascades qu'ils représentent, & qui ne peuvent avoir été faites que par des dépôts successifs, semblent favoriser cette idée ; d'autres dépôts pourtant, faits par des eaux étrangères à la caverne, peuvent avoir contribué aussi à la formation des rochers dans lesquels elle est percée : on y trouve des stalactites, des pétrifications remarquables par leur grandeur & leur figure : pour l'ordinaire ce sont des pyramides triangulaires qui sont réunies & forment des groupes de différentes hauteur & épaisseur ;

quelquefois ces pyramides ſont ſéparées les unes des autres; lorſqu'elles ſont groupées dans un bloc, il en eſt dont on voit diſtinctement les trois faces, & qui ne tiennent que par leur baſe à la baſe commune; il en eſt d'autres dont on diſtingue ſeulement deux faces; la troiſième eſt appliquée à la face d'une autre pyramide qui la cache. Cependant toutes les faces ſont diſtinctes au ſommet de chaque pyramide; ſouvent il y a un grand nombre de petites pyramides adhérentes à chacune des faces extérieures des grandes pyramides, & qui leur ſont parfaitement ſemblables; leur figure eſt toûjours la même, non-ſeulement dans les maſſes conſidérables, mais dans chaque partie de ces maſſes. Il eſt évident qu'il doit réſulter différentes figures de la façon dont ces pyramides ſont unies & rangées entr'elles: celles qui ſont iſolées & qui ne ſont pas attachées à une baſe commune, offrent par rapport à la groſſeur, plus de variétés que celles qui ſont réunies. Ces ſtalactites ſont calcaires & de la nature du ſpath; ce ſpath même eſt criſtalliſé dans preſque toutes: jeté au feu, il pétille, & il ſaute par éclats lorſqu'on le calcine. Cela vient de ce que ce ſpath étant compoſé de lames appliquées les unes ſur les autres, l'air qui eſt renfermé entr'elles, les écarte quand il eſt dilaté par les parties de feu qui s'introduiſent entre ces lames: mis en diſſolution dans les acides, il y excite une efferveſcence, tandis qu'il n'en produit aucune dans l'eau commune. La réunion de ces propriétés démontre clairement que les ſtalactites de la grotte d'En-pey ſont véritablement calcaires & de la nature du ſpath.

ARTICLE QUATRIÈME.

Grotte du Minier de Sournia en Languedoc.

DES montagnes des Pyrénées où ſont les grottes dont on vient de donner la deſcription, ſe détachent d'autres montagnes appelées *Corbières*, qui en ſe joignant à celles des Sévennes & du Dauphiné, forment une chaîne continuelle qui lie les Pyrénées avec les Alpes: c'eſt dans une de ces

montagnes des Corbières qu'eſt la grotte du Minier de Sournia au diocèſe d'Aleth; elle eſt à demi-lieue & au levant du village de ce nom; elle a pris ſans doute le ſien d'une mine de fer qu'on trouve au côté oppoſé à ſon entrée: vis-à-vis eſt un coteau fort rapide couvert de vignes & d'oliviers. La grotte creuſée dans un rocher eſcarpé & aſſez élevé, eſt compoſée de pluſieurs rues ou galeries. On ne ſauroit mieux la repréſenter que par une montagne miſe en pièces à force de mines; les rochers en croulant & en tombant les uns ſur les autres, ont dû dans leur rencontre mutuelle former les cavernes dont on va donner les dimenſions.

Au-devant de la grotte eſt un veſtibule ouvert par en haut & fermé de tous les côtés par de gros rochers; il a 26 pieds de longueur, 12 de largeur moyenne & 10 pieds de profondeur; on ne peut y deſcendre qu'avec une échelle: ce veſtibule s'élargit à meſure qu'on avance dans la grotte.

L'entrée a 13 pieds de largeur & 10 de hauteur; les rochers qui la forment ſont nus en quelques endroits, & couverts dans d'autres de ſtalactites qui imitent des grappes de raiſin; il y a à la voûte une ouverture en forme d'un œil-de-bœuf, qui a 4 pieds en tout ſens; elle ſert à éclairer l'intérieur de la grotte.

En entrant, la première choſe qui ſe préſente eſt une chambre voûtée, de figure preſque ovale; elle a 16 pieds de longueur & 10 pieds de largeur; le plafond qui eſt à 8 pieds d'élévation du ſol, eſt coupé au milieu par une plate-bande chargée d'incruſtations qui ſemblent des ornemens d'architecture: ce plafond, ainſi que les côtés, ſont couverts de congélations infiniment variées: ici, ce ſont des maſſes pendantes comme des groſſes grappes de raiſin ſuſpendues à la voûte: là, ces maſſes ſont feſtonnées & forment diverſes repréſentations de feuilles, de fleurs & de fruits; on croit y voir des plantes, des coquilles, des morilles, des choux-fleurs. Ces congélations prennent différentes figures, ſelon la différente courbure des parois où elles ſont attachées; il en eſt qui d'un de leurs bouts ſont contiguës à un rocher,

atteignent de l'autre à un autre rocher assez éloigné du premier, & forment par cet arrangement des espèces de cabinets. Au côté droit de la chambre, il y en a un remarquable, à raison des belles stalactites qu'il renferme. Pendant le temps sec il n'y coule point d'eau, mais elle y pénètre à travers les rochers lorsque les pluies ont humecté la terre; la matière qu'elle y charie alors, sert à l'accroissement des stalactites dont il est revêtu: ces stalactites sont d'un bleu clair, tandis que celles de la chambre sont jaunâtres; néanmoins il y en a quelques-unes de blanches, & quelques autres de brunes tirant même sur le noir. Cette diversité de couleurs des stalactites provient vraisemblablement de la différente qualité des matières dont elles sont composées, & des différentes combinaisons que ces matières reçoivent entr'elles.

Cette chambre a trois ouvertures, une de chaque côté & la troisième au fond en face de l'entrée; celle qui est à gauche fait une saillie de deux pieds dans la chambre & la rend par-là irrégulière; elle conduit dans une rue dont l'entrée qui est à 3 pieds d'élévation du sol, a 6 pieds de longueur & autant de largeur; cette rue, qui n'a que 10 pieds de long, se rétrécit insensiblement, & n'a tout au plus vers le fond que 3 pieds de large & autant de haut. Les congélations du toit sont très-variées; quelques-unes sont formées de parties ondées, disposées en belle symétrie les unes sur les autres; il y en a qui imitent des plantes telles que la *branche-ursine*: on voit aux côtés des cylindres courts, unis, arrondis par le bout & creux, d'où découlent quelques gouttes d'une eau claire & sans goût; ces diverses congélations sont fragiles, cassantes & de couleur de safran. Comme cette rue & celle dont on va parler sont obscures, & que le jour n'y pénètre pas, on ne peut les visiter qu'avec des flambeaux.

L'ouverture du fond n'est séparée de celle du côté gauche que par des rochers qui font un angle rentrant dans la chambre, dont la pointe a deux pieds de face: cette ouverture, qui a 6 pieds de haut sur 6 de large, conduit à une autre rue; dès qu'on y est entré, on trouve un rocher qui

rétrécit extrêmement le paſſage & le rend difficile ; mais à la diſtance de 12 pieds de l'entrée, la rue eſt large & il eſt aiſé de la parcourir dans toute ſa longueur qui eſt de 60 pieds; l'élévation de la voûte au-deſſus du ſol eſt tantôt de 10 pieds, tantôt de 6 & tantôt de 4; le plafond & les côtés de cette rue ſont tapiſſés de concrétions plus grandes & mieux finies que celles des autres rues. Quelle variété infinie de beautés n'offrent-elles pas! Dans certains endroits elles ſont ſemblables à une grande glace étendue uniment par-deſſus; dans d'autres elles repréſentent une quantité innombrable de figures irrégulières, & ſur toute la ſurface, ce ſont des tartes au ſucre, des pralines, des choux-fleurs; ailleurs, où des rochers ſont aſſez ſaillans pour que les gouttes d'eau tombant de la voûte puiſſent y atteindre, il s'eſt formé ſur les parties avancées des concrétions qui, en s'étendant inſenſiblement, ſe ſont trouvées à une certaine diſtance du mur & ont figuré des eſpèces de niches, il y en a une aſſez régulière, dont l'étendue eſt d'environ une toiſe & demie; les ſtalactites qui la tapiſſent ſont dures, tandis que celles qu'on trouve dans la rue après avoir paſſé la niche, ſont tendres, friables & plus blanches que la neige; ces dernières ne repréſentent que des choux-fleurs. Au fond de la rue & au côté gauche, il y a un trou d'un pied en tout ſens d'où ſort un vent froid & aſſez fort pour éteindre une chandelle qu'on approche de l'ouverture; ce trou, orné de concrétions, paroît être le commencement d'une autre rue.

La troiſième ouverture du côté droit de la chambre a 5 pieds de hauteur ſur autant de largeur. Par cette ouverture on entre dans une ſeconde chambre qui a 10 pieds de long ſur 7 de large & 14 de hauteur; ſon ſol eſt élevé de 3 pieds au-deſſus de celui de la première chambre: cette pièce qui n'a rien de bien remarquable, préſente à ſon fond une grande ouverture, au côté gauche de laquelle eſt une congélation de la forme d'un cul-de-lampe qui pend du plafond; ce cul-de-lampe, qui a 4 pieds de circonférence, eſt orné dans toutes ſes faces d'une belle guirlande; de la même ouverture

ouverture partent cinq rues diſpoſées preſque en quinconce. On va les parcourir les unes après les autres, ſans trop s'arrêter dans chacune.

La première de ces rues a 60 pieds de longueur; le marcher y eſt aſſez difficile, parce qu'elle n'eſt pas large & que la voûte n'a que 3 pieds d'élévation; on trouve d'eſpace en eſpace des enfoncemens aux parois, faits par de grandes maſſes de roche qui avancent dans la rue & qui même ont des rebords coupans: ces enfoncemens forment de petits cabinets fort agréables; l'humidité de cette rue, qui à peine produit des gouttes d'eau, fait croître ſur les rochers une mouſſe verte, elle donne auſſi aux ſtalactites une couleur verdâtre; ces ſtalactites marquetées de taches blanches ſont courtes & moins belles que celles des autres galeries.

L'ouverture de la ſeconde rue eſt de 3 pieds; cette rue entièrement taillée dans le roc, n'a que 20 pieds de long; ſon plafond eſt revêtu de congélations unies & tortueuſes qui imitent des couleuvres; les premières couches de ces congélations ſont blanches & farineuſes; l'eau qui coule ſur le ſol par une pente aſſez rapide, le rend extrêmement gliſſant.

La troiſième rue n'a également que 20 pieds de long ſur 3 pieds de large, & autant de haut; elle eſt humide & obſcure comme les autres; les ſtalactites qu'on y voit forment une belle rocaille.

La quatrième rue eſt fort étroite, & il eſt pénible de la parcourir; elle a 36 pieds de longueur; une quantité immenſe de petits cylindres pendent de la voûte, & il y a quelques concrétions ſur les parois; on en remarque une à l'entrée qui eſt en forme de guirlande & qui ſert de couronne à un champ d'armorial qui n'a pas reçu les armes.

La cinquième rue eſt de 20 pieds de long; ſon plafond eſt ſuperbement orné de beaucoup de ſtalactites; quelques-unes ſont feſtonnées, & quelques autres repréſentent des ſalamandres; en général elles ſont courtes, un peu dures & d'un beau blanc.

Indépendamment de ces rues, il y en a d'autres au Minier de Sournia; cette montagne eſt percée d'un grand nombre de conduits ſouterrains, qui par mille tours & détours pris en tout ſens, & ſans aucune régularité, parcourent ſon intérieur: ſi on ne les a pas tous ſuivis, c'eſt qu'ils ne ſont pas encore aſſez connus, & qu'il eût été dangereux de s'y égarer; avant de s'engager dans ce dédale, il faut avoir le fil d'Ariane.

ARTICLE CINQUIÈME.

Grotte de S.^t^ Dominique, près Caſtres en Languedoc.

La grotte de S.^t^ Dominique eſt à la diſtance d'environ une lieue de Caſtres, & au nord-eſt de cette ville; ſa ſituation eſt au lieu de la Roquette, ainſi nommé à cauſe de la multitude de rochers qui y ſont tumultueuſement diſperſés: parmi ces rochers énormes, dont les angles extérieurs ſont arrondis, on en voit qui ſont rompus & diſloqués, pour ainſi dire, par quartiers, les uns inclinés à l'horizon, & les autres poſés dans une ſituation parallèle ſelon la nature & la diſpoſition des terres qui leur ſervent d'appui: ces rochers ſont cultivés, on y met par-deſſus une couche de terre de l'épaiſſeur de cinq à ſix pouces; on y plante enſuite des ceps de vigne, & bientôt après ils produiſent d'excellent vin. Indépendamment de cet avantage que l'on retire de ces rochers, on s'en ſert encore pour faire des meules de moulin, des auges & des pierres à foyer; on les emploie auſſi à la bâtiſſe à laquelle ils ſont très-propres à cauſe de la dureté de leur grain.

C'eſt parmi ces rochers, & au pied de la montagne ſur laquelle ils ſont diſperſés, qu'eſt la grotte de S.^t^ Dominique; elle a 28 pieds de longueur ſur 10 de largeur moyenne, & 15 pieds de hauteur: l'entrée eſt une ouverture irrégulière de 4 ou 5 pieds de hauteur ſur 3 ou 4 de largeur; elle eſt, comme l'on voit, fort baſſe, & pour y paſſer il faut ſe

courber; mais dans l'inſtant on peut ſe redreſſer & on s'y trouve au large; l'intérieur reſſemble à un ſalon aſſez vaſte; le deſſus qui eſt voûté en berceau & les parois ſont formés par des maſſes énormes de roche, dégarnies de terre, & qui ne ſe ſoutiennent entr'elles que par leur ſeul contact mutuel; on y voit clair par-tout à cauſe de deux ouvertures qui ſont à la voûte, & dont l'une eſt à droite & l'autre à gauche; le ſol qui eſt irrégulier & raboteux, eſt formé par des rochers entaſſés les uns ſur les autres, qui laiſſent entr'eux pluſieurs crevaſſes de 8 pieds de profondeur, entre leſquelles coule un ruiſſeau. On dit que cette grotte ſervoit d'aſile à S.t Dominique lors de la perſécution des Albigeois, & qu'il s'y réfugioit pour y inſtruire le peuple: on y fait voir encore une eſpèce de chaire, & ceux du pays y montrent comme un prodige un eſpèce de bénitier dans lequel il y a toujours de l'eau. Le merveilleux de ce dernier effet diſparoîtra lorſqu'on ſaura que l'eau découle de toutes parts dans cette grotte.

Au fond, il y a une ouverture ſemblable à-peu-près à celle qui eſt à l'entrée; par-là on pénètre dans des caves ſouterraines qui ont 7 à 800 toiſes de longueur ſur 10 à 12 toiſes de largeur, & environ 30 pieds de hauteur; comme elles ne reçoivent pas de jour, on ne peut les voir qu'avec le ſecours des flambeaux de poing; elles ſont formées par un tas de rochers qui ont preſque tous la figure d'un ſphéroïde alongé; ils ſont rangés de façon qu'ils forment une voûte qui paroît être l'effet de l'Art plutôt que celui de la Nature: ces rochers énormes, dont quelques-uns ont juſqu'à 2 toiſes de diamètre, ne ſont unis par aucun ciment; ils ſont au contraire dégarnis de tous les côtés, & ils ne ſe ſoutiennent que par leur contact: la chaîne qu'ils forment, vue en-dehors, eſt un ſpectacle qui frappe; elle ſuit la pente des montagnes qui ſont au voiſinage, & elle en imite ſenſiblement la chute: ſous ces voûtes qui s'élevent en s'éloignant de la grotte, coule un ruiſſeau qui fait un bruit aſſez conſidérable, & dont l'eau qui eſt en petite quantité, a aſſez de vîteſſe pour mettre en jeu des moulins à blé, voiſins de la grotte.

Parmi les rochers énormes qui ſont à la Roquette, il en eſt un plus élevé que les autres, & qui eſt célèbre dans le pays; on y débite qu'il tremble lorſque le moindre vent agit ſur lui ou qu'une légère force lui eſt communiquée, & qu'il reſte immobile ſi une plus grande lui eſt appliquée. Les obſervations que j'ai faites ſur ce rocher & que j'ai rapportées dans un autre Mémoire, m'ont mis à même d'établir quelles ſont les propriétés qu'il a réellement; dépouillé d'une partie de ſon merveilleux, il lui en reſte encore aſſez pour intéreſſer la curioſité.

ARTICLE SIXIÈME.

Remarques ſur les Priapolites qui ſont au voiſinage de la Grotte de Saint-Dominique.

Au voiſinage de la grotte de Saint-Dominique eſt un coteau ſitué à demi-lieue de Caſtres vers l'orient, où on trouve des pierres priapolites; on monte ſur ce coteau appelé *la Montagnette*, ou vulgairement, *la côte des Bichoux*, par une pente douce à l'extrémité de la plaine de *Biſeus.* Un vallon le ſépare à l'orient du coteau de *las Barrières*, & au midi de celui de *la Cantourne;* quoique le coteau de la Montagnette ſoit d'une petite étendue, le terrein qui eſt au midi eſt cependant d'une nature différente de celui qui eſt à l'orient; vers la Cantourne, c'eſt de la terre ou du roc fort mou, & vers las Barrières, un roc très-dur où ſont enchâſſées les pierres priapolites. Il ne m'a pas été poſſible d'en découvrir dans les fouilles que j'ai fait faire du côté du midi; celles que j'y ai aperçues à la ſuperficie pourroient bien y avoir été entraînées par les ravines ou jetées par les paſſans, on y a ſeulement trouvé des cailloux, tandis qu'on n'en voit pas du côté où ſont les priapolites. Il ſemble que ces différentes pierres ne peuvent ſe former ni exiſter dans le même lieu.

Le coteau de la Montagnette offre vers l'orient pluſieurs fentes ou fondrières de différentes profondeurs, formées par

la chute des eaux, il eſt inculte dans la longueur de 7 ou 800 pas; c'eſt dans cette étendue de terrein qu'eſt le rocher d'où on tire les priapolites; il eſt d'une pierre calcaire, fort dure & fort compacte, diſpoſé par couches & parſemé de points brillans; ſa couleur eſt d'un blanc ſale rouſſâtre. Les priapolites enchâſſées dans ce rocher y ſont ſituées de différentes manières & différemment entrelaſſées les unes avec les autres; leur longueur & leur groſſeur varient à l'infini; en général elles ſont d'une forme cylindrique: on remarque pourtant entr'elles des différences, il y en a qui ſont arrondies par les deux bouts, d'autres ont un de leur bout échancré; il en eſt d'elliptiques qu'on pourroit nommer *orchites*, pour les diſtinguer des cylindriques appelées *priapolites*. Les orchites ſont preſque toujours ſéparées des priapolites, & ce n'eſt guère que dans le roc qu'on peut voir les unes adhérentes aux autres: j'en ai fait détacher du rocher où cette union ſe rencontre aſſez bien, que j'ai placées dans mon cabinet. Il y a enfin de ces pierres qui ſont plates par-deſſous, arrondies par-deſſus & diviſées, par une ligne bien marquée, en deux parties égales.

De quelque figure que ſoient les priapolites, elles ſont toutes compoſées de pluſieurs couches parallèles de différente épaiſſeur, comme de 2 lignes, 1 ligne, $\frac{1}{2}$ ligne, $\frac{1}{3}$ de ligne, $\frac{1}{4}$ de ligne; leur couleur eſt d'un blanc ſale ſemblable à celle du roc dont on les tire; elles ſont dures, & pour les caſſer il faut les frapper aſſez fort: il y en a qui ſont dans une eſpèce de moule qui, quoique de la même nature que la pierre, eſt cependant beaucoup plus tendre; quand on frappe ſur quelques-unes de ces pierres, le moule ſe caſſe facilement; c'eſt-à-dire, que la première couche qui eſt ce que j'appelle le moule, cède ſans effort au coup qu'on lui donne, s'ouvre, éclate en pluſieurs parties, & laiſſe entrevoir la pierre qu'elle renferme. J'ai obſervé qu'il y avoit, entre ce moule & la pierre, quelque corps étranger, comme de la terre qui en empêchoit la liaiſon. Cette obſervation fait voir que ces couches n'ont pas été formées en même temps; que la pétrification de la première couche

appelée le moule, a été poſtérieure à celle des autres, & que par-là elle a acquis moins de conſiſtance & de dureté.

Preſque toutes ces pierres priapolites ont à leur centre & dans toute leur longueur une matière criſtalline qui leur ſert de noyau; elle eſt, pour ainſi dire, leur axe. La matière qui forme la pierre eſt diſpoſée en cercle & par couches parallèles ſur cette criſtalliſation pierreuſe; ce criſtal eſt raboteux, friable, & ſemble fait de pluſieurs petits grains joints enſemble: il n'occupe pas un eſpace égal dans toutes les pierres, & n'eſt pas non plus proportionné à leur groſſeur; ſon diamètre eſt tantôt la huitième partie, tantôt la ſixième, quelquefois le tiers ou la moitié de celui de la pierre. J'ai vu des priapolites dont le diamètre n'étoit que de 2 ou 3 lignes, dans leſquelles il y avoit cependant du criſtal, & d'autres auſſi groſſes que des melons, dont le noyau de criſtal n'étoit pas plus grand que celui des pierres qui n'avoient qu'environ 1 pouce de diamètre. J'ai trouvé des pierres dont le criſtal étoit creux.

Quelques priapolites ont pour noyau, du criſtal qui n'eſt pas bien pur & bien net; il eſt mêlé avec quelque matière rouſſâtre; d'autres ont pour noyau, au lieu de criſtal, une matière plâtreuſe; on en trouve quelquefois qui ont une couche de criſtal autour de cette matière.

Les autres pierres rondes ou plates dont j'ai parlé, ſont de la même nature & de la même couleur; elles ſont auſſi faites par couches, & ont pour noyau, du criſtal ou une matière rouſſâtre qui ſuit leur configuration.

Pour connoître la peſanteur des priapolites cylindriques, j'en ai peſé pluſieurs de différens poids. Il ſuit de ces peſées, 1.° que la peſanteur ſpécifique des pierres priapolites n'a aucun rapport avec leur grandeur; 2.° que cette peſanteur moyenne arithmétique eſt de 2,5823; 3.° que celle qui eſt déduite du poids total des pierres eſt de 2,5696, en ſorte que le pied cube pèſe environ 180 livres.

La différence de la peſanteur ſpécifique de ces pierres me fit penſer que la partie pierreuſe étoit d'une peſanteur différente de celle du criſtal, dont le volume n'a pas toujours

le même rapport au volume de la pierre; pour m'en aſſurer, je fis ſcier quatre de ces pierres, ſuivant leur longueur, en deux parties à peu-près égales; je peſai comme ci-devant chacune de ces moitiés, dont les deux enſemble pesèrent un peu moins que la pierre entière, à cauſe de ce qu'avoit emporté le trait de la ſcie. Je gardai par curioſité une moitié de chacune de ces pierres telle qu'elle étoit, & je les plaçai dans mon cabinet; je fis ôter le criſtal de l'autre moitié ſeulement, afin d'avoir la peſanteur ſpécifique d'où je puiſſe déduire celle du criſtal.

De diverſes épreuves que j'ai faites, il réſulte 1.° que la peſanteur ſpécifique de la partie pierreuſe eſt dans chaque pierre, plus grande que celle du criſtal; 2.° que la peſanteur moyenne de la partie pierreuſe eſt de 2,5935, & que la peſanteur moyenne du criſtal eſt de 2,1333.

Puiſque la gravité ſpécifique des priapolites excède celle de l'eſpèce de pierre ordinaire, la plus peſante & la plus homogène, il ſemble qu'en ſuivant les principes du fameux Boyle, on puiſſe conclure qu'elles contiennent quelque matière métallique. Les géodes tiennent preſque toujours un peu de la nature du minéral ferrugineux; les priapolites qui ont avec eux quelque analogie, pourroient auſſi tenir de la nature de quelque corps minéral, d'où on pourroit inférer qu'il ſeroit poſſible de les employer utilement dans la Médecine.

Les priapolites ſont des eſpèces de ſtalactites; comme elles, ces pierres ſont faites de couches parallèles, & l'eau eſt auſſi l'agent de leur formation; elles ſont les unes & les autres des concrétions formées par les matières que l'eau entraîne avec elle, & paroiſſent n'avoir d'autre diſtinction que celle que leur donnent ces matières. Les couches des priapolites ſont compoſées des grains de ſable unis par des dépôts continuels des ſucs ſalins & criſtallins, & des ſédimens que l'eau charie à pluſieurs repriſes. Il y a lieu de croire que les ſucs criſtallins ont été la première matière des priapolites; que ces ſucs entaſſés & durcis leur ont ſervi de noyau, & que les ſucs pétrifians ont coulé enſuite ſur eux, les ont pénétrés, ont

rempli leurs pores & ont lié leurs parties. De ce que les ſucs pétrifians ont coulé en différens temps ſur les ſucs criſtallins, qu'ils n'ont durci qu'à meſure qu'ils les couvroient & par intervalles, les couches qu'ils ont formées ont dû être diſtinctes & appliquées ſucceſſivement les unes ſur les autres; elles ont dû augmenter ainſi de volume, prendre une forme arrondie & former les priapolites. Si on en trouve quelquefois qui n'ont pas pour noyau une criſtalliſation pierreuſe, mais une matière tantôt blanchatre, tantôt rouſſâtre; ſi on en trouve enfin qui ont une couche de criſtal autour de cette matière; on ne doit vraiſemblablement attribuer cette bizarrerie qu'à la différente combinaiſon des ſucs criſtallins & pierreux, ou à un dérangement arrivé dans les couches.

De telles variétés ſervent à faire mieux ſentir le danger où on s'expoſeroit en pouſſant plus loin ces conjectures ſur la formation des pierres priapolites; il eſt de la ſageſſe d'attendre de nouvelles obſervations qui nous conduiront peut-être un jour à la découverte de ce ſecret de la Nature, que ſon Auteur couvre encore d'une nuit obſcure.

Caliginoſâ nocte premit Deus. Horace.

MÉMOIRE

MÉMOIRE
SUR QUELQUES PARTICULARITÉS DE LA STRUCTURE DU CERVEAU ET DE SES ENVELOPPES.

Par M. SABATIER.

QUOIQUE l'on ignore parfaitement l'usage du plus grand nombre des parties du cerveau, ce viscère a été de tout temps l'objet des recherches des Anatomistes, & ils en ont développé la structure d'une manière qui paroît ne laisser rien à desirer. Cependant lorsqu'on l'examine avec soin, on y trouve des choses qui leur ont échappé ou qu'ils n'ont pas décrites avec l'exactitude qu'elles méritoient. Ce sont ces particularités, dont les unes regardent le cerveau lui-même, & les autres ont rapport aux membranes qui le recouvrent, que je vais exposer dans ce Mémoire. J'espère que si elles ne répandent pas plus de jour sur les fonctions impénétrables de cet organe, elles serviront du moins à rendre son histoire plus complette.

Le corps calleux est une des parties les plus extérieures du cerveau. On l'aperçoitl lorsqu'après avoir enlevé la faux, on écarte ses deux hémisphères. Il se présente sous la forme d'une voûte de couleur blanche, située profondément dans leur intervalle, plus près de leur partie antérieure que de la postérieure, & qui les unit l'un à l'autre. Sa largeur qui n'est guère moindre que de huit à dix lignes, augmente un peu en arrière, & diminue sensiblement en avant. Les hémisphères du cerveau portent sur ses parties latérales, & le vide qui se trouve entr'eux & ce corps, forme une cavité alongée que l'on peut assez bien comparer à celles que présentent les sinus ou ventricules du larynx. Cette circonstance n'a été bien vue que par Vésale. Les termes dont il se sert pour l'exprimer,

en donnent une idée si nette, qu'elle auroit dû frapper tous ceux qui ont écrit depuis lui: *obſervantur*, dit-il, *utrinque ad corporis calloſi latera, ſecundùm ipſius longitudinem, ſinguli ſinus in cerebri ſubſtantiâ, inſtar profundioris lineæ inſculpti, ac cum ſuperiore corporis calloſi ſuperficie eò magis pateſcentes, quò cerebrum violentiùs, quaſi id ſurſum, in latera etiam acturus, ſejunxeris.*

On voit ſur le corps calleux pluſieurs lignes ſaillantes, dont les unes le traverſent d'avant en arrière, & les autres vont d'un de ſes côtés à l'autre. Les premières, au nombre de deux ſeulement, ſont beaucoup plus élevées que les ſecondes. Elles ſont placées au milieu, s'accompagnent réciproquement, & forment une eſpèce de raphé ou de ſuture qui le ſépare en deux parties égales. Ces lignes ne ſont pas parallèles dans toute la longueur du corps calleux; on les trouve ſouvent ſéparées en avant & en arrière, & rapprochées dans leur partie moyenne; plus ſouvent encore rapprochées en avant & écartées en arrière. Il eſt fort ordinaire qu'elles ſoient flexueuſes dans leur cours. Les autres lignes que préſente ce corps, ſont fort nombreuſes. Elles ſont toutes dans une direction tranſverſale, & vont ſans interruption de la partie droite à la partie gauche, en paſſant ſous les premières. La néceſſité d'expliquer comment la paralyſie & les mouvemens convulſifs, qui ſont la ſuite des léſions apparentes du cerveau, arrivent toujours à la partie du corps oppoſée à celle de ce viſcère qui a été bleſſée, a fait croire à quelques-uns, même contre le témoignage de leurs ſens, que ces lignes, quoique tranſverſales en apparence, étoient cependant obliques, & qu'elles ſe croiſoient les unes les autres. L'examen le plus attentif répété ſur un très-grand nombre de ſujets, m'a toujours fait voir le contraire.

Le *ſeptum lucidum*, cette cloiſon mince & tranſparente qui ſépare les deux ventricules ſupérieurs ou latéraux du cerveau, deſcend de la partie moyenne & inférieure du corps calleux; elle eſt évidemment compoſée de deux lames médullaires, entre leſquelles ſe trouve un écartement qui eſt connu ſous

le nom de cavité du *ſeptum lucidum*, & qui a été découvert par Sylvius. Cet écartement n'eſt pas le même dans tous les ſujets. La cavité qu'il forme m'a paru avoir une figure triangulaire, & aſſez ſemblable à celle du ſinus longitudinal ſupérieur de la dure-mère. Elle eſt tapiſſée d'une membrane extrêmement ſubtile, & elle contient plus ou moins de ſéroſité. Cette cavité eſt plus large & plus évaſée en avant qu'en arrière, où elle ſe termine en pointe. Sa longueur la plus ordinaire eſt de dix-huit à vingt lignes. Vieuſſens a dit qu'elle communiquoit avec le troiſième ventricule. Winſlow a cru voir la même choſe, & M. Tarin a avancé dans ſon Anthropotomie, que cette cavité s'ouvroit quelquefois dans les ventricules latéraux par une petite fente qui ſépare les deux cordons du pilier antérieur. Santorini eſt d'un avis entièrement oppoſé. Selon lui, ce n'eſt pas dans le troiſième ventricule, mais au-dehors du cerveau, vis-à-vis la partie ſupérieure de l'union des couches des nerfs optiques que ſe termineroit l'extrémité antérieure de la cavité dont il s'agit, ſi elle n'étoit fermée en cet endroit par une lame médullaire fort mince, & par la portion de la pie-mère qui recouvre cette partie du cerveau. Mes obſervations à ce ſujet confirment celles de cet illuſtre Anatomiſte. Quelques-uns croient que la cavité du *ſeptum lucidum* manque quelquefois; mais je l'ai toujours vue, excepté dans le cas où la ſubſtance du cerveau étoit trop molle pour qu'elle fût facilement développée.

Le corps médullaire appelé la voûte à trois piliers, eſt continu au *ſeptum lucidum* qu'il termine inférieurement. Cette voûte a la forme d'un triangle équilatéral, dont un des angles eſt en avant & les deux autres en arrière. Elle poſe preſque par-tout ſur l'adoſſement des couches des nerfs optiques; mais elle en eſt ſéparée par une production membraneuſe à laquelle tiennent les deux plexus choroïdes qui ſont logés dans les ventricules latéraux, & qui fournit à ſa face inférieure un grand nombre de vaiſſeaux artériels & veineux. Cette partie de la voûte à trois piliers eſt traverſée de lignes que Winſlow dit être tranſverſales, & qu'il croit lui avoir

fait donner le nom de *corpus psalloïdes* & de *lyra*, parce qu'on l'a comparée à un instrument à corde à peu-près semblable à celui que l'on appelle *tympanon.* Le terme de ψαλλίδες & de ψαλλιδόειδες dont les auteurs Grecs se sont servis pour exprimer la voûte à trois piliers, & que l'on a rendu par les mots latins *psalterium & lyra*, ne vient point du verbe ψαλλῶ, *tenui motu percutio*, *fidibus cano*, mais de ψαλίς, ιδὸς, qui dans l'usage ordinaire signifie *forfex*, des ciseaux, & en terme d'architecture, *fornix* voûte; ce que prouve le nom de καμαρίον qui a été aussi donné à la voûte à trois piliers, & qui vient de καμαρὰ, ας, *camera*, *fornix*, *testudo.* Quant aux lignes qui se voient à la partie inférieure & concave de cette voûte, elles ont une direction différente à sa partie antérieure & à sa partie postérieure : en avant elles sont au nombre de deux, fort saillantes & situées longitudinalement; en arrière elles sont en assez grand nombre, leur direction est oblique, & elles paroissent venir de chaque côté de l'épanouissement des fibres qui composent le *corpus fimbriatum*, lequel tient, comme on sait, de chaque côté à l'angle postérieur de la voûte.

La production membraneuse qui se trouve entre cette voûte & les couches des nerfs optiques, donne naissance aux deux plexus choroïdes, & tire elle-même son origine de la pie-mère qui s'enfonce dans les ventricules latéraux, entre la partie postérieure du corps calleux, & la partie supérieure des tubercules quadrijumeaux, autrement nommés *nates* & *testes.* Elle est parsemée de beaucoup de vaisseaux sanguins. Les veines y paroissent plus nombreuses que les artères, & se rassemblent pour former deux grosses branches qui marchent parallèlement d'avant en arrière, & qui se réunissent en un seul tronc que Galien a nommé la *grande veine du cerveau.* Cette veine va s'ouvrir dans la partie antérieure du sinus droit. Elle ne rapporte pas seulement le sang des plexus choroïdes, mais encore celui qui revient de presque toute l'étendue des ventricules latéraux, dont les vaisseaux communiquent avec ceux de ces plexus.

Lorſqu'on enlève, avec les précautions convenables, la membrane dont il vient d'être parlé, on découvre les couches des nerfs optiques adoſſées l'une à l'autre, & derrière ces couches, cinq tubercules; un ſupérieur & antérieur qui eſt la glande pinéale, & quatre autres ſitués inférieurement & plus en arrière, qui ſont les *nates* & *teſtes*. Willis avoit dit que les couches des nerfs optiques étoient pour l'ordinaire ſéparées dans l'homme; mais Vieuſſens aſſure qu'il les a toujours trouvées réunies par une ſubſtance médullaire d'une conſiſtance fort molle, qui ſe rompt aiſément, & dont les parties ſe contractent de telle manière qu'il eſt difficile d'en retrouver les reſtes: il ajoute que cette ſubſtance tire ſon origine de la partie du cerveau qu'il appelle le *centre ovale*. Santorini ne convient point qu'elle procède de ce centre ovale, comme Vieuſſens ſe l'eſt perſuadé; mais il a ſouvent obſervé en cet endroit une membrane blanche compoſée de fibrilles médullaires diverſement entrelaſſées & diſpoſées ſans ordre. Morgagni n'a pas ſeulement rencontré l'eſpèce de voûte dont il s'agit; il en a trouvé deux placées l'une au-deſſus de l'autre. La plus inférieure étoit de couleur griſâtre, & la ſupérieure de couleur blanche, & d'une ſubſtance vraiment médullaire. Enfin Winſlow dit en parlant des couches des nerfs optiques, qu'elles ſont réellement unies, & ne font qu'un même corps par la vraie continuation de la ſubſtance blanchâtre de leur convexité. Cette ſubſtance, continue-t-il, eſt très-mince & ſe rompt par le propre poids des parties latérales d'un cerveau détaché du crâne, & pour s'aſſurer de ſon exiſtence, il faut l'examiner dans ſa place naturelle, & encore faut-il avoir ſoin de manier les parties légèrement.

Qui croiroit que malgré l'aſſertion des habiles gens que je viens de citer, l'union des couches des nerfs optiques pût être révoquée en doute? Cependant c'eſt d'après l'obſervation la plus exacte & les diſſections les plus multipliées, que j'oſe le faire. Quoique j'aie pris les plus grandes précautions pour ne point ébranler la maſſe du cerveau en ſciant le

crâne ; quoique j'aie enlevé la membrane qui couvre les couches des nerfs optiques, avec une lenteur extrême ; quoique j'aie plusieurs fois commencé l'examen du cerveau par la partie inférieure, afin d'apercevoir, s'il étoit possible, dans toute leur intégrité, celles qui sont situées supérieurement, je n'ai jamais pu voir que ces couches fussent jointes l'une à l'autre. Au contraire j'ai cru trouver dans l'état sous lequel elles se sont présentées, la preuve qu'elles n'avoient été que contiguës; car les surfaces par lesquelles elles se touchent mutuellement, m'ont toujours paru fort lisses & sans aucune inégalité, ce qui ne seroit sans doute pas arrivé, si elles eussent été unies ensemble par une sorte de continuité de substance. Tout le fruit que j'ai tiré de mes recherches à cet égard, a été de trouver presque constamment entr'elles un cordon mollasse, de couleur grisâtre, du diamètre d'une ligne ou d'une ligne & demie, & qui naissoit de leur partie moyenne & antérieure. Morgagni est le seul des Anatomistes, que je sache avoir fait mention de ce cordon, qu'il dit joindre les couches des nerfs optiques à leur partie moyenne, & qu'il assure n'avoir été remarqué par personne avant lui.

Le troisième ventricule est la cavité oblongue formée par l'écartement de la partie inférieure des couches des nerfs optiques. Cette cavité est assez profonde en avant, au-dessous de l'angle antérieur de la voûte à trois piliers, & paroît se terminer en cet endroit par un canal évasé en haut, rétréci en bas, formé par un prolongement de la substance médullaire du cerveau, soutenu au dehors par un semblable prolongement de la pie-mère, & qui s'étend obliquement d'arrière en avant & de haut en bas, jusque vers la partie moyenne de la glande pituitaire. Les Anciens ont cru que ce canal étoit destiné à conduire hors du cerveau les sérosités qui tombent dans les cavités de ce viscère, & lui ont donné le nom d'*infundibulum*. Vieussens est le premier qui ait aperçu qu'il n'étoit pas creusé dans toute sa longueur, comme un entonnoir. Sa partie inférieure, dit cet Auteur, n'a pas de cavité apparente. Elle n'est percée que de porosités. C'est,

ajoute-t-il, ce que prouve l'expérience; car ſi l'on y verſe une teinture de ſafran faite avec de l'eſprit-de-vin, on ne la voit parvenir que lentement juſqu'à la glande pituitaire. Ridley penſe de même, & M. Lieutaud aſſure que le canal en queſtion n'eſt en bas qu'une eſpèce de cylindre ſolide de deux ou trois lignes de hauteur, auquel il donne le nom de *tige pituitaire.* Il eſt difficile de découvrir ſi ce qu'on appelle l'*infundibulum* eſt un véritable canal ou un corps ſolide, comme le diſent les Anatomiſtes dont je viens de parler. Cette partie eſt ſi foible qu'elle ne ſupporte aucune eſpèce d'injection ſans ſe déchirer & ſe rompre, & ſi molle qu'elle s'affaiſſe ſur elle-même lorſque, pour l'examiner plus commodément, on la ſépare d'avec celles qui l'avoiſinent. Cependant il me ſemble qu'elle ne renferme aucune cavité, & qu'elle ne peut remplir les fonctions qui lui ont été attribuées, à moins qu'elle ne ſoit poreuſe, comme Vieuſſens l'a avancé.

On voit à la partie antérieure du troiſième ventricule, entre les deux piliers qui forment l'angle antérieur de la voûte, un cordon cylindrique & médullaire, d'une groſſeur médiocre, d'une ligne & demie de longueur, & qui unit enſemble la partie antérieure & inférieure des corps cannelés. C'eſt la commiſſure antérieure. Santorini le nomme *corda Williſii & commiſſura craſſioris nervi æmula Vieuſſenii.* Il eſt vrai que Willis l'a décrit ſous le nom de *proceſſus tranſverſus medullaris;* mais il n'eſt pas le premier qui l'ait aperçu. Je trouve que cet Auteur a été prévenu par Riolan, lequel dit, en parlant des corps cannelés, qu'ils ont des connexions mutuelles au moyen d'une corde tranſverſale d'une groſſeur & d'une ſubſtance égale à celle du nerf optique. *Duas autem illas eminentias anteriùs connectit tranſverſus funis, ejuſdem ſubſtantiæ & molis cum nervo optico.*

La commiſſure antérieure eſt une des parties du cerveau qui ont le plus beſoin du ſecours de la diſſection pour être bien vues. Si on enlève avec le manche aplati d'un ſcalpel ou avec tout autre inſtrument de ſemblable eſpèce, la ſubſtance griſe dont elle eſt entourée, on verra qu'elle s'étend à plus

d'un pouce & demi de côté & d'autre dans l'épaiſſeur de chacun des lobes moyens du cerveau, & qu'elle y eſt logée ſans aucun mélange avec les parties qui l'avoiſinent. Sa figure alors imite celle d'un arc à tirer des flèches, étant aſſez enfoncée en arrière dans ſa partie moyenne, & convexe en avant ſur ſes parties latérales. Sa groſſeur augmente ſenſiblement à meſure qu'elle s'éloigne de ſon milieu, & elle ſe termine en arrière par l'épanouiſſement de ſa ſubſtance qui ſe confond avec celle du cerveau. Santorini, & M. Petit, de cette Académie, ont vu une partie des circonſtances que je viens d'expoſer; mais ce qu'ils n'ont pas dit, & ce que des obſervations fort nombreuſes m'ont appris, c'eſt que la commiſſure antérieure eſt compoſée de beaucoup de filets unis enſemble & que l'on peut aiſément diſtinguer à l'œil ſimple lorſqu'on l'examine à un beau jour. Cette ſtructure fibreuſe ſe remarque beaucoup mieux à la commiſſure poſtérieure, cordon tendu tranſverſalement derrière les couches des nerfs optiques & tout ſemblable à l'antérieure, ſi ce n'eſt qu'elle eſt un peu plus groſſe, plus mollaſſe, & qu'on ne peut la ſuivre auſſi profondément dans la ſubſtance du cerveau.

Les protubérances mamillaires, tubercules arrondis & ſitués l'un auprès de l'autre à la partie antérieure de la baſe du cerveau, derrière l'union des nerfs optiques & au-devant du pont de varole, répondent à la partie antérieure & inférieure du troiſième ventricule. Quoiqu'elles ſoient un peu plus en arrière que l'extrémité inférieure des deux piliers antérieurs de la voûte, Santorini les a regardées comme le lieu d'où ces piliers tirent leur origine, & les a nommées les *oignons* ou *bulbes* des piliers antérieurs de la voûte, *priorum crurum fornicis bulbi.* Winſlow leur a conſervé cette dénomination que mes premières obſervations me faiſoient leur refuſer, ne trouvant pas que leur ſituation répondît à celle des parties que ces deux Anatomiſtes diſoient en venir. Un examen plus attentif m'a fait apercevoir qu'en enlevant avec un inſtrument mouſſe la ſubſtance griſe qui forme les parois de la partie antérieure & latérale du troiſième ventricule, on voyoit

voyoit s'élever de chacun de ces tubercules une production médullaire, qui non-ſeulement donne naiſſance aux piliers antérieurs de la voûte, mais encore à deux autres cordons blancs qui ſe portent l'un ſur le bord ſupérieur de la couche du nerf optique, & l'autre vers le ſillon qui ſépare cette éminence d'avec le corps cannelé.

Le premier de ces cordons, après s'être ſéparé d'avec le pilier antérieur de la voûte, monte obliquement en arrière, marche enſuite horizontalement dans la même direction, puis redeſcend juſqu'au-delà de l'ouverture poſtérieure du cerveau, où il s'approche de celui du côté oppoſé, pour former une eſpèce de corde tranſverſale ſituée au-deſſus de la commiſſure poſtérieure & un peu plus en arrière, & au-devant de la glande pinéale qui eſt adhérente à la partie moyenne de cette corde. On le reconnoît aiſément à la ſaillie qu'il fait le long du bord ſupérieur de la couche du nerf optique & à ſa couleur blanche, fort différente de celle que cette couche préſente du côté par lequel elle s'adoſſe avec celle du côté oppoſé. Le plus grand nombre des Anatomiſtes n'a connu que la partie poſtérieure de ce cordon, qui va ſervir de pédicule à la glande pinéale. Ils l'ont regardé comme un nerf propre à cette glande, qui ſe détachoit de la couche du nerf optique pour aller ſe rendre à ſa partie antérieure, ou qui venoit de la glande même, & qui montoit juſqu'à la partie moyenne & ſupérieure de la couche du nerf optique. M.rs Petit & Haller ſont les ſeuls qui en aient parlé. Voici ce que le premier en dit : « Les pédicules de la glande pinéale ſont produits par deux lames « médullaires que l'on voit s'étendre de devant en arrière ſur « les couches des nerfs optiques, dans l'endroit où ces deux « éminences s'adoſſent. Les lames dont il eſt ici queſtion, naiſſent « du pilier antérieur de la voûte, ainſi que je l'ai découvert & « démontré il y a plus de deux années. » Je puis dire, ſans crainte de bleſſer la vérité, que le cordon dont il s'agit m'étoit connu long-temps avant que je ſuſſe que ces deux Auteurs en euſſent fait mention.

Le ſecond des cordons qui tirent leur origine de chacun

des deux tubercules mamillaires, s'écarte du pilier antérieur de la voute de son côté, un peu plus haut & plus en dehors que celui que je viens de décrire. Il s'enfonce dans le sillon qui sépare le corps cannelé d'avec la couche du nerf optique, ou plutôt, pour me servir de l'expression de Vieussens, qui convient parfaitement à la structure intérieure de la seconde de ces protubérances, qui sépare le corps cannelé supérieur & antérieur, *corpus striatum supernum anterius*, d'avec le corps cannelé supérieur & postérieur, *corpus striatum supernum posterius*. Il monte de bas en haut & d'avant en arrière, puis il redescend dans la même direction jusqu'à l'endroit où le ventricule latéral se courbe pour se porter de haut en bas & d'arrière en avant; là il se continue le long de la paroi supérieure du ventricule, & va se terminer vers la fin de cette cavité à la plus intérieure des éminences que forme l'extrémité de l'*hyppocampus*. Ce cordon est assez gros dans son commencement, & d'une substance fibreuse & en quelque sorte transparente. Il laisse passer au-dessous de lui un ou deux rameaux de cette veine que j'ai dit se porter d'avant en arrière dans la grande veine de Galien, & qui viennent du corps cannelé antérieur, & paroît les appliquer à la partie inférieure de ce corps, les y retenir, & en quelque sorte les brider. Son épaisseur diminue beaucoup à mesure qu'il se porte en arrière, & se réduit à peu de chose lorsqu'il parvient à l'extrémité courbée du ventricule latéral. On diroit qu'il s'en détache quelques fibres qui se perdent dans le corps cannelé postérieur. La difficulté de le suivre plus loin dans le plus grand nombre des sujets, m'a fait croire pendant long-temps qu'il ne s'avançoit pas au-delà. Mes dernières observations m'ont enfin appris qu'il va communiquer avec l'*hyppocampus*, ainsi que je l'ai dit il n'y a qu'un moment.

Le cordon nerveux dont je viens de donner la description, n'a été connu d'aucun des Anciens. Willis est le premier qui l'ait entrevu. Il l'a nommé *limbus posterior corporis striati*, & dans un autre Ouvrage, *processus transversus medullaris*, parce qu'il a cru qu'il étoit une suite, une continuation de la partie

que l'on appelle la *commiſſure antérieure.* C'eſt ce que prouve l'explication de la huitième planche de ſon Anatomie du cerveau, où il fait repréſenter ſous les lettres *gg* ce cordon auquel il donne le nom de *proceſſus medullaris tranſverſus, corpora ſtriata invicem connectens.* Vieuſſens après lui l'a déſigné ſous celui de *geminum centrum ſemi-circulare*, ſans que je puiſſe trop ſavoir pourquoi. Au reſte, la manière dont ces deux Auteurs le décrivent eſt très-imparfaite. M. Tarin enſuite l'a appelé *frenulum novum*, dans ſes *Adverſaria Anatomica*, & l'a déſigné ſous le nom de *bride*, dans ſon Anthropotomie, ſans doute parce qu'il contient les rameaux veineux que j'ai dit paſſer au-deſſous de lui, pour aller au corps cannelé. Enfin M. Haller s'eſt ſervi, pour l'exprimer, du terme de *tænia ſemicircularis* bandelette demi-circulaire, dans ſon grand Ouvrage de Phyſiologie où il en parle beaucoup plus exactement que ceux qui l'ont précédé. La deſcription qu'il en donne diffère beaucoup de la mienne, en ce qu'il le fait terminer en arrière par un grand nombre de fibres qui ſe perdent dans la ſubſtance du cerveau, près & au-deſſous de la couche du nerf optique, *pene thalamum & inferiùs*, & en ce qu'il lui attribue pluſieurs racines en avant, une qu'il tire du pilier antérieur de la voûte, une ſeconde de la ſubſtance même du cerveau au-devant du pilier, & une troiſième de la commiſſure antérieure, à l'épaiſſeur de laquelle cet illuſtre Anatomiſte croit que cette racine contribue. Nul autre, que je connoiſſe, n'en a fait mention, ſi j'en excepte Santorini, qui comme moi fait naître le cordon médullaire dont il s'agit, du tubercule mamillaire par un tronc qui lui eſt commun avec le pilier antérieur de la voûte, ce dont on a lieu d'être ſurpris, vu la groſſeur dont il eſt à ſa partie antérieure, & la notice que les Auteurs que je viens de citer en ont donnée.

Les tubercules quadrijumeaux, ou autrement les *nates & teſtes*, ſont placés au-deſſous & derrière la glande pinéale. Ils répondent à la partie antérieure de la tente du cervelet. La plus inférieure de ces éminences ſe termine de chaque côté en une production blanche d'une groſſeur aſſez conſidérable,

qui descend obliquement en arrière, en s'écartant de celle qui lui répond, & qui va se perdre dans la propre substance du cervelet. Cette production diminue sensiblement de grosseur à sa partie inférieure. Sa longueur est d'un bon pouce, & elle est située au-dessus des cuisses de la moelle alongée & un peu plus en dedans. Elle est unie avec celle du côté opposé par une lame assez mince, de substance grise, qui forme la paroi supérieure du quatrième ventricule, & dont la largeur augmente de haut en bas à proportion de l'écartement dont il s'agit. Cette lame, dont Hygmore & Drelincourt se disputent la découverte, a été prise par Vieussens pour une valvule appliquée à l'extrémité postérieure de l'aquéduc de Sylvius, au moyen duquel le troisième ventricule communique avec le quatrième. Comme elle est la moins épaisse de toutes les parties qui circonscrivent cette cavité, lorsqu'on applique l'extrémité d'un syphon à la partie antérieure de l'aquéduc de Sylvius & qu'on y pousse de l'air, elle se soulève beaucoup & pourroit faire croire qu'il y a effectivement à cet endroit une valvule particulière; mais c'est une apparence qui ne trompera personne lorsqu'on aura pris soin d'examiner les choses en place, après avoir enlevé la tente du cervelet qui couvre les productions, & la lame grisâtre dont il vient d'être parlé. Ce procédé fera aussi découvrir entre les deux tubercules quadrijumeaux inférieurs une espèce de bride qui descend en bas, & qui se termine au-dessous d'eux. Toutes ces parties sont constantes & fort faciles à apercevoir; néanmoins elles n'ont été bien connues que de M. Haller, à l'industrie & à la sagacité de qui il n'a presque rien échappé de la structure des organes qui composent le corps humain & celui des brutes.

La pie-mère, cette membrane mince qui recouvre immédiatement le cerveau, est composée, comme tout le monde le sait, de deux lames dont l'intérieure est la plus étendue & forme une infinité de replis qui s'enfoncent entre les circonvolutions qui se remarquent sur ce viscère. Ces replis contiennent un tissu cellulaire assez lâche, dans lequel les

vaiſſeaux ſanguins, artères & veines qui ſe diſtribuent au cerveau, vont ſe ramifier à l'infini, de ſorte que ſa propre ſubſtance n'en reçoit que des rameaux extrêmement fins & déliés. Pluſieurs Anatomiſtes, tels que Fallope, Bauhin, Spigellius, Hygmore, Willis & pluſieurs autres, ont cependant penſé que les artères y pénétroient par des rameaux aſſez conſidérables, ce qu'ils ont eſſayé de prouver par les points rouges qui ſe remarquent dans la ſubſtance du cerveau lorſqu'on vient à la couper, & par la réſiſtance que les vaiſſeaux qui y ſont répandus, offrent quelquefois au tranchant des inſtrumens dont on ſe ſert pour la diviſer : je n'y en ai jamais rencontré, & cette diſpoſition eſt une de celles par où ce viſcère diffère le plus eſſentiellement des autres organes ſecrétoires, tels que le foie, les reins, le pancréas & autres, où les gros troncs ſanguins s'introduiſent pour s'y ramifier. Les magnifiques préparations que Ruyſch & Albinus ont faites de la pie-mère, confirment mon ſentiment à ce ſujet. On y voit du côté par lequel cette membrane étoit appliquée au cerveau, un nombre prodigieux de vaiſſeaux d'une exceſſive fineſſe, qui la font paroître comme lanugineuſe. Sans avoir pu réuſſir, comme eux, à injecter les vaiſſeaux du cerveau, j'ai vu la même choſe ſur quelques ſujets dont la pie-mère ſe détachoit avec facilité, & laiſſoit la ſubſtance corticale entièrement à nu.

Les replis de la pie-mère qui s'introduiſent entre les circonvolutions du cerveau, ne ſont pas les ſeules productions de cette membrane. Elle forme auſſi des prolongemens qui s'enfoncent dans les cavités de ce viſcère. Tel eſt celui que j'ai dit ſe trouver entre la partie inférieure de la voûte à trois piliers, & les couches des nerfs optiques, & qui ſe gliſſe de dehors en dedans entre cette voûte & la partie ſupérieure de la moelle alongée. Tels ſont encore ceux qui pénètrent de chaque côté de la protubérance annulaire ou pont de Varole, & qui ſe rendent dans la partie antérieure & inférieure des ventricules latéraux. Il y a apparence que ces prolongemens, outre les plexus choroïdes qui en ſont une continuation, fourniſſent aux cavités intérieures du cerveau

la membrane extrêmement mince qui les tapiſſe; membrane connue des Grecs, révoquée en doute par Véſale, qui s'élève à cette occaſion en reproches très-déplacés contre Galien l'objet perpétuel de ſes répréhenſions, mais enfin adoptée par tout le monde, quoique peu d'Auteurs en aient parlé d'une manière poſitive.

La dure-mère a ſes replis comme la pie-mère. On s'accorde à dire que celui qui eſt connu ſous le nom de *tente du cervelet*, eſt placé tranſverſalement. Je trouve qu'il eſt beaucoup plus élevé à ſa partie moyenne qui tient à la baſe de la faux, que vers ſes parties latérales, & que celles-ci forment de chaque côté un plan incliné qui ſe termine au bord ſupérieur du rocher, & qui ſe continue avec la face ſupérieure de cette apophyſe. La diſpoſition dont je parle, le rend plus propre à empêcher que le cerveau ne poſe ſur le cervelet, que celle qu'on lui attribue; car comme la peſanteur des corps qui appuient ſur des plans inclinés, ſe décompoſe en deux forces, dont l'une agit parallèlement & l'autre perpendiculairement à ces plans, celle du cerveau va porter en grande partie ſur l'éminence oſſeuſe du temporal. Il faut cependant avouer que toute la tente du cervelet ne deſcend pas uniformément d'arrière en avant, & qu'il y a une partie de cette cloiſon membraneuſe qui ſe porte obliquement d'avant en arrière juſque vers la protubérance occipitale interne; mais l'extrémité du lobe poſtérieur du cerveau qui appuie deſſus eſt peu conſidérable, & ſe trouve ſuffiſamment ſoutenue par cette même protubérance.

La poſition, le nombre, la figure & les communications réciproques des ſinus de la dure-mère ſont ſuffiſamment connus. Cependant il eſt bon d'obſerver que la coupe du ſinus longitudinal & des deux ſinus latéraux ſupérieurs repréſente un triangle curviligne dont un des côtés, celui qui regarde le crâne, eſt convexe en dehors, & les deux autres le ſont en dedans, pendant que celle du ſinus droit en repréſente un dont les trois côtés ſont également convexes en dedans. Véſale en a fait la remarque, & l'a exprimée par une figure linéaire, en quoi il n'a été ſuivi que par Cheſelden. Galien avoit dit que les

ſinus de la dure-mère ne recevoient que des veines, & qu'ils exerçoient les mêmes fonctions que ce genre de vaiſſeaux; Véſale au contraire a prétendu qu'ils recevoient auſſi des artères, & qu'ils avoient des battemens marqués. Quoique cette opinion ait été pleinement réfutée par Fallope dans ſes Obſervations anatomiques, elle a été adoptée par Vieuſſens, Wepfer & pluſieurs autres qui ont cru en trouver la preuve dans la facilité avec laquelle des injections faites avec des liqueurs diverſement colorées & pouſſées par les artères carotides, ſe rendent dans le ſinus longitudinal ſupérieur. Ils n'ont pas vu que ces injections après avoir traverſé les artères, revenoient enſuite par les veines. Si quelques artères parvenoient juſqu'aux ſinus, ce ne pourroit être que celles qui ſe diſtribuent à la propre ſubſtance de la dure-mère, & on ſait qu'elles paſſent par-deſſus ces cavités ſans s'y ouvrir. Quant aux pulſations que les Anatomiſtes que je viens de citer & pluſieurs Modernes ont attribuées aux ſinus, & qu'ils ont dit être iſochrones à celles des artères, elles ne peuvent avoir lieu; les mouvemens que l'on obſerve quelquefois dans ces ſortes de vaiſſeaux répondent à ceux de la reſpiration, & viennent de ce que le ſang eſt retenu ou même repouſſé de bas en haut dans les veines jugulaires internes, dans leſquelles les ſinus de la dure-mère vont preſque tous ſe dégorger.

Les brides membraneuſes que l'on trouve dans le ſinus longitudinal ſupérieur & dans les ſinus latéraux n'ont échappé à perſonne ; mais il eſt aſſez extraordinaire qu'on n'ait pas fait attention à celles qui ſe remarquent à leur extérieur, & qui ont été décrites par Ridley, Santorini & enſuite par M. Tarin. Santorini les nomme *lacerti tranſverſi exteriores*. Il dit que leur direction eſt différente, & qu'elles ſont tantôt inclinées en avant & tantôt en arrière. Elles m'ont paru placées ſans ordre, & je les ai vu ſe croiſer les unes les autres dans toutes ſortes de ſens. C'eſt ſur-tout au voiſinage du ſinus longitudinal ſupérieur qu'il faut les obſerver, après avoir enlevé la dure-mère avec le crâne par une ſection tranſverſale de ces parties. On en voit auſſi quelques-unes, mais moins

marquées, près la face supérieure des sinus latéraux. Les veines qui se rendent dans ces cavités n'y pénètrent que dans leurs intervalles. On ne peut douter que ces brides ne préviennent la trop grande dilatation des sinus, dilatation qui auroit pu être l'effet de la raréfaction du sang, & sur-tout du reflux qui se fait dans les veines jugulaires, lorsque la respiration est retenue pendant trop long-temps, ou que l'on fait des efforts violens.

Quelques remarques sur la direction des veines que reçoivent les sinus de la dure-mère, termineront ce Mémoire. Lower est le premier qui ait aperçu qu'elles se glissent obliquement dans l'épaisseur de cette membrane, à peu-près comme le canal cholédoque & les deux uretères dans celle du duodenum & de la vessie. Il dit aussi qu'elles s'ouvrent toutes d'arrière en avant, en quoi il a été suivi par Vieussens, lequel en excepte pourtant deux ou trois, qui de la partie antérieure vont à la postérieure. Ridley ensuite a avancé que la moitié de ces veines alloit d'arrière en avant, & l'autre moitié d'avant en arrière. Santorini les a vues dans trois directions différentes; celles qui sont antérieures & qui répondent au front sont placées en travers; celles qui suivent vont d'avant en arrière, & les postérieures d'arrière en avant; celles-ci sont plus amples & plus nombreuses. Enfin, Nicolas Albert, auteur d'une Dissertation fort estimée sur la direction des vaisseaux, assure que la plus grande partie de ces veines marche obliquement d'arrière en avant, mais que les autres qui font un peu plus du tiers de leur nombre total, marchent d'avant en arrière. Il ajoute que la disposition des premières empêche que le sang ne coule dans le sinus avec trop de rapidité, pendant que celle des secondes favorise son cours lorsque la tête est penchée en avant, & qu'il lui faut remonter contre son propre poids pour se rendre vers le golfe des veines jugulaires. On conçoit avec peine comment il peut y avoir une diversité de sentimens aussi marquée sur une chose de fait. La plus légère attention suffit pour voir que toutes les veines qui s'ouvrent dans le sinus longitudinal supérieur,

ſupérieur, s'y rendent d'arrière en avant, comme la plupart des Modernes le diſent. Lorſque j'en ai rencontré qui paroiſſoient avoir une direction contraire, j'ai toujours vu qu'elles n'alloient point au ſinus, mais qu'elles ſe terminoient dans quelques-unes des groſſes veines qui y aboutiſſent. Pour me rendre plus certain de la marche de ces veines, j'ai ſouvent remarqué la manière dont celles qui communiquent avec les ſinus latéraux & avec le ſinus droit venoient s'y rendre, bien perſuadé qu'elle devoit être la même. Mon attente à cet égard n'a point été trompée; j'ai vu les unes ſe gliſſer d'avant en arrière, & les autres d'arrière en avant, c'eſt-à-dire d'une manière toujours contraire au cours du ſang qui coule dans ces ſinus. Depuis que j'ai fait ces obſervations, j'ai trouvé qu'elles avoient été faites avant moi par Verheien.

ANALYSE DE LA BILE,

Avec des Réflexions ſur les changemens qu'elle peut ſubir dans le corps humain.

Par M. BORDENAVE, Profeſſeur Royal de Chirurgie, Membre des Académies de Rouen, de Florence, &c.

LA bile réunit en elle des propriétés eſſentielles pour l'économie animale, & par cette raiſon elle a toujours mérité l'attention des Anatomiſtes, des Phyſiologiſtes & des Chimiſtes. Si on conſulte les Auteurs qui ont parlé de ce fluide, on voit qu'en en faiſant l'analyſe, leur but principal a été de déterminer la nature de ſes parties intégrantes pour en déduire les uſages.

Nous avons cru devoir répéter les expériences & examiner de nouveau les changemens que la bile ſubit, étant mêlée avec différentes liqueurs. Ces recherches ne nous ont pas ſeulement paru intéreſſantes pour conſtater la nature de la bile, mais encore pour connoître les changemens dont elle eſt ſuſceptible dans le corps animal, pour apprécier les cauſes de ces changemens, & en tirer des conſéquences utiles pour la pratique de l'Art de guérir.

La bile contenue dans la véſicule du fiel, ſera particulièrement l'objet de notre examen; elle eſt eſſentiellement la même que la bile hépatique, & nous voyons qu'elle n'en diffère qu'en ce qu'elle eſt plus amère & plus épaiſſe, ce qui eſt une ſuite néceſſaire de ſon ſéjour dans ce réſervoir.

La conſidération ſimple de la bile fait voir qu'elle eſt une liqueur ſavonneuſe, d'une couleur jaune-verdâtre plus ou moins foncée, d'une odeur peu ſenſible quand elle n'eſt point altérée, d'une odeur déſagréable quand elle eſt atteinte de quelque mouvement ſpontané, & d'un goût très-amer.

Elle eſt naturellement viſqueuſe; elle s'épaiſſit aiſément;

miſe ſur le feu, elle s'y coagule d'elle-même; l'eſprit-de-vin & les acides produiſent ſur elle le même effet. Elle prend dans les maladies la conſiſtance de poix; quelquefois elle devient noire & gluante; elle ſe durcit d'autres fois & forme des concrétions, & comparée avec les autres liqueurs, ſon poids paroît aſſez conſidérable.

L'amertume peut être regardée comme une qualité eſſentielle de la bile; elle augmente avec l'épaiſſiſſement de cette liqueur; & ſi la bile dans certaines maladies devient plus fluide, comme ſéreuſe, & paſſe, pour ainſi dire, à un état de diſſolution, ſon amertume diminue, & elle devient preſque inſipide. Elle n'eſt point de ſa nature ni alkaline, ni acide, & ſi quelquefois elle a paru telle par le vomiſſement, on ne peut attribuer cet effet qu'au vice particulier des liqueurs de l'eſtomac ou des premières voies.

La bile verdâtre dans le plus grand nombre des animaux, eſt ſouvent à peu-près d'un vert-jaunâtre dans l'homme pendant l'état ſain. Dans les maladies elle prend diverſes couleurs ſelon leur nature; ainſi dans la maladie noire elle prend une couleur noirâtre; dans les fièvres inflammatoires elle paroît jaune, & elle change de couleur à raiſon des ſubſtances contenues dans l'eſtomac & dans les inteſtins, ou à raiſon des mouvemens ſpontanés qu'elle y éprouve. Par ces conſidérations, on conçoit comment un même homme peut vomir une bile tantôt jaune, tantôt verte, brune ou de telle autre couleur, ſelon les circonſtances; enfin, ſelon les obſervations de Malpighi & de M. Haller *(a)*, elle eſt colorée avant que d'être amère.

La bile eſt miſcible avec l'eau, l'eſprit-de-vin & même avec l'huile, quoiqu'un peu plus difficilement, propriété qui n'appartient qu'aux corps ſavonneux; comme eux s'uniſſant avec les huiles, elle eſt lixivielle & propre à ôter les taches; enfin elle s'unit intimément avec les gommes & les réſines,

(a) Elementa Phyſiologiæ, tom. VI, lib. XXIII, pag. 548.

& les rend ainſi miſcibles à l'eau ; à raiſon de ces propriétés elle devient miſcible avec tous les corps. Il réſulte de cette ſolubilité de la bile avec l'eau, l'eſprit-de-vin & l'huile, qu'elle eſt un véritable ſavon animal, liquide, & qu'elle en doit avoir les propriétés.

Si on recherche la nature de la bile par ſon analyſe chimique, ou en la mêlant avec différentes ſubſtances, on eſt convaincu qu'elle contient une aſſez grande quantité d'huile inflammable & un peu de ſel alkali volatil. Le ſavon qu'elle forme a donc pour baſe une huile ténue, jointe à un ſel lixiviel qui ſe volatiliſe par le feu. Si cette huile vient à s'épaiſſir avec ce ſel, elle forme un ſavon concret, dans lequel on retrouve les mêmes propriétés, ainſi qu'on peut s'en convaincre par l'analyſe des pierres ou concrétions biliaires.

Curieux de connoître plus diſtinctement l'analyſe de la bile & les principes qu'elle contient, j'ai cru devoir faire diverſes recherches ſur cette liqueur, ſoit par ſon mélange avec d'autres liqueurs, ſoit par ſon analyſe, ſoit enfin en conſidérant ſes effets dans l'économie animale. Deux hommes diſtingués par leurs connoiſſances en Chimie & en Pharmacie (M.rs Pia & Cadet) m'ont aidé de leurs lumières, & voici quel a été le réſultat de nos expériences.

Les acides minéraux convertiſſent la bile en un *coagulum* d'un vert plus ou moins foncé. L'acide végétal mêlé avec elle la coagule auſſi; digérés enſemble, il en change la couleur jaune en un vert ſale. Tous ces *coagulum* privés, à une douce chaleur, d'une partie de leur humidité, paroiſſent être de la nature des réſines artificielles réſultantes de la combinaiſon des huiles avec les acides minéraux; de même que ces réſines, ils s'enflamment & brûlent aiſément.

L'huile de tartre par défaillance mêlée avec la bile forme une eſpèce de ſavon qui ſe diſſout aiſément dans l'eau. Cette diſſolution étant ſaturée par un acide quelconque, il s'en ſépare une ſubſtance graſſe, verdâtre, qui ſe précipite au fond de la liqueur; & qui, ſelon les apparences, n'eſt autre choſe

que la partie graſſe de la bile que l'acide dégage de cette eſpèce de ſavon, pour s'unir à l'alkali fixe avec lequel il a plus d'affinité. Cette décompoſition eſt à peu-près ſemblable à celle du ſavon ordinaire, faite par la voie des acides; elle en diffère cependant en ce que dans l'une, la partie graſſe ſe précipite comme étant plus peſante, au lieu que dans l'autre elle ſurnage la liqueur, étant plus légère.

L'alkali volatil s'unit parfaitement à la bile, ſans la coaguler & ſans en altérer la couleur.

La bile examinée par l'analyſe chimique, eſt démontrée contenir beaucoup d'air: renfermée dans une cornue expoſée à un feu très-médiocre, elle s'élève rapidement en groſſes bulles, & paſſe entièrement dans le récipient; dégagée de cet air par une lente évaporation, diſtillée enſuite, elle fournit une très-grande quantité d'eau ou de flegme, une aſſez grande quantité d'huile inflammable, un peu de ſel alkali volatil; & ce qui reſte dans la cornue, eſt une matière boueuſe ou charbonneuſe, qui calcinée à l'air libre, ne préſente qu'une pure terre.

D'après ces expériences, il auroit été facile de prononcer ſur la nature des principes qui conſtituent la bile; mais dans la crainte que l'alkali volatil que l'on retire par ſa diſtillation, ne lui appartînt pas, & qu'il ne fût un nouveau compoſé produit du feu, comme il arrive dans la diſtillation du tartre, ou par un commencement de fermentation ſpontanée, pour ne laiſſer aucun doute ſur la nature de cet alkali volatil, nous avons fait l'expérience ſuivante.

Nous avons verſé de l'acide marin ſur de la bile; ce mélange mis à digérer, à la plus douce chaleur d'un bain de ſable, nous y avons remarqué un mouvement d'effervescence. Ce mouvement entièrement ceſſé, nous avons ajouté un peu d'eau diſtillée à ce mélange, lequel filtré a donné une liqueur tranſparente d'un beau vert.

L'ayant fait évaporer à une douce chaleur, il s'eſt formé à ſa ſurface une pellicule ſaline aſſez conſidérable, qui a été

recueillie avec ſoin à meſure qu'elle paroiſſoit. Cette pellicule ſéchée à une très-douce chaleur, miſe en poudre & mêlée avec de la chaux vive auſſi en poudre, humectée enſuite avec un peu d'eau, a répandu auſſi-tôt une odeur d'alkali volatil très-pénétrante; ce qui prouve ſenſiblement que cette pellicule ſaline eſt un ſel ammoniac formé de l'acide marin & de l'alkali volatil qui étoit contenu dans cette bile.

Malgré l'expérience que nous venons de rapporter, nous ne conclurons pas que le principe ſalin qui conſtitue la bile, ſoit un alkali volatil; de nouvelles recherches ont prouvé le contraire. Il n'eſt point non plus acide, puiſque la bile digérée avec le lait, ne le coagule pas, & que ſa couleur ne ſeroit pas jaune, mais d'un vert plus ou moins foncé, ſelon le plus ou le moins d'acide qu'elle contiendroit.

Nous obſerverons que la bile abandonnée aux mouvemens ſpontanés, tend à la putréfaction, & prend une odeur de muſc; & quoique, conſidérée dans ſon état naturel, elle ne ſoit ni acide ni alkaline, cependant elle pourroit quelquefois donner des marques de l'un ou l'autre caractère, à raiſon des changemens qu'elle ſubiroit, en ſe mêlant avec les liqueurs des premières voies. Cette conſidération ne doit pas être oubliée, quand on fait l'analyſe de la bile humaine, la maladie dont le ſujet eſt mort, pouvant contribuer beaucoup à ces variations.

Il réſulte de ces expériences que la bile n'eſt autre choſe qu'une huile épaiſſe, atténuée par un alkali fixe, au point de la rendre diſſoluble dans l'eau, ce qui la fait regarder par ces différentes propriétés, & avec raiſon, comme une eſpèce de ſavon.

La bile dépoſe à la longue une terre jaune, que l'on peut conſidérer comme le principe qui contribue à la formation des pierres biliaires: toutes ces concrétions fourniſſent par la diſtillation, les mêmes principes que la bile, c'eſt-à-dire du flegme, de l'alkali volatil, beaucoup d'huile, & un principe terreux. Les concrétions qui ſe trouvent quelquefois dans les gros inteſtins, ſont de la nature des pierres biliaires.

& donnent auſſi par l'analyſe, des principes ſemblables *(b)*.

Les expériences ſur la bile, qui viennent d'être rapportées, paroîtront peut-être peu utiles après le détail plein d'érudition qu'a donné, ſur cette matière, le célèbre M. Haller, dans ſa Phyſiologie. *(c)* Elles ſont à peu-près d'accord avec celles dont il y eſt mention; elles peuvent donc ſervir à les confirmer: cependant outre la différence des procédés, elles en préſentent encore, en ce que nous admettons dans la bile un alkali fixe, que quelques Auteurs ont ſemblé nier *(d)*.

Si on conſulte les expériences, il eſt conſtamment démontré, que la bile n'eſt point acide, tant qu'elle eſt bien conſtituée; elle ne paroît pas non plus alkaline, puiſqu'elle ne fermente pas avec les acides; mais quoique dans l'état ſain, elle paroiſſe avoir un caractère neutre, cependant elle contient un alkali qui ſe développe avec plus ou moins de facilité, ſelon les circonſtances. A raiſon de ces changemens, elle fermente avec les alimens dont nous uſons, en éprouvant un mouvement ſpontané dans les premières voies.

Nous avons d'abord démontré l'exiſtence d'un alkali volatil par la digeſtion d'un mélange d'acide marin avec la bile, & par le mélange d'une portion de cette matière avec la chaux vive; par cette raiſon il ne paroît pas qu'on puiſſe la révoquer en doute, lorſque cette bile a ſubi un commencement de fermentation. Mais l'alkali volatil ne ſe manifeſte point dans la bile renfermée dans la véſicule; cette liqueur ne ſe pourrit pas aiſément, tant qu'elle n'eſt point atteinte de l'air, & celle que nous avons miſe en uſage, ne paroiſſoit pas altérée. D'ailleurs la bile fait l'office de ſavon; perſonne ne lui conteſte cette propriété: ſi elle en a les uſages, elle doit donc en avoir la nature, & comme les ſavons, elle eſt formée d'une huile plus ou moins épaiſſe, & d'un alkali plus ou moins développé.

---

*(b) Voyez l'*Analyſe de ces pierres, par M. Cadet, *Hiſt. de l'Acad. Royale de Chirurgie, in-4.° vol. III, p. 15.*

(c) Elementa Phyſiolog. tom. VI, lib. XXIII, ſect. 3.

(d) Ibid. p. 577.

L'amertume propre de la bile, & l'extrême acrimonie dont elle est susceptible, prouvent encore en elle l'existence d'un sel qui devient aisément âcre & d'une nature alkalescente. Enfin ses usages intérieurs, pour la dissolution des alimens & leur digestion, même pour l'atténuation des autres humeurs du corps avec lesquelles elle se joint, sa propriété incisive, ses qualités discussives, atténuantes, résolutives, appliquée extérieurement, ont mérité à ce recrément une place parmi les remèdes utiles, & sont autant de preuves qui démontrent en elle l'existence d'un alkali plus ou moins développé *(e)*.

Si la bile ainsi éprouvée avec différentes substances, est susceptible de divers changemens, elle doit de même subir diverses mutations dans le corps humain, selon les liqueurs qui sont prédominantes, selon les altérations de ces mêmes liqueurs, selon les différens états du corps.

Quand on use habituellement d'alimens acescens ou de substances acides, la bile est verdâtre, plus épaisse, moins susceptible de putréfaction, moins fétide: c'est le caractère qu'elle paroît spécialement avoir dans les enfans. Au contraire, dans les adultes qui usent d'alimens plus disposés à la pourriture, la bile tend plus à la couleur jaune; elle est plus fétide, plus susceptible de putréfaction, sur-tout quand elle est mêlée avec les matières contenues dans les premières voies, & qu'elle y subit les changemens spontanés, inévitables par l'accès de l'air, & par la nature de ces matières. L'inspection des déjections bilieuses assure cette vérité.

Quand les liqueurs animales subissent différentes altérations, elles doivent les communiquer de même à la bile. Il n'est donc pas surprenant que dans certaines maladies, que par l'usage de quelque poison, dans la peste *(f)*, la bile ait présenté différentes couleurs.

Enfin l'action vasculaire étant différente, selon l'état de santé

(e) Dissert. Inaug. medic. de Bilis interno & externo usu medico, auctore Joan. Frider. Hufeland. *Jenæ, 1752,* & Haller *loco citato,*

(f) Haller, *tome VI, lib. XXIII, p. 547.*

ſanté ou de maladie, la bile aura diverſes couleurs & ſubira diverſes altérations. C'eſt ainſi que quand l'action vaſculaire eſt foible & languiſſante, quand les liqueurs tendent à l'épaiſſiſſement, quand il y a des obſtructions au foie, la bile eſt verdâtre, ſe ſépare en moindre quantité; un acide prédominant paroît en être la cauſe, & la nature des remèdes plus ou moins âcres, ſalés, ſavonneux, propres à guérir ces maladies, concourt à prouver ce que nous venons d'établir. Si l'action vaſculaire eſt forte, la bile eſt plus jaune, plus fétide, plus abondante; on reconnoît à ces caractères la tendance à la pourriture; une odeur plus forte & pénétrante développe l'alkali volatil, & on ſait par expérience, que pour arrêter les progrès de cette dégénération, les boiſſons aigrelettes, ou les ſubſtances acidules, peuvent ſeules offrir un remède convenable.

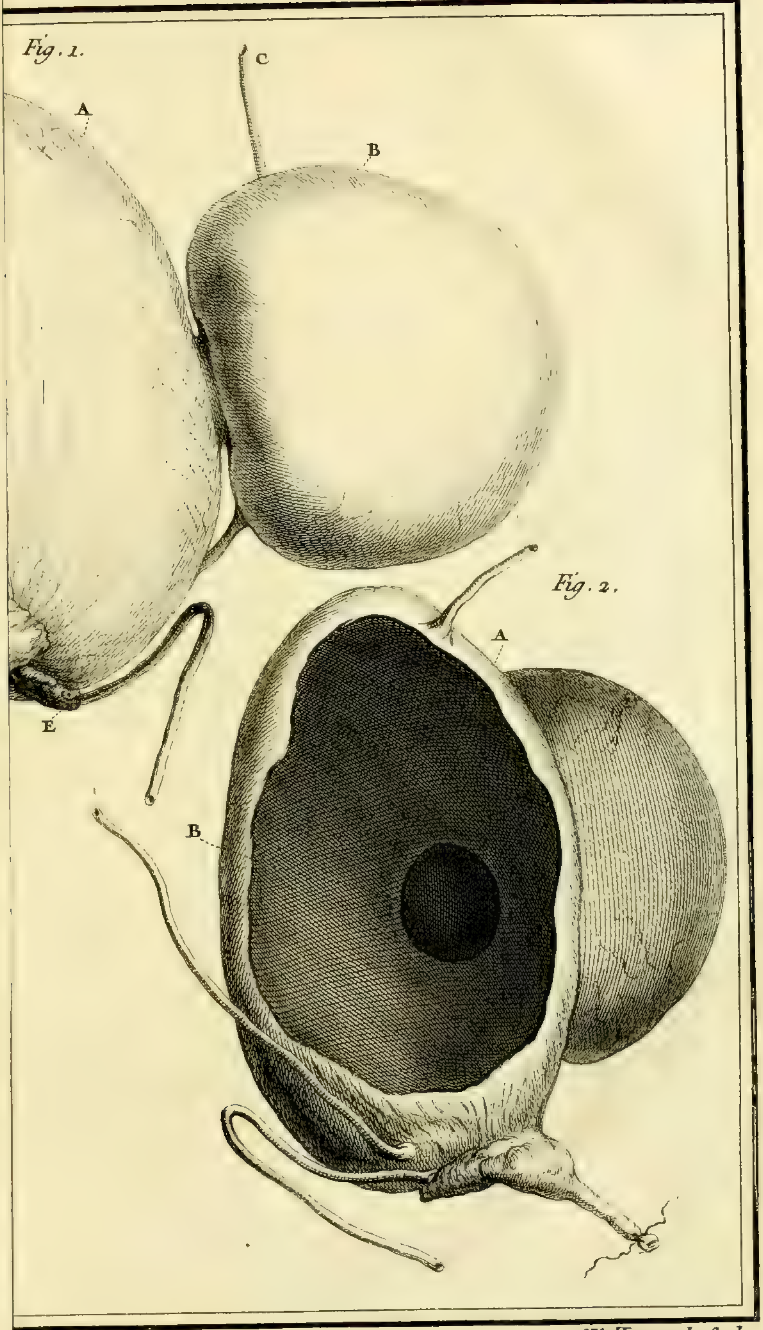
En ſuivant ainſi la Nature, on peut apprécier les diverſes eſpèces d'altérations de la bile, & nous voyons en effet que dans l'eſpace d'une fièvre, l'inſpection des déjections bilieuſes démontre, ſelon les différens temps de la maladie, ſelon la conſtitution du malade, des variations qui ont le plus grand rapport avec les expériences que nous avons rapportées, qui les confirment, & qui peuvent ſervir à éclairer également la théorie & la pratique de la Médecine.

Ce qui a été expoſé ſur l'analyſe de la bile, peut donc fournir des vues utiles dans la pratique, en appréciant la nature de ce fluide, & par ſa couleur & par l'état actuel du corps. Sa couleur verte indique la préſence d'un acide dans les premières voies, ou en géneral dans toute l'habitude du corps; dans cet état, elle a toujours peu d'odeur; on remarque qu'elle eſt épaiſſe, tenace, mucilagineuſe & elle ne coule qu'en petite quantité. Sa couleur jaune, ſa fétidité, démontrent ſa tendance à la pourriture & le développement de l'alkali. Dépouillée d'une partie de ſon huile, par l'action des vaiſſeaux dans une fièvre ardente, elle prend un caractère d'acrimonie qui irrite le canal inteſtinal, & peut devenir la ſource de beaucoup d'accidens.

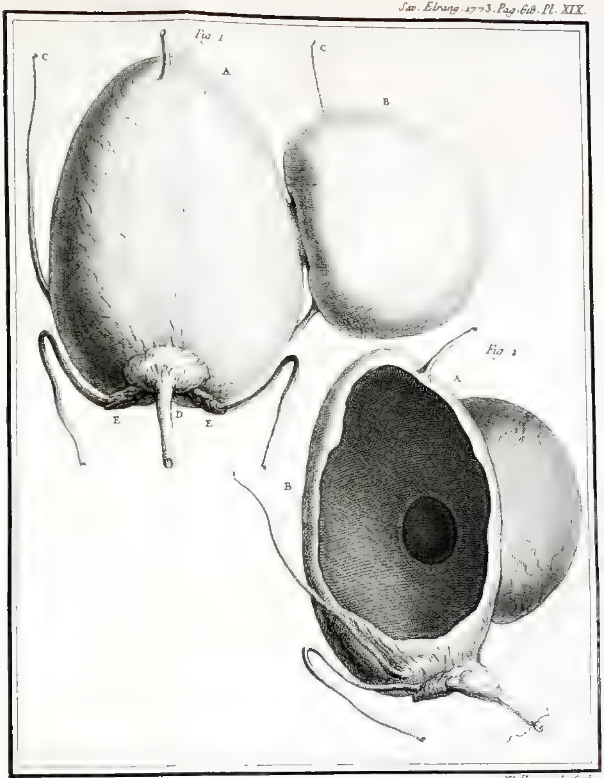
Ces connoiſſances & quelques autres, tirées de l'inſpection des déjections bilieuſes, établiſſent des indications curatives, & dirigent utilement la pratique ſur les moyens de guériſon. Ainſi dans certains cas, les acides oppoſent un remède ſalutaire à l'acrimonie bilieuſe & la détruiſent; les remèdes huileux ſerviront à la diſſoudre, quand elle eſt trop tenace; les ſavonneux conviendront dans le cas d'un acide prédominant, & les délayans ſimples ou aigrelets, ſuffiront dans le cas d'acrimonie ſimple, pour modérer ſon action ſur le canal inteſtinal.

Ces expériences m'ont paru d'autant plus intéreſſantes qu'elles ont des rapports avec l'économie animale, & ſous ce point de vue, j'ai cru devoir les préſenter à l'Académie dont les travaux ſont conſacrés à la perfection des Sciences & à l'utilité.

FIN.



Cne Haussard Sculp.



Sc. Haussard Sculp.